

# Mathematische Modellierung SS20

## Lösungen der Beispiele auf Blatt 10

Beispiele und Skriptum

### Inhaltsverzeichnis

• <b>Beispiel 1: Geleebohnen</b>	<b>1</b>
◦ Aufgabe . . . . .	1
◦ Lösung . . . . .	2
* Teil (a) Abschätzung . . . . .	2
* Teil (b) Simulation . . . . .	2
• <b>Beispiel 2: Münzspiel</b>	<b>4</b>
◦ Aufgabe . . . . .	4
◦ Lösung . . . . .	5
* Teil (a) Abschätzung . . . . .	5
* Teil (b) Simulation . . . . .	6
• <b>Beispiel 3: Würfelspiel</b>	<b>8</b>
◦ Aufgabe . . . . .	8
◦ Lösung . . . . .	8
* Teil (a) Abschätzung . . . . .	8
* Teil (b) Simulation . . . . .	10
• <b>Beispiel 4: Radioaktivität</b>	<b>12</b>
◦ Aufgabe . . . . .	12
◦ Lösung . . . . .	12
* Teil (a) Abschätzung . . . . .	12
* Teil (b) Simulation . . . . .	13
• <b>Beispiel 5: Radioaktivität Ergänzt</b>	<b>15</b>
◦ Aufgabe . . . . .	15
◦ Lösung . . . . .	16
* Teil (a) Homogener Poisson-Prozess . . . . .	17
* Teil (b) Nicht Homogener Poisson-Prozess . . . . .	19
* Teil (c) Bernoilli-Prozess . . . . .	22

### • Beispiel 1: Geleebohnen

#### ◦ Aufgabe

Probanden werden nach einer Einschätzung befragt, wie viele Geleebohnen es in einem Glasgefäß gibt. Die tatsächliche Anzahl ist 4510. Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Einschätzung  $X$  eines zufällig ausgewählten Probanden in einem Intervall  $[a, b]$  landet sei modelliert durch

$$P(X \in [a, b]) = \int_a^b f(x)dx, \quad f(x) = \begin{cases} (x/\gamma^2)e^{-x/\gamma}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases} \quad \gamma = 4510/2.$$

- (a) Seien  $\{X_1, X_2, \dots\}$  unabhängige Zufallsproben, alle gleich verteilt wie  $X$ , wobei  $X_i$  die Einschätzung des  $i$ ten Probanden darstellt. Sei  $Y^{(n)} = X_1 + \dots + X_n$ . Schätzen Sie eine Mindestanzahl  $n$  der Probanden ab, wobei gilt

$$P(|Y^{(n)}/n - \mu_X| \leq 0.1\mu_X) \geq 0.9.$$

- (b) Schreiben Sie einen Matlab Code, um dieses Experiment virtuell durchzuführen, und stellen Sie den Mittelwert der simulierten Stichproben gegen  $n$  grafisch dar, um Ihr Ergebnis vom Teil (a) veranschaulichen zu machen.

## ○ Lösung

### \* Teil (a) Abschätzung

Die Zufallsvariable  $Y^{(n)}/n$  erfüllt

$$\mathbb{E}[Y^{(n)}/n] = \mathbb{E}[X] = \mu_X = 2\gamma = 4510$$

$$\mathbb{V}[Y^{(n)}/n] = \mathbb{V}[X]/n = \sigma_X^2/n = 2\gamma^2/n = 40680200/n$$

$$P(Y^{(n)}/n \in [a, b]) = \int_a^b F^{(n)}(x)dx, \quad F^{(n)}(x) = \frac{n(nx)^{2n-1}e^{-nx/\gamma}}{(2n-1)!\gamma^{2n}}$$

und mit  $Z \sim N(0, 1)$ ,

$$P(Y^{(n)}/n \in [a, b]) = P\left(\frac{a - \mu_X}{\sigma_X/\sqrt{n}} \leq \frac{Y^{(n)}/n - \mu_X}{\sigma_X/\sqrt{n}} \leq \frac{b - \mu_X}{\sigma_X/\sqrt{n}}\right) \approx P\left(\frac{a - 2\gamma}{\sqrt{2\gamma^2/n}} \leq Z \leq \frac{b - 2\gamma}{\sqrt{2\gamma^2/n}}\right).$$

Erstens wird die Ungleichung erfüllt ( $a = \mu_X - 0.1\mu_X = \frac{9}{10} \cdot 4510$ ,  $b = \mu_X + 0.1\mu_X = \frac{11}{10} \cdot 4510$ )

$$\frac{\Gamma(2n, 9n/5) - \Gamma(2n, 11n/5)}{(2n-1)!} = \int_{0.9\mu_X}^{1.1\mu_X} F^{(n)}(x)dx = P(|Y^{(n)}/n - \mu_X| \leq 0.1\mu_X) \geq 0.9$$

wenn  $n \geq 135$  gilt. Zweitens wird die Ungleichung erfüllt ( $a = \frac{9}{10} \cdot 4510$ ,  $b = \frac{11}{10} \cdot 4510$ )

$$\text{erf}\left(\frac{\sqrt{n}}{10}\right) = P\left(|Z| \leq \frac{\sqrt{2n}}{10}\right) = P\left(|Z| \leq \frac{\frac{1}{10}(2\gamma)}{\sqrt{2\gamma^2/n}}\right) \leq 0.9$$

wenn  $n \geq 136$  gilt, wie mit den folgenden Matlab Befehlen bestätigt wird.

```
normcdf(sqrt(135*2)/10)-normcdf(-sqrt(135*2)/10)
normcdf(sqrt(136*2)/10)-normcdf(-sqrt(136*2)/10)
```

### \* Teil (b) Simulation

Sei  $F$  die Wahrscheinlichkeitsverteilung für  $X$ ,

$$F(t) = \int_{-\infty}^t f(x)dx$$

Um Zufallsproben der Zufallsvariable  $X$  zu generieren, wird die folgende Beziehung zwischen Zufallsvariablen  $X$  und  $U$  verwendet, wobei  $U$  auf  $[0, 1]$  gleichmäßig verteilt ist.

$$P(X \in [a, b]) = \int_a^b f(x)dx = \int_{F(a)}^{F(b)} dF = P(U \in [F(a), F(b)]) = P(F^{-1}(U) \in [a, b])$$

Die Simulation des Experiments mit Geleebohnen wird mit dem folgenden Matlab Code durchgeführt.

```

h1 = figure(1); close(h1); h1 = figure(1);
set(h1,'Position',[10 50 1000 500]);

a = 4510/2;
x = linspace(0,round(6*a),round(6*a));
f = (x/a^2).*exp(-x/a); % probability density
F = 1 - (1 + x/a).*exp(-x/a); % probability distribution

% inverse of F
F1 = @(z) mean(x(find(abs(F-z) == min(abs(F-z)))));
nt = 135; % threshold number of subjects
mu = 2*a; % mean

imax = 100; % imax = number of experiments
i2 = sqrt(imax);
yv = []; % store for plot
nv = [];
sv = [];
for n=10:10:(2*nt) % n = number of subjects
    y = zeros(1,imax);
    for i=1:imax
        u = rand(1,n); % uniformly distributed
        yr = zeros(1,n);
        for j=1:n
            yr(j) = F1(u(j)); % random sample with
        end % distribution F
        y(i) = mean(yr); % mean of sample
    end
    yv = [yv,mean(y)]; % store for plotting
    sv = [sv,std(y)];
    nv = [nv,n];
    subplot(1,2,1) % plot results for current n
    histogram(y,30)
    axis([0 10000 0 1.2*i2])
    set(gca,'XTick',[0,4510,10000])
    text(7000,0.8*i2,sprintf('mean=%0.0f\nstd=%0.0f',mean(y),std(y)))
    xlabel('Schätzungen')
    ylabel('Anzahl')
    title(sprintf('Histogramm des Experiments, n=%0.0f',n))
    subplot(1,2,2)
    plot(nv,yv,'b', ...
        nv,yv+1.645*sv,'b-.', ...
        nv,yv-1.645*sv,'b-.', ...
        nv,mu*ones(size(nv)), 'r:', ...
        nv,0.9*mu*ones(size(nv)), 'r:', ...
        nv,1.1*mu*ones(size(nv)), 'r:', ...
        [nt,nt],[0.9*mu,1.1*mu], 'r:')
    xlabel('n')

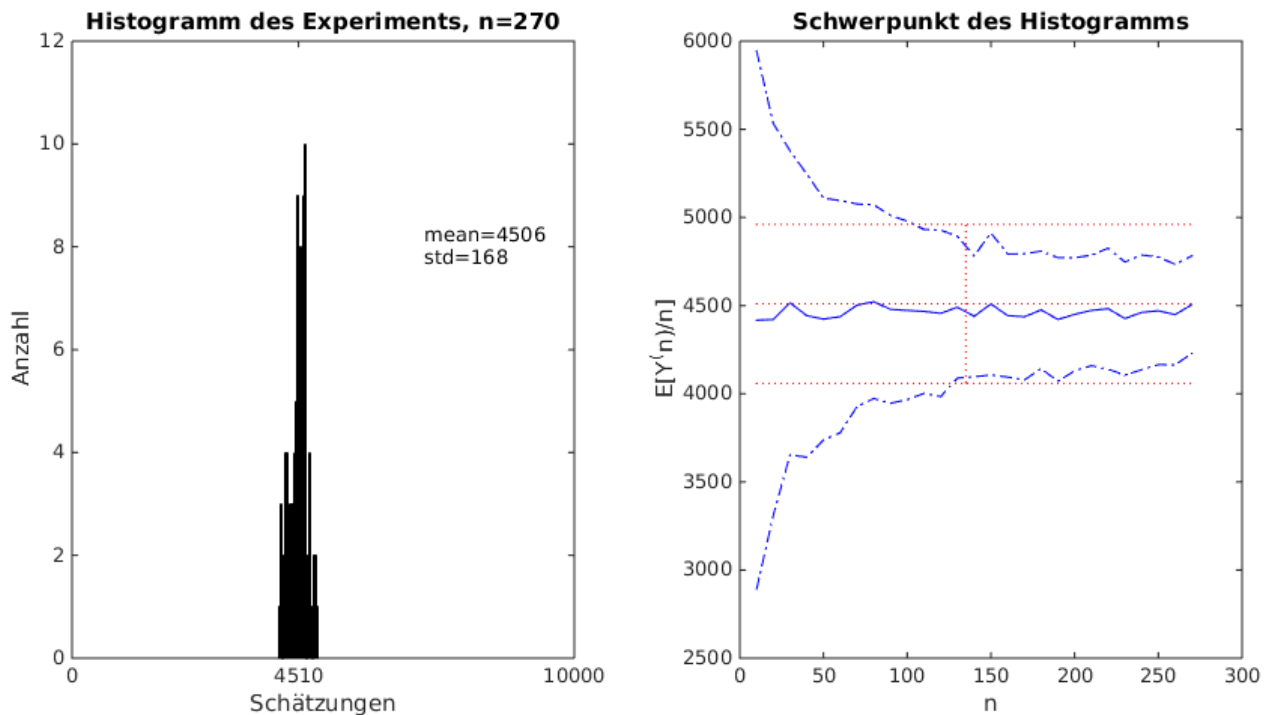
```

```

ylabel('E[Y^(n)/n]')
title('Schwerpunkt des Histogramms')
drawnow;
end

