

Numerische Mathematik 1 Übungen

Blatt 2 – Bearbeitung bis zum 21.10.2014

Hausaufgaben

1. *Eigenschaften von einigen symmetrischen Matrizen*

- (a) Sei $V \in \mathbb{R}^{m \times n}$ beliebig. Beweisen Sie die folgenden Aussage.
- Die Matrix VV^\top ist symmetrisch positiv semi-definit.
 - Die Matrix VV^\top ist positiv definit genau dann, wenn $\text{rank}(V) = m$.
 - Es gilt: $\text{Im}(VV^\top) \subset \text{Im}(V)$.
 - Es gilt: $\text{rank}(VV^\top) \geq \text{rank}(V)$. Zu diesem Zweck können Sie zum Beispiel die Submatrix \tilde{V} verwenden, die mit k unabhängigen Zeilen von V konstruiert wird, wobei $k = \text{rank}(V)$.
 - Es gilt: $\text{Im}(VV^\top) = \text{Im}(V)$.
- (b) Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine symmetrische positiv definite Matrix. Sei $V \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mit $\text{rank}(V) = m$. Beweisen Sie, dass VAV^\top auch symmetrisch positiv definit ist.
- (c) Sei $V \in \mathbb{R}^{m \times n}$ beliebig. Beweisen Sie, dass die Matrizen VV^\top und $V^\top V$ die selben von Null verschiedenen Eigenwerte haben.

2. *Gram-Schmidt-Verfahren*

Zeigen Sie, die Matrizen (Q, R) im Algorithmus 2.1 (Gram-Schmidt-Verfahren) und im Algorithmus 2.2 (Modifiziertes Gram-Schmidt-Verfahren) sind die gleichen.