Mathematische Modellierung für LAK
Übungsblatt 3 unter Ersatzbetreuung von Keeling
16.Juni 2016

1. Zeigen Sie für das Modell der konkurrierenden Spezies,

$$x' = (a_1 - c_1 x - b_1 y)x, \quad y' = (a_2 - c_2 y - b_2 x)y$$

   (a) falls $a_2/c_2 > a_1/b_1$ und $a_1/c_1 < a_2/b_2$ ist $(a_1/c_1, 0)$ instabil und $(0, a_2/c_2)$ ist local asymptotisch stabil,

   (b) falls $a_2/c_2 < a_1/b_1$ und $a_1/c_1 > a_2/b_2$ ist $(a_1/c_1, 0)$ local asymptotisch stabil und $(0, a_2/c_2)$ ist instabil,

   (c) falls $a_2/c_2 < a_1/b_1$ und $a_1/c_1 < a_2/b_2$ sind $(a_1/c_1, 0)$ und $(0, a_2/c_2)$ instabil, aber die Lösung des Systems, $c_1 x + b_1 y = a_1$, $b_2 x + c_2 y = a_2$, ist local asymptotisch stabil, und

   (d) falls $a_2/c_2 > a_1/b_1$ und $a_1/c_1 > a_2/b_2$ sind $(a_1/c_1, 0)$ und $(0, a_2/c_2)$ local asymptotisch stabil, aber die Lösung des Systems, $c_1 x + b_1 y = a_1$, $b_2 x + c_2 y = a_2$, ist instabil.

2. Zeigen Sie dass die Funktion

$$F(x, y) = -a_2 \ln(x) + b_2 x - a_1 \ln(y) + b_1 y$$

   eine Lyapunov Funktion für das Räuber-Beute Modell ist:

$$x' = (a_1 - b_1 y)x, \quad y' = (b_2 x - a_2)y, \quad a_1, a_2, b_1, b_2 > 0.$$

3. Für das Masse-Feder System mit $m = 1$, $k = 3$, $c = 1$ und $f = 1$, d.h. $x'(t) = Ax(t) + b$, $x = (u, u')^\top$, $A = [0, 1; -1, -3]$, $b = (0, 1)^\top$, konstruieren Sie eine Funktion $P = P(x, y)$, die erfüllt $D_t P(y(t)) = -\|S^\top \nabla P(y(t))\|^2 \leq 0$, wobei $A = S \Lambda S^{-1}$, $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_i)$ und $y(t) = x(t) + A^{-1} b$. Zeigen, Sie dass P eine strenge Lyapunov Funktion ist.

4. Implementieren Sie die Räuber-Beute Modelle mit Matlab

$$x' = (a_1 - b_1 y)x, \quad y' = (b_2 x - a_2)y$$

$$x' = a_1(1 - \epsilon x) - b_1 xy, \quad y' = (b_2 x - a_2)y$$

   und

$$x' = a_1 x(1 - x/K) - b_1 xy/(1 + c_1 x), \quad y' = a_2 y(1 - y/(b_2 x))$$

   Untersuchen Sie die Stabilität der jeweiligen Gleichgewichte und zeigen Sie die Existenz eines stabilen Grenzzyklus für das letzte Modell.