```

Die Ergebnisse werden folgendermaßen grafisch dargestellt. Die senkrechte rot geschrichelte Gerade liegt bei dem Schwellenwert der Anzahl der Probanden  $n = 135$  aus Teil (a). Die waagerechten rot geschrichelten Geraden liegen bei  $\{0.9\mu, \mu, 1.1\mu\}$ . Die blau voll gezogene Kurve ist der Mittelwert der geschrichelten Geraden für verschiedene Werte von  $n$ . Basierend auf der Eigenschaft  $P(|Z| \leq 1.645) \approx 0.9$ , liegen die strichpunktierten Kurven bei dem Mittelwert der Stichproben plus/minus das Vielfache 1.645 vom Standardabweichung der Stichproben. Ab dem Schwellenwert  $n = 135$  liegen die blauen Kurven innerhalb des roten Korridors, und daher stimmen diese Ergebnisse mit den Abschätzungen aus Teil (a) überein.



## • Beispiel 2: Münzspiel

### ◦ Aufgabe

In einem Münzspiel wird eine einzige Münze geworfen. Eine Zufallsvariable  $X$  mit  $X(K) = 0$ ,  $X(Z) = 1$  sei für ein fixiertes  $q \in (0, 1)$  mit der Wahrscheinlichkeitsverteilung modelliert,

$$P(X = 0) = 1 - q, \quad P(X = 1) = q.$$

- (a) Seien  $\{X_1, X_2, \dots\}$  unabhängige Zufallsproben, alle gleich verteilt wie  $X$ , wobei  $X_i$  das Ergebnis eines  $i$ ten Münzspiels darstellt. Sei  $Y^{(n)} = X_1 + \dots + X_n$ . Schätzen Sie eine Mindestanzahl  $n$  der Münzen ab, wobei mit  $q = 0.5$  gilt

$$P(|Y^{(n)}/n - \mu_X| \leq 0.1\mu_X) \geq 0.9.$$

- (b) Schreiben Sie einen Matlab Code, um dieses Experiment mit  $q = 0.5$  virtuell durchzuführen, und stellen Sie den Mittelwert der simulierten Stichproben gegen  $n$  grafisch dar, um Ihr Ergebnis vom Teil (a) veranschaulichen zu machen.

○ **Lösung**

\* **Teil (a) Abschätzung**

Die Zufallsvariable  $Y^{(n)}/n$  erfüllt

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[Y^{(n)}/n] &= \mathbb{E}[X] = \mu_X = q \\ \mathbb{V}[Y^{(n)}/n] &= \mathbb{V}[X]/n = \sigma_X^2/n = q(1-q)/n \\ P(Y^{(n)} = m) &= \binom{n}{m} q^m (1-q)^{n-m}\end{aligned}$$

und mit  $Z \sim N(0, 1)$ ,  $q = \frac{1}{2}$

$$P(Y^{(n)}/n \in [a, b]) = P\left(\frac{a - \mu_X}{\sigma_X/\sqrt{n}} \leq \frac{Y^{(n)}/n - \mu_X}{\sigma_X/\sqrt{n}} \leq \frac{b - \mu_X}{\sigma_X/\sqrt{n}}\right) \approx P\left(\frac{a - \frac{1}{2}}{1/\sqrt{4n}} \leq Z \leq \frac{b - \frac{1}{2}}{1/\sqrt{4n}}\right).$$

Erstens wird die Ungleichung erfüllt,

$$2^{-n} \sum_{m=\lceil 9n/20 \rceil}^{m=\lfloor 11n/20 \rfloor} \binom{n}{m} = \sum_{0.9\mu_X \leq m/n \leq 1.1\mu_X} P(Y^{(n)} = m) = P(|Y^{(n)}/n - \mu_X| \leq 0.1\mu_X) \geq 0.9$$

wenn  $n \geq 279$  gilt, wie mit dem folgenden Matlab Code berechnet wird.

```
sv = [];  
nv = [];  
mu = 0.5;  
for n=200:300  
    p = binopdf(0:n,n,mu);  
    m1 = ceil(0.9*mu*n)+1;  
    m2 = floor(1.1*mu*n)+1;  
    sv = [sv,sum(p(m1:m2))];  
    nv = [nv,n];  
end  
l = find(sv < 0.9,1,'last');  
nt = nv(l+1);  
disp(sprintf('threshold n = %0.0f',nt))
```

Zweitens wird die Ungleichung erfüllt, (mit  $a = \frac{9}{20}$ ,  $b = \frac{11}{20}$ )

$$\text{erf}\left(\frac{\sqrt{n}}{10\sqrt{2}}\right) = P\left(|Z| \leq \frac{\sqrt{n}}{10}\right) = P\left(|Z| \leq \frac{\frac{1}{20}}{1/\sqrt{4n}}\right) \geq 0.9$$

wenn  $n \geq 271$  gilt, wie mit den folgenden Matlab Befehlen bestätigt wird.

```
normcdf(sqrt(270)/10)-normcdf(-sqrt(270)/10)  
normcdf(sqrt(271)/10)-normcdf(-sqrt(271)/10)
```

### \* Teil (b) Simulation

Um Zufallsproben der Zufallsvariable  $X$  zu generieren, wird die folgende Beziehung zwischen Zufallsvariablen  $X$  und  $U$  verwendet, wobei  $U$  auf  $[0, 1]$  gleichmäßig verteilt ist.

$$P(X = 1) = \int_0^q du = P(U \in [0, q]).$$

Die Simulation des Experiments mit Münzen wird mit dem folgenden Matlab Code durchgeführt.

```
h1 = figure(1); close(h1); h1 = figure(1);
set(h1,'Position',[10 50 1000 500]);

sv = [];
nv = [];
mu = 0.5;
for n=200:300
    p = binopdf(0:n,n,mu);
    m1 = ceil(0.9*mu*n)+1;
    m2 = floor(1.1*mu*n)+1;
    sv = [sv,sum(p(m1:m2))];
    nv = [nv,n];
end
l = find(sv < 0.9,1,'last');
nt = nv(l+1);
disp(sprintf('threshold n = %0.0f',nt))

mu = 0.5; % mean, prob of tail

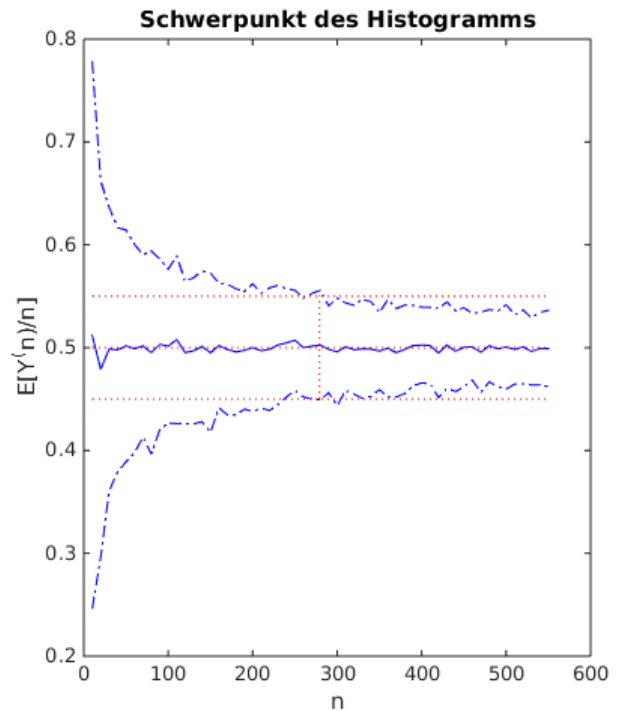
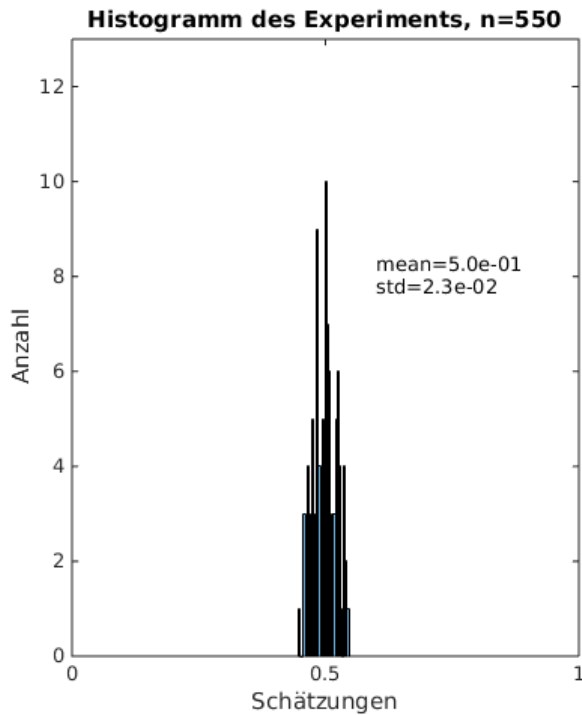
imax = 100; % imax = number of experiments
i2 = sqrt(imax);
yv = []; % store for plot
nv = [];
sv = [];
for n=10:10:(2*nt) % n = number of subjects
    y = zeros(1,imax);
    for i=1:imax
        u = rand(1,n); % uniformly distributed
        y(i) = mean(u<mu); % mean number with u<mu
    end
    yv = [yv,mean(y)]; % store for plotting
    sv = [sv,std(y)];
    nv = [nv,n];
    subplot(1,2,1) % plot results for current n
    histogram(y,30)
    axis([0 1 0 1.3*i2])
    set(gca,'XTick',[0,mu,1])
    text(0.6,0.8*i2,sprintf('mean=%0.1e\nstd=%0.1e',mean(y),std(y)))
    xlabel('Schtzungen')
    ylabel('Anzahl')
```

```

title(sprintf('Histogramm des Experiments, n=%0.0f',n))
subplot(1,2,2)
plot(nv,yv    ,'b', ...
     nv,yv+1.645*sv,'b-.', ...
     nv,yv-1.645*sv,'b-.', ...
     nv,mu*ones(size(nv)),'r:', ...
     nv,0.9*mu*ones(size(nv)),'r:', ...
     nv,1.1*mu*ones(size(nv)),'r:', ...
     [nt,nt],[0.9*mu,1.1*mu],'r:')
xlabel('n')
ylabel('E[Y^(n)/n]')
title('Schwerpunkt des Histogramms')
drawnow;
end

```

Die Ergebnisse werden folgendermaßen grafisch dargestellt. Die senkrechte rot geschrichelte Gerade liegt bei dem Schwellenwert der Anzahl der Probanden  $n = 279$  aus Teil (a). Die waagerechten rot geschrichelten Geraden liegen bei  $\{0.9\mu, \mu, 1.1\mu\}$ . Die blau voll gezogene Kurve ist der Mittelwert der Stichproben für verschiedene Werte von  $n$ . Basierend auf der Eigenschaft  $P(|Z| \leq 1.645) \approx 0.9$ , liegen die strichpunktierten Kurven bei beim Mittelwert der Stichproben plus/minus das Vielfache 1.645 vom Standardabweichung der Stichproben. Ab dem Schwellenwert  $n = 279$  liegen die blauen Kurven innerhalb des roten Korridors, und daher stimmen diese Ergebnisse mit den Abschätzungen aus Teil (a) überein.



