Numerische Mathematik 1 Übungen
Blatt 3 – Bearbeitung bis zum 28.10.2014 bzw. 4.11.2014

Hausaufgaben

Bearbeitung bis zum 28.10.2014

1. Eine Funktion $u \in C^3([-1,1])$ sei gegeben.

   (a) Gib ein Beispiel einer Funktion u an, wobei $u \in C^3([-1,1])$ aber $u^{(4)}(0)$ nicht existiert.

   (b) Wenn $u^{(4)}$ in $[-1,1]$ nicht existiert, zeige für ein fixiertes x, die Funktion

   $$F(h) = u''(x) - \frac{1}{h^2}[u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)]$$

   erfüllt $F(h) = o(h)$.

2. Die Nullstelle einer unbekannten Funktion f soll gefunden werden, und man hat Zugang zu den Werten von f nur durch ein Computerprogramm. Das Computerprogramm berechnet $f(x) = \arctan[4(x - \hat{x})]$, $\hat{x} = 1 + 2^{24}$, in doppelter Genauigkeit. Ein iteratives Verfahren wird zur Bestimmung der Nullstelle verwendet, und man speichert die Approximation $x_k \approx \hat{x}$ in der $k$ten Iteration mit einfacher Genauigkeit.

   (a) Finde das engste Intervall $[x_1, x_2]$ mit $\hat{x} \in [x_1, x_2]$, wobei x_1 und x_2 mit einfacher Genauigkeit speicherbar sind.

   (b) Finde die kleinsten Toleranzen ε, δ und η, die für die Abbruchskriterien

   $$|x_k - x_{k-1}| < \varepsilon |x_k|, \quad |x_k - x_{k-1}| < \delta, \quad |f(x_k)| < \eta$$

   zuverlässig verwendet werden können. Welches Abbruchskriterium verlangt kein Vorwissen der Funktion?

Bearbeitung bis zum 4.11.2014

3. Für eine gegebene Funktion v sei $J(u)$ für ausreichend glatte Funktionen u so definiert:

   $$J(u) = \int_0^1 |u(x) - v(x)|^2 dx + \mu \int_0^1 \sqrt{|u'(x)|^2 + \varepsilon^2} dx$$

   Seien nur die Werte $v_i = v(x_i)$ auf einem Gitter $x_i = ih$, $i = 0, \ldots, N$, $h = 1/N$, gegeben. Sei eine Funktion u ähnlich mit Werten $u_i \approx u(x_i)$ approximiert.

   (a) Mit $\boldsymbol{v} = \{v_i\}_{i=0}^N$ und $\boldsymbol{u} = \{u_i\}_{i=0}^N$ schreibe eine Approximation $J_h(\boldsymbol{u})$ für $J(u)$.

   (b) Gib Bedingungen der Approximationen an, wobei für ein fixiertes u gilt

   $$J_h(\{u(x_i)\}_{i=0}^N) \xrightarrow{h \to 0} J(u).$$

   (c) Berechne $\nabla_{\boldsymbol{u}} J_h(\boldsymbol{u})$ und leite eine Optimalitätsbedingung zur Minimierung von $J_h(\boldsymbol{u})$ her.

Programmieraufgabe

Alle Kodes sollen an `stephen.keeling@uni-graz.at`
per Email bis zum 2.11.2014 geschickt werden.

1. Für $N > 2$ seien die gegebenen verrauschten Daten $\boldsymbol{v} = \{v_i\}_{i=0}^N$ durch die folgenden Matlab Befehle gegeben (`ustar`$= \boldsymbol{u}^\star$, `v`$= \boldsymbol{v}$)

```
ustar = [zeros(round(N/2),1);ones(N+1-round(N/2),1)];
v = ustar + 0.1*randn(N+1,1);
```

wobei $\boldsymbol{u}^\star$ eine zu rekonstruierende Treppenfunktion ist. Für

$$D = \begin{bmatrix} 1 & -1 & & & 0 \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ 0 & & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(N+1)\times(N+1)}$$

$\mu > 0$ und $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^N$ schreiben Sie einen Matlab Kode der Form (`N`$= N$, `mue`$= \mu$, `u`$= \boldsymbol{u}$)

```
u = FamilienV(N,mue)
```

zur Lösung des linearen Gleichungssystems (mit `backslash` "\")

$$\left[\frac{\mu}{h^2} D + I\right] \boldsymbol{u} = \boldsymbol{v}.$$

Diskussionspunkte:

(a) Stellen Sie die Ergebnisse $\{\boldsymbol{u}^\star, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}\}$ auf dem Gitter

```
x = linspace(0,1,N+1);
```

(d.h. $x_i = ih$, $i = 0, \ldots, N$, $h = 1/N$) grafisch dar.

(b) Finden Sie ein bestes μ, wobei die Lösung $\boldsymbol{u}$ die ideale Treppenfunktion $\boldsymbol{u}^\star$ am besten entrauscht.

(c) Finden Sie den größten Wert von μ, wobei das System noch zuverlässig mit `backslash` gelöst werden kann