## • Beispiel 3: Würfelspiel

### ◦ Aufgabe

In einem Würfelspiel werden sechs Würfel geworfen. Seien  $S_1, \dots, S_6$  die Augenzahlen  $1, \dots, 6$  für den Würfel. Eine Zufallsvariable  $X$  mit  $X(S_1) = 1, \dots, X(S_6) = 6$  sei mit der Wahrscheinlichkeitsverteilung modelliert,

$$P(X = 1) = \dots = P(X = 6) = \frac{1}{6}.$$

- (a) Seien  $\{X_1, X_2, \dots\}$  unabhängige Zufallsproben, alle gleich verteilt wie  $X$ , wobei  $X_i$  das Ergebnis eines  $i$ ten Würfelspiels darstellt. Sei  $Y^{(n)} = X_1 + \dots + X_n$ . Schätzen Sie eine Mindestanzahl  $n$  der Würfel ab, wobei gilt

$$P(|Y^{(n)}/n - \mu_X| \leq 0.1\mu_X) \geq 0.9.$$

- (b) Schreiben Sie einen Matlab Code, um dieses Experiment virtuell durchzuführen, und stellen Sie den Mittelwert der simulierten Stichproben gegen  $n$  grafisch dar, um Ihr Ergebnis vom Teil (a) veranschaulicht zu machen.

### ◦ Lösung

#### \* Teil (a) Abschätzung

Die Zufallsvariable  $Y^{(n)}/n$  erfüllt

$$\mathbb{E}[Y^{(n)}/n] = \mathbb{E}[X] = \mu_X = \frac{7}{2}$$

$$\mathbb{V}[Y^{(n)}/n] = \mathbb{V}[X]/n = \sigma_X^2/n = \frac{35}{12n}$$

$$P(Y^{(2)} = m) = \left[ P(Y^{(1)} = m-1) + \dots + P(Y^{(1)} = m-6) \right] / 6, \quad 2 \leq m \leq 6 \cdot 2$$

$$P(Y^{(n+1)} = m) = \left[ P(Y^{(n)} = m-1) + \dots + P(Y^{(n)} = m-6) \right] / 6, \quad n \leq m \leq 6n$$

und mit  $Z \sim N(0, 1)$ ,

$$P(Y^{(n)}/n \in [a, b]) = P\left(\frac{a - \mu_X}{\sigma_X/\sqrt{n}} \leq \frac{Y^{(n)}/n - \mu_X}{\sigma_X/\sqrt{n}} \leq \frac{b - \mu_X}{\sigma_X/\sqrt{n}}\right) \approx P\left(\frac{a - \frac{7}{2}}{\sqrt{\frac{35}{12n}}} \leq Z \leq \frac{b - \frac{7}{2}}{\sqrt{\frac{35}{12n}}}\right).$$

Erstens wird die Ungleichung erfüllt ( $a = \mu_X - 0.1\mu_X = \frac{9}{10} \cdot \frac{7}{2}$ ,  $b = \mu_X + 0.1\mu_X = \frac{11}{10} \cdot \frac{7}{2}$ )

$$\sum_{0.9\mu_X \leq m/n \leq 1.1\mu_X} P(Y^{(n)} = m) = P(|Y^{(n)}/n - \mu_X| \leq 0.1\mu_X) \geq 0.9$$

wenn  $n \geq 64$  gilt, wie mit dem folgenden Matlab Code berechnet wird.

```
h1 = figure(1); close(h1); h1 = figure(1);  
set(h1, 'Position', [10 50 1000 500]);  
  
sv = [];  
nv = [];  
mu = 7/2;
```



```

for n=50:100
    p = zeros(n,6*n);
    p(1,1:6) = 1/6;
    for j=2:n
        for m=j:(6*j)
            m1 = max(1,m-6);
            m2 = max(1,m-1);
            p(j,m) = sum(p(j-1,m1:m2))/6;
        end
    end
    m = (1:6*n)/n;
    m1 = ceil(0.9*mu*n);
    m2 = floor(1.1*mu*n);
    sv = [sv,sum(p(n,m1:m2))];
    nv = [nv,n];
end
l = find(sv < 0.9,1,'last');
nt = nv(l+1);
disp(sprintf('threshold n = %0.0f',nt))

mu = 3.5; % mean

imax = 100; % imax = number of experiments
i2 = sqrt(imax);
yv = []; % store for plot
nv = [];
sv = [];
for n=10:10:2*(nt) % n = number of subjects
    y = zeros(1,imax);
    for i=1:imax
        y(i) = mean(randi(6,1,n)); % mean of samples in {1,...,6}
    end
    yv = [yv,mean(y)]; % store for plotting
    sv = [sv,std(y)];
    nv = [nv,n];
    subplot(1,2,1) % plot results for current n
    histogram(y,30)
    axis([1 6 0 1.3*i2])
    set(gca,'XTick',1:6)
    text(4,0.8*i2,sprintf('mean=%0.1e\nstd=%0.1e',mean(y),std(y)))
    xlabel('Schätzungen')
    ylabel('Anzahl')
    title(sprintf('Histogramm des Experiments, n=%0.0f',n))
    subplot(1,2,2)
    plot(nv,yv,'b', ...
        nv,yv+1.645*sv,'b-.', ...
        nv,yv-1.645*sv,'b-.', ...
        nv,mu*ones(size(nv)),'r:', ...)

```

```

        nv,0.9*mu*ones(size(nv)), 'r:', ...
        nv,1.1*mu*ones(size(nv)), 'r:', ...
        [nt,nt],[0.9*mu,1.1*mu], 'r:')
xlabel('n')
ylabel('E[Y^(n)/n]')
title('Schwerpunkt des Histogramms')
drawnow;
end

```

Zweitens wird die Ungleichung erfüllt ( $a = \frac{9}{10} \cdot \frac{7}{2}$ ,  $b = \frac{11}{10} \cdot \frac{7}{2}$ )

$$\operatorname{erf}\left(\frac{1}{10}\sqrt{\frac{21n}{10}}\right) = \operatorname{erf}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{7}{10}\sqrt{\frac{3n}{35}}\right) = P\left(|Z| \leq \frac{7}{10}\sqrt{\frac{3n}{35}}\right) = P\left(|Z| \leq \frac{\frac{7}{20}}{\sqrt{\frac{35}{12n}}}\right) \geq 0.9$$

wenn  $n \geq 65$  gilt, wie mit den folgenden Matlab Befehlen bestätigt wird.

```

normcdf(sqrt(4.2*64)/10)-normcdf(-sqrt(4.2*64)/10)
normcdf(sqrt(4.2*65)/10)-normcdf(-sqrt(4.2*65)/10)

```

#### \* Teil (b) Simulation

Um Zufallsproben der Zufallsvariable  $X$  zu generieren, wird die folgende Beziehung zwischen Zufallsvariablen  $X$  und  $U$  verwendet, wobei  $U$  auf  $[0, 1]$  gleichmäßig verteilt ist.

$$P(X = 1) = \int_0^q du = P(U \in [0, q]).$$

Die Simulation des Experiments mit Würfeln wird mit dem folgenden Matlab Code durchgeführt.

```

h1 = figure(1); close(h1); h1 = figure(1);
set(h1,'Position',[10 50 1000 500]);

imax = 100; % imax = number of experiments
i2 = sqrt(imax);
yv = []; % store for plot
nv = [];
sv = [];
for n=10:10:500 % n = number of subjects
    y = zeros(1,imax);
    for i=1:imax
        y(i) = mean(randi(6,1,n)); % mean of samples in {1,...,6}
    end
    yv = [yv,mean(y)]; % store for plotting
    sv = [sv,std(y)];
    nv = [nv,n];
    subplot(1,2,1) % plot results for current n
    histogram(y,30)
    axis([1 6 0 1.3*i2])
    set(gca,'XTick',1:6)
end

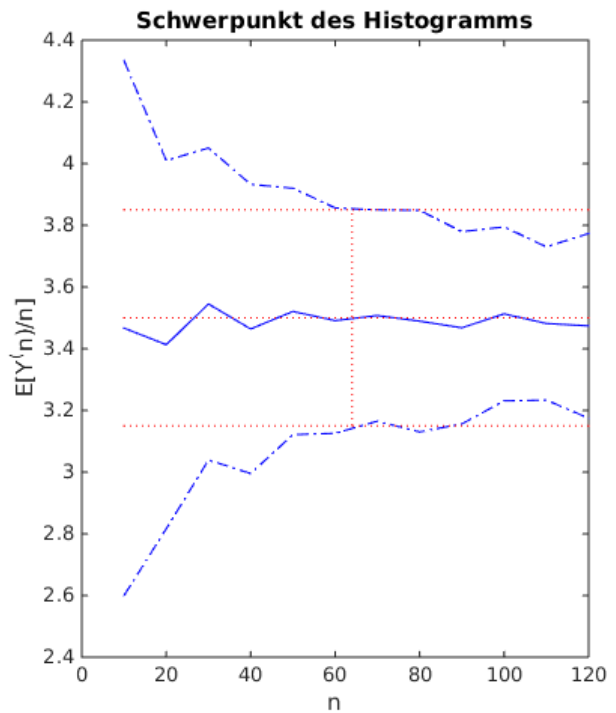
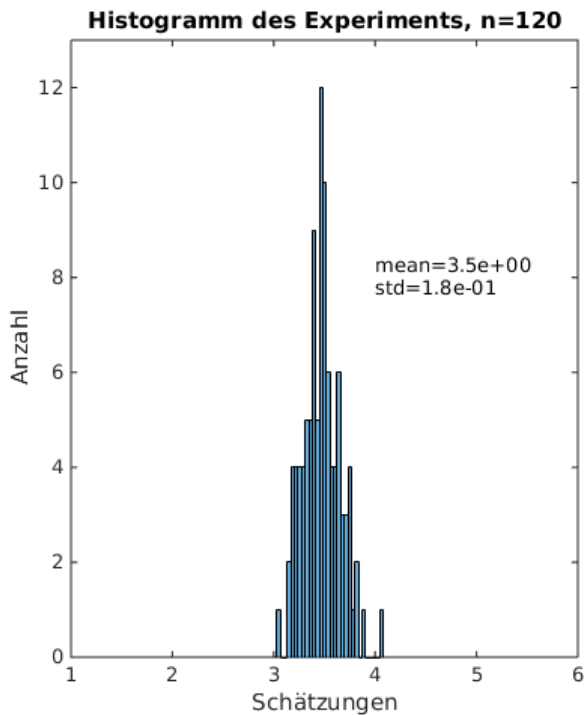
```

```

text(4,0.8*i2,sprintf('mean=%0.1e\nstd=%0.1e',mean(y),std(y)))
xlabel('Schätzungen')
ylabel('Anzahl')
title(sprintf('Histogramm des Experiments, n=%0.0f',n))
subplot(1,2,2)
plot(nv,yv,'b',nv,yv+sv,'r:',nv,yv-sv,'r:',nv,3.5*ones(size(nv)),'g:')
xlabel('n')
ylabel('E[Y^(n)/n]')
title('Schwerpunkt des Histogramms')
drawnow;
end

```

Die Ergebnisse werden folgendermaßen grafisch dargestellt. Die senkrechte rot geschrichelte Gerade liegt bei dem Schwellenwert der Anzahl der Probanden  $n = 64$  aus Teil (a). Die waagerechten rot geschrichelten Geraden liegen bei  $\{0.9\mu, \mu, 1.1\mu\}$ . Die blau voll gezogene Kurve ist der Mittelwert der Stichproben für verschiedene Werte von  $n$ . Basierend auf der Eigenschaft  $P(|Z| \leq 1.645) \approx 0.9$ , liegen die strichpunktierten Kurven bei dem Mittelwert der Stichproben plus/minus das Vielfache 1.645 vom Standardabweichung der Stichproben. Ab dem Schwellenwert  $n = 64$  liegen die blauen Kurven innerhalb des roten Korridors, und daher stimmen diese Ergebnisse mit den Abschätzungen aus Teil (a) überein.



## • Beispiel 4: Radioaktivität

### ◦ Aufgabe

Ein radioaktives Teilchen wird zerfallen. Eine Zufallsvariable  $X(t)$  mit

$$\begin{aligned} \text{keinen Zerfall in } [0, t] : X(t) &= 0 \\ \text{Zerfall in } [0, t] : X(t) &= 1 \end{aligned}$$

sei für ein fixiertes  $\lambda > 0$  mit der Wahrscheinlichkeitsverteilung modelliert,

$$P(X(t) = 0) = e^{-\lambda t}, \quad P(X(t) = 1) = 1 - e^{-\lambda t}.$$

- (a) Seien  $\{X_1(t), X_2(t), \dots\}$  unabhängige Zufallsproben, alle gleich verteilt wie  $X(t)$ , wobei  $X_i(t)$  das Ergebnis eines  $i$ ten Teilchens darstellt. Sei  $Y^{(n)}(t) = X_1(t) + \dots + X_n(t)$ . Schätzen Sie eine Mindestanzahl  $n$  der Teilchen in Abhängigkeit von  $\lambda$  und  $t$  ab, wobei gilt

$$P(|Y^{(n)}(t)/n - \mu_{X(t)}| \leq 0.1\mu_{X(t)}) \geq 0.9.$$

- (b) Schreiben Sie einen Matlab Code, um dieses Experiment für fixiertes  $\lambda$  und verschiedene Zeiten  $t \approx \ln(2)/\lambda$  virtuell durchzuführen, und stellen Sie den Mittelwert der simulierten Stichproben gegen  $n$  grafisch dar, um Ihr Ergebnis vom Teil (a) veranschaulichen zu machen.

### ◦ Lösung

#### \* Teil (a) Abschätzung

Die Zufallsvariable  $Y^{(n)}(t)/n$  erfüllt

$$\mathbb{E}[Y^{(n)}(t)/n] = \mathbb{E}[X(t)] = \mu_{X(t)} = 1 - e^{-\lambda t}$$

$$\mathbb{V}[Y^{(n)}(t)/n] = \mathbb{V}[X(t)]/n = \sigma_{X(t)}^2/n = e^{-\lambda t}(1 - e^{-\lambda t})/n$$

$$P(Y^{(n)}(t) = m) = \binom{n}{m} (1 - e^{-\lambda t})^m (e^{-\lambda t})^{n-m}$$

und mit  $Z \sim N(0, 1)$ ,

$$\begin{aligned} P(Y^{(n)}(t)/n \in [a, b]) &= P\left(\frac{a - \mu_{X(t)}}{\sigma_{X(t)}/\sqrt{n}} \leq \frac{Y^{(n)}(t)/n - \mu_{X(t)}}{\sigma_{X(t)}/\sqrt{n}} \leq \frac{b - \mu_{X(t)}}{\sigma_{X(t)}/\sqrt{n}}\right) \\ &\approx P\left(\frac{a - (1 - e^{-\lambda t})}{\sqrt{e^{-\lambda t}(1 - e^{-\lambda t})/n}} \leq Z \leq \frac{b - (1 - e^{-\lambda t})}{\sqrt{e^{-\lambda t}(1 - e^{-\lambda t})/n}}\right). \end{aligned}$$

Erstens anhand der Rechnung

$$2^{-n} \sum_{m=\lceil 0.9ne^{-\lambda t} \rceil}^{m=\lfloor 1.1ne^{-\lambda t} \rfloor} \binom{n}{m} = \sum_{0.9\mu_{X(t)} \leq \frac{m}{n} \leq 1.1\mu_{X(t)}} P(Y^{(n)}(t) = m) = P\left(\left|\frac{Y^{(n)}(t)}{n} - \mu_{X(t)}\right| \leq 0.1\mu_{X(t)}\right) \geq 0.9$$

wird  $n$  mit dem folgenden Matlab Code bezüglich  $\lambda$  und  $t$  abgeschätzt, z.B. mit der Halbwertszeit  $t = \ln(2)/\lambda$  ergibt sich  $n \geq 290$ , wie beim Münzenspiel.

```

sv = [];
nv = [];
la = 1;
t = log(2)/la;
mu = 1-exp(-la*t);
for n=200:300
    p = binopdf(0:n,n,mu);
    m1 = ceil(0.9*mu*n);
    m2 = floor(1.1*mu*n);
    sv = [sv,sum(p(m1:m2))];
    nv = [nv,n];
end
l = find(sv < 0.9,1,'last');
disp(num2str(nv(l+1)))

```

Zweitens wird die Ungleichung erfüllt ( $a = 0.9(1 - e^{-\lambda t})$ ,  $b = 1.1(1 - e^{-\lambda t})$ )

$$\operatorname{erf}\left(\frac{\sqrt{n}}{10\sqrt{2}}\sqrt{e^{\lambda t}-1}\right) = P\left(|Z| \leq \frac{\sqrt{n}}{10}\sqrt{e^{\lambda t}-1}\right) = P\left(|Z| \leq \frac{\sqrt{n}}{10}\frac{\sqrt{1-e^{-\lambda t}}}{\sqrt{e^{-\lambda t}}}\right) \geq 0.9$$

erfüllt, wenn

$$\frac{\sqrt{n}}{10\sqrt{2}}\sqrt{e^{\lambda t}-1} \geq \operatorname{erf}^{-1}(0.9) \approx 1.1631.$$

z.B. mit der Halbwertszeit  $t = \ln(2)/\lambda$  ergibt sich  $n \geq 271$ , wie beim Münzenspiel.

#### \* Teil (b) Simulation

Um Zufallsproben der Zufallsvariable  $X(t)$  zu generieren, wird die folgende Beziehung zwischen Zufallsvariablen  $X(t)$  und  $U$  verwendet, wobei  $U$  auf  $[0, 1]$  gleichmäßig verteilt ist.

$$P(X(t) = 1) = \int_0^{1-e^{-\lambda t}} du = P(U \in [0, 1 - e^{-\lambda t}]).$$

Die Simulation des Experiments mit Münzen wird mit dem folgenden Matlab Code durchgeführt.

```

h1 = figure(1); close(h1); h1 = figure(1);
set(h1,'Position',[10 50 1000 500]);

la = 1;
p = -log(linspace(0.25,0.75,3))/log(2);
tv = log(2.^p)/la;
for t=tv
    c = (t-tv(1))/(tv(end)-tv(1));
    sv = [];
    nv = [];
    mu = 1-exp(-la*t);
    n1 = round(150*erfinv(0.9)^2/(exp(la*t)-1));
    ns = ceil(200*erfinv(0.9)^2/(exp(la*t)-1));
    n2 = round(250*erfinv(0.9)^2/(exp(la*t)-1));

```

```

for n=n1:n2
    p = binopdf(0:n,n,mu);
    m1 = ceil(0.9*mu*n);
    m2 = floor(1.1*mu*n);
    sv = [sv,sum(p(m1:m2))];
    nv = [nv,n];
end
l = find(sv < 0.9,1,'last');
nt = nv(l+1);
disp(sprintf('estimate n= %0.0f, threshold n = %0.0f',ns,nt));

mu = 1-exp(-la*t); % mean, prob of decay

imax = 100; % imax = number of experiments
i2 = sqrt(imax);
yv = []; % store for plot
nv = [];
sv = [];
for n=10:10:(2*nt) % n = number of subjects
    y = zeros(1,imax);
    for i=1:imax
        u = rand(1,n); % uniformly distributed
        y(i) = mean(u<mu); % mean number with u<mu
    end
    yv = [yv,mean(y)]; % store for plotting
    sv = [sv,std(y)];
    nv = [nv,n];
    subplot(1,2,1) % plot results for current n
    histogram(y,30)
    axis([0 1 0 1.3*i2])
    set(gca,'XTick',[0,mu,1])
    text(0.6,0.8*i2,sprintf('mean=%0.1e\ntsd=%0.1e',mean(y),std(y)))
    xlabel('Schätzungen')
    ylabel('Anzahl')
    title(sprintf('Histogramm des Experiments, n=%0.0f',n))
    subplot(1,2,2)
    plot(nv,yv,'b',...
        nv,yv+1.645*sv,'b-.',...
        nv,yv-1.645*sv,'b-.',...
        nv,mu*ones(size(nv)), 'r:',...
        nv,0.9*mu*ones(size(nv)), 'r:',...
        nv,1.1*mu*ones(size(nv)), 'r:',...
        [nt,nt],[0.9*mu,1.1*mu], 'r:')
    xlabel('n')
    ylabel('E[Y^(n)/n]')
    axis([0 2.5*nt 0 1])
    title('Schwerpunkt des Histogramms')
    drawnow;

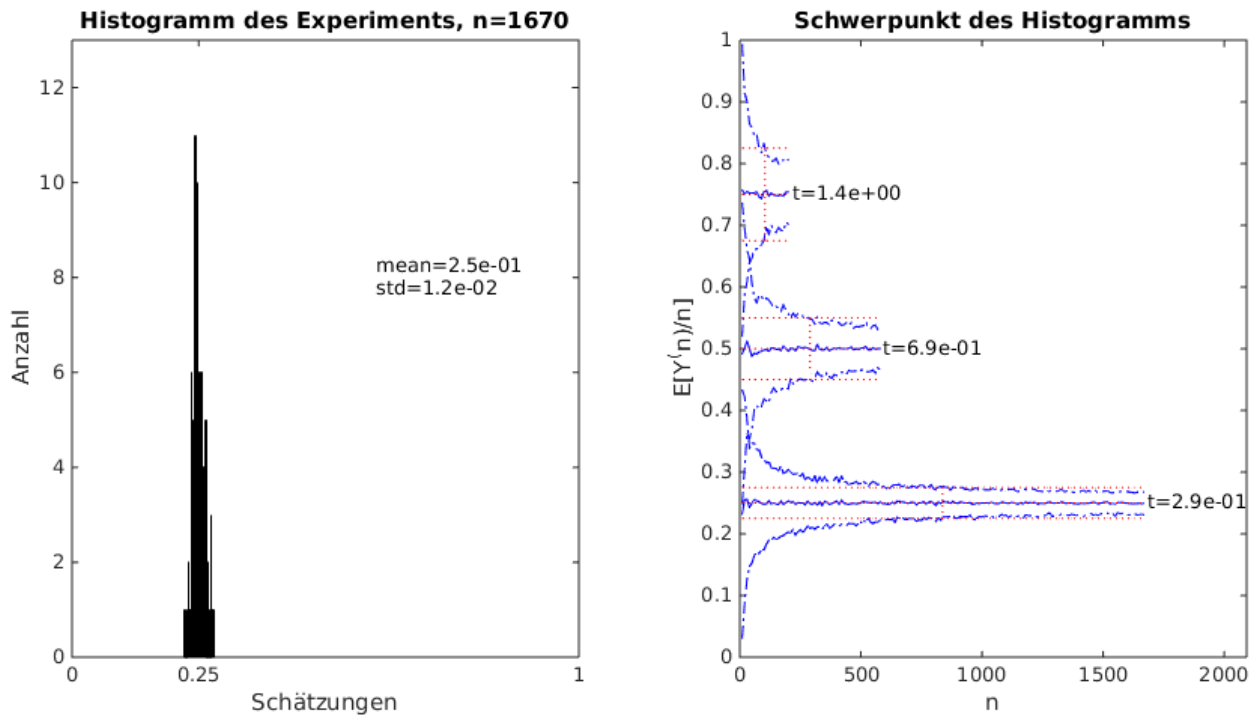
```

```

        if (t == tv(1))
            hold on;
        end
    end
    text(2*nt+10,mu,sprintf('t=%0.1e',t))
end
hold off;

```

Die Ergebnisse werden folgendermaßen grafisch dargestellt. Die senkrechte rot geschricelte Gerade liegt bei dem Schwellenwert der Anzahl der Probanden  $n = 104, 290, 837$  aus Teil (a) für  $\lambda = 1$  und Zeiten  $t$  mit  $\mu(t) = 1 - e^{-\lambda t} = \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}$ . Die waagerechten rot geschricelten Geraden liegen bei  $\{0.9\mu(t), \mu(t), 1.1\mu(t)\}$ . Die blau voll gezogene Kurve ist der Mittelwert der Stichproben für verschiedene Werte von  $n$ . Basierend auf der Eigenschaft  $P(|Z| \leq 1.645) \approx 0.9$ , liegen die strichpunktierten Kurven bei dem Mittelwert der Stichproben plus/minus das Vielfache 1.645 vom Standardabweichung der Stichproben. Ab den Schwellenwerten  $n = 104, 290$  bzw.  $837$  liegen die blauen Kurven innerhalb des roten Korridors, und daher stimmen diese Ergebnisse mit den Abschätzungen aus Teil (a) überein.



## • Beispiel 5: Radioaktivität Ergänzt

### ◦ Aufgabe

Der radioaktive Zerfall von ganz vielen Teilchen wird durch die folgenden Prozesse modelliert. In jedem Kontext sei  $p_k(t)$  die Wahrscheinlichkeit, dass  $k$  Teilchen im Zeitintervall  $[0, t]$  zerfallen.

- (a) Homogener Poisson-Prozess: Es seien praktisch unendlich viele nicht zerfallene Teilchen zur Zeit  $t = 0$  gegeben. Die durchschnittliche Zerfallsrate sei von der Zeit  $t > 0$  unabhängig, und zwar

mit  $p_0(t) = e^{-\lambda t}$  für eine Konstante  $\lambda > 0$ . Zeigen Sie, es gelten

$$p'_k(t) = -\lambda p_k(t) + \lambda p_{k-1}(t), \quad p_k(0) = 0, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Für ein großes  $n$  lösen Sie das durch  $k \leq n$  abgebrochene System mit Matlab. Stellen Sie den dynamischen Erwartungswert  $\sum_{k=0}^n k p_k(t)$  grafisch dar.

- (b) Inhomogener Poisson-Prozess: Es seien praktisch unendlich viele nicht zerfallene Teilchen zur Zeit  $t = 0$  gegeben. Die durchschnittliche Zerfallsrate sei von der Zeit  $t > 0$  abhängig, und zwar mit  $p_0(t) = e^{-\lambda(t)}$  für eine Funktion  $\lambda(t) = \nu \mu e^{-\mu t}$  mit  $\mu, \nu > 0$ . Zeigen Sie, es gelten

$$p'_k(t) = -\lambda(t)p_k(t) + \lambda(t)p_{k-1}(t), \quad p_k(0) = 0, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Für ein großes  $n$  lösen Sie das durch  $k \leq n$  abgebrochene System mit Matlab. Stellen Sie den dynamischen Erwartungswert  $\sum_{k=0}^n k p_k(t)$  grafisch dar.

- (c) Bernoulli-Prozess: Es seien  $n$  nicht zerfallene Teilchen zur Zeit  $t = 0$  gegeben. Der Zerfall eines Teilchens wird wie das Ergebnis eines Münzspiels betrachtet, und zwar mit  $p_0(t) = e^{-n\lambda t}$  für eine Konstante  $\lambda > 0$ . Zeigen Sie, es gelten

$$p'_k(t) = -\lambda(n-k)p_k(t) + \lambda(n-k+1)p_{k-1}(t), \quad p_k(0) = 0, \quad k = 1, \dots, n.$$

Lösen Sie dieses System mit Matlab. Stellen Sie den dynamischen Erwartungswert  $\sum_{k=0}^n k p_k(t)$  grafisch dar.

## ○ Lösung

Ein Kernprinzip des radioaktiven Zerfalls ist, dass radioaktive Teilchen kein Gedächtnis haben. Beobachtungen zeigen, die Wahrscheinlichkeit, dass ein Teilchen in einem bevorstehenden Zeitintervall zerfällt, ist unabhängig davon, wie lange es bis zum Beginn dieses Zeitintervalls ohne zu zerfallen überlebt hat. Beobachtungen zeigen natürlich auch, dass auf Zeitskalen vergleichbar mit der Halbwertszeit die Anzahl der nicht zerfallenen Teilchen exponentiell abnimmt. Hier werden drei Ansätze zur Modellierung des radioaktiven Zerfalls betrachtet.

Der erste und am weitesten verbreitete Ansatz besteht darin, den radioaktiven Zerfall als ein homogener Poisson-Prozess zu betrachten, bei dem Zerfallsereignisse zumindest in kurzer Zeit so selten sind, dass anstatt der Sichtweise dass Teilchen nebeneinander im Raum zerfallen, gibt es genauso gut die Sichtweise dass diese hintereinander in Zeit zerfallen, und zwar mit der gleichen Wartezeit zwischen Zerfallsereignissen, da sie kein Gedächtnis haben und voneinander unabhängig sind. Der Nachteil dieses Ansatzes ist, dass die damit vorausgesagte Anzahl der nicht zerfallenen Teilchen nimmt nicht exponentiell ab, sondern nur linear entlang einer Tangente am Anfang der beobachteten Exponentialkurve!

Der zweite und nicht so weit verbreitete Ansatz besteht darin, den radioaktiven Zerfall als ein nicht homogener Poisson-Prozess zu betrachten, bei dem die über längere Zeitskalen beobachtete Exponentialkurve durch immer mehr tangentielle Geraden mit jeweils unterschiedlicher Steigung angenähert wird, wobei die sich ändernden Steigungen dem entsprechen, dass die Teilchen die Nähe voneinander *spüren*. Auf diese Weise sind sie voneinander nicht mehr unabhängig, und es besteht ein größerer Anreiz zu zerfallen für sie, wenn mehr Teilchen vorhanden sind. Abgesehen von der eher ad-hoc-Natur dieses Ansatzes liegt hier auch zwei Probleme zugrunde. Erstens geht die Eigenschaft der Gedächtnislosigkeit auf längere Zeitskalen verloren. Zweitens wird für die Entwicklung angenommen, dass es unendlich viele Teilchen gibt, also wird die Vorstellung ziemlich rätselhaft, dass die Hälfte bis zur Halbwertszeit zerfallen.



Der dritte und anscheinend natürlichste Ansatz besteht darin, den radioaktiven Zerfall als ein Bernoulli-Prozess zu betrachten, als ob viele Münzen zufällig, unabhängig und ohne Gedächtnis geworfen werden würden. Dann ist der Zerfall von genau einem Teilchen wahrscheinlicher, wenn es mehr Teilchen gibt, einfach weil es ein beliebiges Teilchen aus vielen sein könnte. Es wird hier gesehen, dass dieser Ansatz die Vorteile hat, die Eigenschaft der Gedächtnislosigkeit zu bewahren, die Unabhängigkeit der Zerfallereignissen zu gewährleisten und den exponentiellen Zerfall der erwarteten Anzahl von nicht zerfallenen Teilchen auf Zeitskalen der Größenordnung der Halbwertszeit widerzuspiegeln.

### \* Teil (a) Homogener Poisson-Prozess

Ein homogener Poisson-Prozess ist ein Prozess, bei dem die langfristige durchschnittliche Ereignisrate konstant ist. Sei  $T$  eine Zufallsvariable, die die Wartezeit zwischen den Ereignissen darstellt. Sie erfüllt

$$P(T > t + s \mid T > s) = P(T > t).$$

Diese Eigenschaft bedeutet, falls  $(T > s)$  gelten sollte, d.h. kein Ereignis tritt während einer Wartezeit  $s$  auf, dann die bedingte Wahrscheinlichkeit  $P(T > t + s \mid T > s)$ , dass kein Ereignis innerhalb der kommenden Zeit  $t$  eintritt, ist die gleiche wie  $P(T > t)$ , als ob es keine Wartezeit  $s$  gegeben hätte. Infolge der Eigenschaft der Gedächtnislosigkeit wird gezeigt, dass die Wartezeit  $T$  notwendigerweise exponentiell verteilt ist,  $P(T > t) = e^{-\lambda t}$ .

Da  $T > s$  aus  $T > t + s$  folgt, ergibt sich mit der Bayeschen Regel,

$$P(T > t + s \mid T > s) = \frac{P(T > t + s \ \& \ T > s)}{P(T > s)} = \frac{P(T > t + s)}{P(T > s)}.$$

Nach der Eigenschaft der Gedächtnislosigkeit ist die linke Seite  $P(T > t)$ , und es ergibt sich

$$P(T > t + s) = P(T > t)P(T > s).$$

Mit der Überlebensfunktion  $S(t) = P(T > t)$  nimmt Eigenschaft der Gedächtnislosigkeit die Form

$$S(t + s) = S(t)S(s).$$

Mit

$$S(0) = P(T > 0) = 1$$

ergibt sich als Konsequenz der Eigenschaft der Gedächtnislosigkeit,

$$\frac{S(t + dt) - S(t)}{dt} = \frac{S(t)S(dt) - S(t)S(0)}{dt} = S(t) \frac{S(dt) - S(0)}{dt}.$$

Mit

$$\lambda = -\frac{S'(0)}{S(0)} = -S'(0)$$

und  $dt \rightarrow 0$  ergibt sich

$$S'(t) = -\lambda S(t), \quad S(0) = 1.$$

Die Lösung dieses Anfangswertproblems zeigt, dass die Zufallsvariable  $T$  die exponentielle Verteilung hat,

$$S(t) = P(T > t) = e^{-\lambda t}.$$

Die Wahrscheinlichkeitsdichte  $f(t)$  ist gegeben durch

$$P(T > t) = \int_t^\infty f(t)dt \quad \text{or} \quad f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$$

und daher,

$$P(T \in [t_1, t_2]) = e^{-\lambda t}|_{t_1}^{t_2} = e^{\lambda t_1} - e^{\lambda t_2}.$$

Weiters mit der Bayeschen Regel,

$$\begin{aligned} P(T \in [t_1, t_2] \mid T > t_1) &= \frac{P(T \in [t_1, t_2] \& T > t_1)}{P(T > t_1)} = \frac{P(T \in [t_1, t_2])}{P(T > t_1)} \\ &= 1 - e^{-\lambda(t_2 - t_1)} = P(T < (t_2 - t_1)). \end{aligned}$$

Nun sei  $N(\tau)$  Zufallsvariable für die Anzahl der Ereignisse eines homogenen Poisson-Prozesses mit Ereignisrate  $\lambda$ , die innerhalb eines Zeitintervalls der Länge  $\tau$  eintreten. Die Wahrscheinlichkeitsverteilung von  $N(\tau)$  wird gegeben durch die Bestimmung von  $p_k(\tau) = P(N(\tau) = k)$ ,  $k \in \mathbb{N}_0$ . Damit es  $k$  Ereignisse innerhalb des Zeitintervalls  $[0, \tau]$  gibt, müssen die folgenden Bedingungen eintreten:

- Es gibt  $k - 1$  Ereignisse in einem Zeitintervall  $[0, s]$ ,  $s \in (0, \tau)$ , und zwar mit der Wahrscheinlichkeit

$$P(N(s) = k - 1) = p_{k-1}(s)$$

- Es gibt 1 Ereignis in einem Zeitintervall  $[s, s + ds]$  und zwar mit der Wahrscheinlichkeit

$$\begin{aligned} P(N(s + ds) = k \mid N(s) = k - 1) &= P(T \in [s, s + ds] \mid T > s) = \\ &= 1 - e^{-\lambda ds} = \lambda ds + o(ds) \end{aligned}$$

und

- Es gibt keine Ereignisse in einem Zeitintervall  $[s + ds, \tau]$  und zwar mit Wahrscheinlichkeit

$$\begin{aligned} P(N(\tau) = k \mid N(s + ds) = k) &= P(T > \tau \mid T > s + ds) \\ &= \frac{P(T > \tau)}{P(T > s + ds)} = P(T > (\tau - s - ds)) = e^{-\lambda(\tau - s)} + o(ds). \end{aligned}$$

Da diese Bedingungen unabhängig sind, ist die Wahrscheinlichkeit aller drei durch das Produkt der jeweiligen Wahrscheinlichkeiten gegeben, und zwar integriert über alle möglichen Zwischenzeiten  $s$ ,

$$p_k(\tau) = \int_0^\tau p_{k-1}(s)(\lambda ds)e^{-\lambda(\tau-s)} = e^{-\lambda\tau} \int_0^\tau p_{k-1}(s)\lambda e^{\lambda s} ds, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Nach dem Ableiten,

$$p'_k(\tau) = -\lambda e^{-\lambda\tau} \int_0^\tau p_{k-1}(s)\lambda e^{\lambda s} ds + e^{-\lambda\tau} \lambda p_{k-1}(\tau) e^{+\lambda\tau} \lambda$$

oder

$$p'_k(\tau) = -\lambda p_k(\tau) + \lambda p_{k-1}(\tau), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Für den Fall  $k = 0$ ,

$$p_0(\tau) = P(N(\tau) = 0 \text{ in } [0, \tau]) = P(T > \tau) = e^{-\lambda\tau}, \quad \text{or} \quad p'_0(\tau) = -\lambda p_0(\tau).$$

Da keine Ereignisse in keiner Zeit eintreten können, gilt für  $\tau = 0$ ,

$$p_0(0) = 1, \quad p_k(0) = 0, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Die Lösung dieses Systems ist

$$P(N(\tau) = k) = p_k(\tau) = \frac{(\lambda\tau)^k}{k!} e^{-\lambda\tau}, \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

Die erwartete Anzahl  $n(\tau) = \mathbb{E}[N(\tau)]$  der Ereignisse eines homogenen Poisson-Prozesses mit Ereignisrate  $\lambda$ , die in einem Zeitintervall der Länge  $\tau$  eintreten, ist gegeben durch:

$$\begin{aligned} n(\tau) &= \sum_{k=0}^{\infty} k P(N(\tau) = k) = \sum_{k=1}^{\infty} k p_k(\tau) = \int_0^{\tau} \sum_{k=1}^{\infty} k p_{k-1}(s) \lambda e^{-\lambda(\tau-s)} ds \\ &= \int_0^{\tau} \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} (k-1) p_{k-1}(s)}_{=n(s)} \lambda e^{-\lambda(\tau-s)} ds + \int_0^{\tau} \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} p_{k-1}(s)}_{=1} \lambda e^{-\lambda(\tau-s)} ds \end{aligned}$$

oder

$$n(\tau) = e^{-\lambda\tau} \left\{ \int_0^{\tau} n(s) \lambda e^{\lambda s} ds + \int_0^{\tau} \lambda e^{\lambda s} ds \right\}.$$

Nach dem Ableiten,

$$n'(\tau) = -\lambda e^{-\lambda\tau} \left\{ \int_0^{\tau} n(s) \lambda e^{\lambda s} ds + \int_0^{\tau} \lambda e^{\lambda s} ds \right\} + e^{-\lambda\tau} \left\{ n(\tau) \lambda e^{\lambda\tau} + \lambda e^{\lambda\tau} \right\}$$

oder

$$n'(\tau) = -\lambda n(\tau) + \lambda n(\tau) + \lambda, \quad n(0) = 0.$$

Die Lösung ist

$$n(\tau) = \lambda\tau.$$

Bemerkenswert ist, dass diese Eigenschaft des linearen Wachstums nur adequat ist, wenn  $\tau$  sehr klein ist, z.B. gegenüber der Halbwertszeit  $\ln(2)/\lambda$  der radioactiven Substanz. Das erwartete Wachstumsmuster ist der Form  $1 - e^{-\mu\tau}$ , wobei  $e^{-\mu\tau}$  der Bruchteil der Substanz ist, der bis zur Zeit  $\tau$  nicht zerfallen ist.

#### \* Teil (b) Nicht Homogener Poisson-Prozess

Um ein exponentielles Zerfallsmuster zu erhalten, wird ein inhomogener Poisson-Prozess überlegt, bei dem sich die durchschnittliche Ereignisrate mit der Zeit ändert. Zu diesem Zweck bezeichnet  $T$  nun die Zufallsvariable, die die Wartezeit von  $t = 0$  bis zum Auftreten eines Zerfallereignisses darstellt. Man nimmt an, die Überlebensfunktion  $S(t) = P(T > t)$  erfüllt

$$\lambda(t) = -\frac{S'(t)}{S(t)} = -\frac{d}{dt} \ln(S(t))$$

für eine Zeit-abhängige Ereignisrate  $\lambda(t)$ . Für  $t_2 > t_1 \geq 0$ ,

$$\ln \left( \frac{S(t_2)}{S(t_1)} \right) = \ln(S(t_2)) - \ln(S(t_1)) = - \int_{t_1}^{t_2} \lambda(t) dt$$

oder

$$S(t_2) = S(t_1) \exp \left[ - \int_{t_1}^{t_2} \lambda(t) dt \right].$$

Mit  $t_2 = t > 0$ ,  $t_1 = 0$  und  $S(0) = 1$ ,

$$S(t) = \exp \left[ - \int_0^t \lambda(t) dt \right].$$

Da es gelten

$$S(t_2 - t_1) = \exp \left[ - \int_0^{t_2 - t_1} \lambda(t) dt \right] \neq \exp \left[ - \int_{t_1}^{t_2} \lambda(t) dt \right] = S(t_2)/S(t_1)$$

ist die Eigenschaft der Gedächtnislosigkeit nicht erfüllt! Die Wahrscheinlichkeitsdichte  $f(t)$  für  $T$  ist gegeben durch

$$P(T > t) = \int_t^\infty f(t) dt \quad \text{or} \quad f(t) = \lambda(t) \exp \left[ - \int_0^t \lambda(s) ds \right].$$

und daher

$$\begin{aligned} P(T \in [t_1, t_2]) &= \int_{t_1}^{t_2} \lambda(t) \exp \left[ - \int_0^t \lambda(s) ds \right] ds = - \exp \left[ - \int_0^t \lambda(s) ds \right] \Big|_{t_1}^{t_2} \\ &= \exp \left[ - \int_0^{t_1} \lambda(s) ds \right] \left\{ 1 - \exp \left[ - \int_{t_1}^{t_2} \lambda(s) ds \right] \right\}. \end{aligned}$$

Weiters mit der Bayeschen Regel,

$$\begin{aligned} P(T \in [t_1, t_2] \mid T > t_1) &= \frac{P(T \in [t_1, t_2] \ \& \ T > t_1)}{P(T > t_1)} = \frac{P(T \in [t_1, t_2])}{P(T > t_1)} \\ &= 1 - \exp \left[ - \int_{t_1}^{t_2} \lambda(s) ds \right]. \end{aligned}$$

Nun sei  $N(\tau)$  Zufallsvariable für die Anzahl der Ereignisse eines nicht homogenen Poisson-Prozesses mit Ereignisrate  $\lambda(t)$ , die innerhalb eines Zeitintervalls der Länge  $\tau$  eintreten. Die Wahrscheinlichkeitsverteilung von  $N(\tau)$  wird gegeben durch die Bestimmung von  $p_k(\tau) = P(N(\tau) = k)$ ,  $k \in \mathbb{N}_0$ . Damit es  $k$  Ereignisse innerhalb des Zeitintervalls  $[0, \tau]$  gibt, müssen die folgenden Bedingungen eintreten:

- Es gibt  $k - 1$  Ereignisse in einem Zeitintervall  $[0, s]$ ,  $s \in (0, \tau)$ , und zwar mit der Wahrscheinlichkeit

$$P(N(s) = k - 1) = p_{k-1}(s)$$

- Es gibt 1 Ereignis in einem Zeitintervall  $[s, s + ds]$  und zwar mit der Wahrscheinlichkeit

$$\begin{aligned} P(N(s + ds) = k \mid N(s) = k - 1) &= P(T \in [s, s + ds] \mid T > s) \\ &= 1 - \exp \left[ - \int_s^{s+ds} \lambda(r) dr \right] = \lambda(s) ds + o(ds) \end{aligned}$$

und

- Es gibt keine Ereignisse in einem Zeitintervall  $[s + ds, \tau]$  und zwar mit Wahrscheinlichkeit

$$\begin{aligned} P(N(\tau) = k \mid N(s + ds) = k) &= P(T > \tau \mid T > s + ds) = \frac{P(T > \tau)}{P(T > s + ds)} \\ &= \exp \left[ - \int_0^\tau \lambda(r) dr \right] / \exp \left[ - \int_0^{s+ds} \lambda(r) dr \right] = \exp \left[ - \int_s^\tau \lambda(r) dr \right] + o(ds). \end{aligned}$$

Da diese Bedingungen unabhängig sind, ist die Wahrscheinlichkeit aller drei durch das Produkt der jeweiligen Wahrscheinlichkeiten gegeben, und zwar integriert über alle möglichen Zwischenzeiten  $s$ ,

$$\begin{aligned} p_k(\tau) &= \int_0^\tau p_{k-1}(s)(\lambda(s)ds) \exp \left[ - \int_s^\tau \lambda(r)dr \right] \\ &= \exp \left[ - \int_0^\tau \lambda(r)dr \right] \int_0^\tau p_{k-1}(s)\lambda(s) \exp \left[ \int_0^s \lambda(r)dr \right] ds, \quad k \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

After differentiating,

$$\begin{aligned} p'_k(\tau) &= -\lambda(\tau) \exp \left[ - \int_0^\tau \lambda(r)dr \right] \int_0^\tau p_{k-1}(s)\lambda(s) \exp \left[ \int_0^s \lambda(r)dr \right] \\ &\quad + \exp \left[ - \int_0^\tau \lambda(r)dr \right] p_{k-1}(\tau)\lambda(\tau) \exp \left[ \int_0^\tau \lambda(r)dr \right] \end{aligned}$$

oder

$$p'_k(\tau) = -\lambda(\tau)p_k(\tau) + \lambda(\tau)p_{k-1}(\tau), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Für den Fall  $k = 0$ ,

$$p_0(\tau) = P(N(\tau) = 0 \text{ in } [0, \tau]) = P(T > \tau) = \exp \left[ - \int_0^\tau \lambda(s)ds \right], \quad \text{or} \quad p'_0(\tau) = -\lambda(\tau)p_0(\tau).$$

Da keine Ereignisse in keiner Zeit eintreten können, gilt für  $\tau = 0$ ,

$$p_0(0) = 1, \quad p_k(0) = 0, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Die Lösung dieses Systems ist

$$\begin{aligned} P(N(\tau) = k) = p_k(\tau) &= \exp \left[ - \int_0^\tau \lambda(s)ds \right] \times \\ &\quad \left\{ \int_0^\tau ds_1 \lambda(s_1) \int_0^{s_1} ds_2 \lambda(s_2) \cdots \int_0^{s_{k-1}} ds_k \lambda(s_k) \right\}, \quad k \in \mathbb{N}_0. \end{aligned}$$

Die erwartete Anzahl  $n(\tau) = \mathbb{E}[N(\tau)]$  der Ereignisse eines nicht homogenen Poisson-Prozesses mit Ereignisrate  $\lambda(t)$ , die in einem Zeitintervall der Länge  $\tau$  eintreten, ist gegeben durch:

$$\begin{aligned} n(\tau) &= \sum_{k=0}^{\infty} k P(N(\tau) = k) = \sum_{k=1}^{\infty} k p_k(\tau) = \int_0^\tau \sum_{k=1}^{\infty} k p_{k-1}(s) \lambda(s) \exp \left[ - \int_s^\tau \lambda(r)dr \right] ds \\ &= \underbrace{\int_0^\tau \sum_{k=1}^{\infty} (k-1) p_{k-1}(s) \lambda(s) \exp \left[ - \int_s^\tau \lambda(r)dr \right] ds}_{=n(s)} + \underbrace{\int_0^\tau \sum_{k=1}^{\infty} p_{k-1}(s) \lambda(s) \exp \left[ - \int_s^\tau \lambda(r)dr \right] ds}_{=1} \end{aligned}$$

oder

$$n(\tau) = \exp \left[ - \int_0^\tau \lambda(r)dr \right] \left\{ \int_0^\tau n(s) \lambda(s) \exp \left[ \int_0^s \lambda(r)dr \right] ds + \int_0^\tau \lambda(s) \exp \left[ \int_0^s \lambda(r)dr \right] ds \right\}.$$

Nach dem Ableiten,

$$\begin{aligned} n'(\tau) &= -\lambda(\tau) \exp \left[ - \int_0^\tau \lambda(r)dr \right] \left\{ \int_0^\tau n(s) \lambda(s) \exp \left[ \int_0^s \lambda(r)dr \right] ds + \int_0^\tau \lambda(s) \exp \left[ \int_0^s \lambda(r)dr \right] ds \right\} \\ &\quad + \exp \left[ - \int_0^\tau \lambda(r)dr \right] \left\{ n(\tau) \lambda(\tau) \exp \left[ \int_0^\tau \lambda(r)dr \right] + \lambda(\tau) \exp \left[ \int_0^\tau \lambda(r)dr \right] \right\} \end{aligned}$$

oder

$$n'(\tau) = -\lambda(\tau)n(\tau) + \lambda(\tau)n(\tau) + \lambda(\tau), \quad n(0) = 0.$$

Die Lösung ist

$$n(\tau) = \int_0^\tau \lambda(s) ds.$$

Die erwartete Form für die nicht homogenen Poisson-Prozess ist

$$1 - e^{-\mu\tau} = n(\tau)/n(\infty) = \int_0^\tau \lambda(s) ds / \int_0^\infty \lambda(s) ds.$$

Nach dem Ableiten,

$$\mu e^{-\mu\tau} = \lambda(\tau) / \int_0^\infty \lambda(s) ds$$

oder

$$\lambda(t) = \nu \mu e^{-\mu t}, \quad \nu = \int_0^\infty \lambda(s) ds = n(\infty).$$

Daher kann  $\nu$  als die gesamte Anzahl der zu zerfallenden Teilchen interpretiert werden. Jedoch beinhaltet ein Poisson-Prozess unendlich viele Teilchen,

$$P(N(\tau) = k) > 0, \quad \forall \tau > 0, \quad \forall k \in \mathbb{N}_0.$$

#### \* Teil (c) Bernoulli-Prozess

Es erscheint dann natürlicher, den radioaktiven Zerfall als Bernoulli-Prozess zu modellieren. Basierend auf den obigen Diskussionen der Überlebensfunktion sei  $X(t) : [0, \infty) \rightarrow \{0, 1\}$  eine Zufallsvariable, die den Zerfall eines einzelnen radioaktiven Teilchens darstellt, wobei

$$X(t) = \begin{cases} 1, & \text{decay in } [0, t] \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

und

$$P(X(t) = 0) = e^{-\lambda t}, \quad P(X(t) = 1) = 1 - e^{-\lambda t}, \quad t \geq 0.$$

Dann die bedingte Wahrscheinlichkeit  $P(X(s+t) = 0 \mid X(s) = 0)$  erfüllt

$$\begin{aligned} P(X(s+t) = 0 \mid X(s) = 0) &= \frac{P(X(s+t) = 0 \ \& \ X(s) = 0)}{P(X(s) = 0)} = \frac{P(X(s+t) = 0)}{P(X(s) = 0)} \\ &= \frac{e^{-\lambda(s+t)}}{e^{-\lambda s}} = e^{-\lambda t} = P(X(t) = 0). \end{aligned}$$

Daher erfüllt ein einziges Teilchen die Eigenschaft der Gedächtnislosigkeit. Nun sei  $X_k(t)$  eine Zufallsvariable, die den Zerfall des  $k$ -ten Teilchens darstellt,  $k = 1, \dots, n$ . Angenommen, alle Zufallsvariablen  $X_k$  sind unabhängig und identisch verteilt mit derselben Verteilung wie  $X(t)$ . Sei

$$N(t) = \sum_{k=1}^n X_k(t)$$

eine Zufallsvariable, die die Anzahl der Teilchen bezeichnet, die in einem Zeitintervall  $[0, t]$  zerfallen. Wie es für einen Bernoulli-Prozess wohl bekannt ist, hat  $N(t)$  die Binomial Verteilung,

$$P(N(t) = k) = \binom{n}{k} (1 - e^{-\lambda t})^k (e^{-\lambda t})^{n-k}, \quad t \geq 0$$

den Erwartungswert

$$\mathbb{E}[N(t)] = n(1 - e^{-\lambda t})$$

und die Varianz

$$\mathbb{V}[N(t)] = ne^{-\lambda t}(1 - e^{-\lambda t}).$$

Bemerkenswert ist, dass der Erwartungswert  $\mathbb{E}[N(t)] = n(1 - e^{-\lambda t})$  der Beobachtung des exponentiellen Zerfalls für radioaktiven Substanzen richtig entspricht.

Um mit Poisson-Prozessen zu vergleichen, seien

$$p_k(t) = P(N(t) = k) = \binom{n}{k} (1 - e^{-\lambda t})^k (e^{-\lambda t})^{n-k}, \quad t \geq 0$$

für welche ein System von Differentialgleichungen folgendermaßen konstruiert wird. Für  $k = 0$ ,

$$p_0(t) = e^{-\lambda nt}, \quad p'_0(t) = -\lambda ne^{-\lambda nt} = -\lambda np_0(t).$$

Für  $k = n$ ,

$$p_n(t) = (1 - e^{-\lambda t})^n, \quad p'_n(t) = n(1 - e^{-\lambda t})^{n-1} (+\lambda e^{-\lambda t}) = \lambda p_{n-1}(t)$$

wobei

$$p_{n-1}(t) = \binom{n}{n-1} (1 - e^{-\lambda t})^{n-1} (e^{-\lambda t})^{n-(n-1)} = n(1 - e^{-\lambda t})^{n-1} (e^{-\lambda t}).$$

Für  $k = 1, \dots, n-1$ ,

$$\begin{aligned} p'_k(t) &= \binom{n}{k} \left[ k(1 - e^{-\lambda t})^{k-1} (+\lambda e^{-\lambda t}) (e^{-\lambda t})^{n-k} + (n-k)(e^{-\lambda t})^{n-k-1} (-\lambda e^{-\lambda t}) (1 - e^{-\lambda t})^k \right] \\ &= \binom{n}{k} \left[ \lambda(n-k+1) \frac{k}{n-k+1} (1 - e^{-\lambda t})^{k-1} (e^{-\lambda t})^{n-k+1} - \lambda(n-k) (1 - e^{-\lambda t})^k (e^{-\lambda t})^{n-k} \right] \end{aligned}$$

und mit

$$\begin{aligned} p_{k-1}(t) &= \binom{n}{k-1} (1 - e^{-\lambda t})^{k-1} (e^{-\lambda t})^{n-k+1} \\ &= \binom{n}{k} \frac{k}{(n-k+1)} (1 - e^{-\lambda t})^{k-1} (e^{-\lambda t})^{n-k+1} \end{aligned}$$

ergibt sich schließlich

$$p'_k(t) = \lambda(n-k+1)p_{k-1}(t) - \lambda(n-k)p_k(t), \quad k = 0, \dots, n.$$

Nachdem dieses System in Integralform geschrieben wird,

$$p_k(t) = \int_0^t p_{k-1}(s) (\lambda(n-k+1)) e^{-\lambda(n-k)(t-s)} ds, \quad k = 1, \dots, n, \quad p_0(t) = e^{-\lambda t}$$

können die folgenden Schlüsse gezogen werden. Damit es  $k$  Ereignisse innerhalb des Zeitintervalls  $[0, \tau]$  gibt, müssen die folgenden Bedingungen eintreten:

- Es gibt  $k-1$  Ereignisse in einem Zeitintervall  $[0, s]$ ,  $s \in (0, \tau)$ , und zwar mit der Wahrscheinlichkeit

$$P(N(s) = k-1) = p_{k-1}(s)$$

- Es gibt 1 Ereignis in einem Zeitintervall  $[s, s + ds]$  und zwar mit der Wahrscheinlichkeit

$$P(N(s + ds) = k \mid N(s) = k - 1) = (n - k + 1)\lambda ds + o(ds)$$

und

- Es gibt keine Ereignisse in einem Zeitintervall  $[s + ds, \tau]$  und zwar mit Wahrscheinlichkeit

$$P(N(t) = k \mid N(s + ds) = k) = e^{-\lambda(n-k)(t-s)} + o(ds).$$

Daher ist die Wahrscheinlichkeit eines Zerfalls in einem Zeitintervall  $[s, s + ds]$  immer höher, je mehr Teilchen vorhanden sind, die zum Zeitpunkt  $s$  noch nicht zerfallen sind. Wenn die Anzahl der Teilchen extrem groß ist und das Zeitintervall  $ds$  extrem klein ist, können die anfänglichen Zerfälle durch einen homogenen Poisson-Prozess angenähert werden.

Diese Prozesse werden mit dem folgenden Matlab Code simuliert.

```
h1 = figure(1); close(h1); h1 = figure(1);
set(h1, 'Position', [10 10 900 600]);

% parameters common to each case
T = 10;
N = 100;

% homogener Poisson-Prozess
la = 1;
D = spdiags(la*ones(N+1,1), -1, N+1, N+1) ...
    - spdiags(la*ones(N+1,1), 0, N+1, N+1);
D(N+1, N+1) = 0;
dp = @(t,p) la*(D*p);
opts = odeset('RelTol', 1.0e-6);
p0 = zeros(N+1,1); p0(1) = 1;
[t,p] = ode45(dp, [0,T], p0, opts);
subplot(2,3,1)
plot(t,p)
xlabel('Zeit');
ylabel(sprintf('p_0,...,p_N, N=%0.0f', N));
title('Poisson, Homogen')
subplot(2,3,4)
plot(t,p*(0:N)')
xlabel('Zeit')
ylabel('E[X]')
title('Erwartungswert')

% nicht homogener Poisson-Prozess
mu = 1;
nu = N;
la = @(t) nu*mu*exp(-mu*t);
D = spdiags(ones(N+1,1), -1, N+1, N+1) ...
```



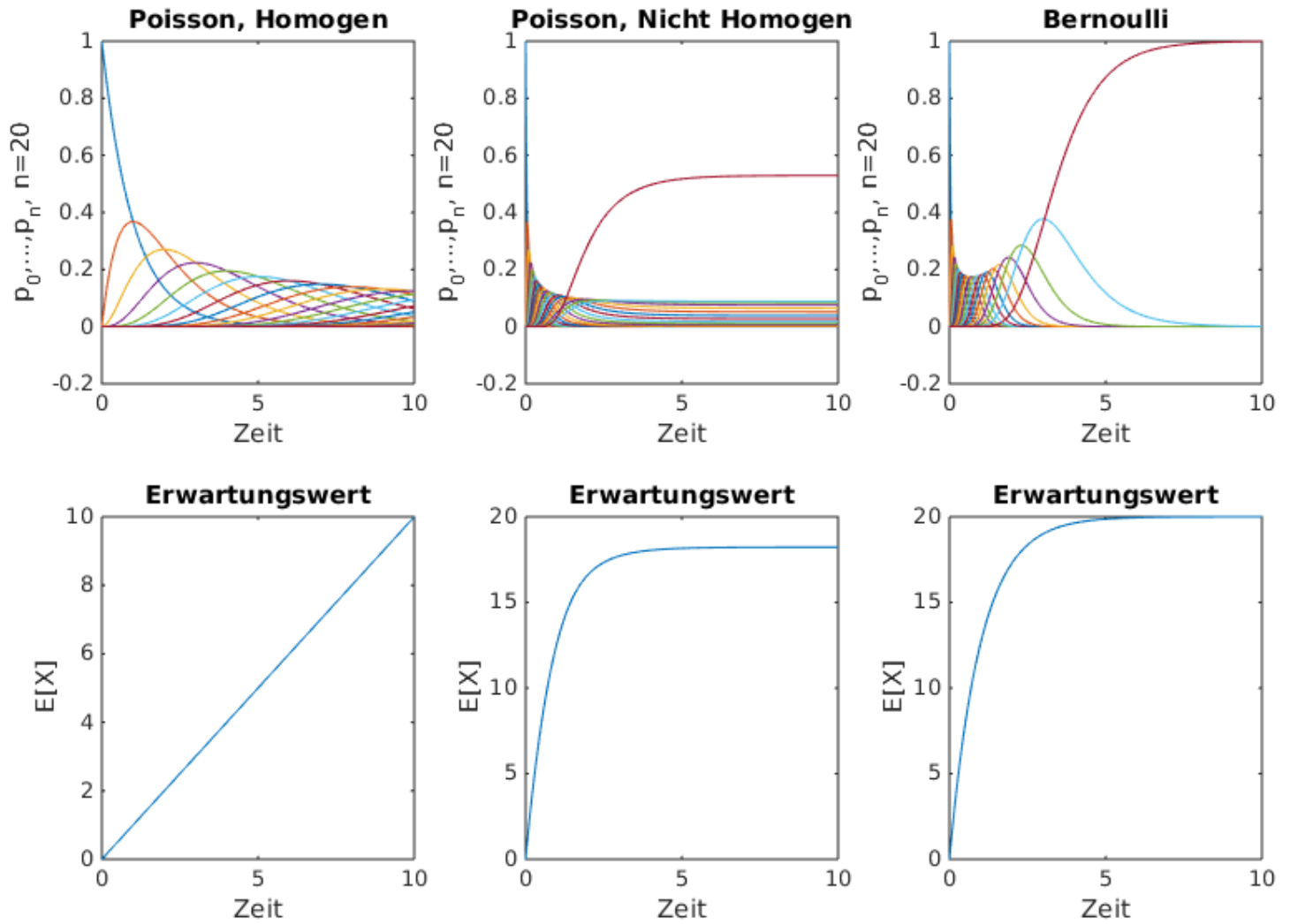
```

        - spdiags(ones(N+1,1), 0,N+1,N+1);
D(N+1,N+1) = 0;
dp      = @(t,p) la(t)*(D*p);
opts    = odeset('RelTol',1.0e-6);
p0      = zeros(N+1,1); p0(1) = 1;
[t,p]   = ode45(dp,[0,T],p0,opts);
subplot(2,3,2)
plot(t,p)
xlabel('Zeit')
ylabel(sprintf('p_0,...,p_N, N=%0.0f',N))
title('Poisson, Nicht Homogen')
subplot(2,3,5)
plot(t,p*(0:N)')
xlabel('Zeit')
ylabel('E[X]')
title('Erwartungswert')

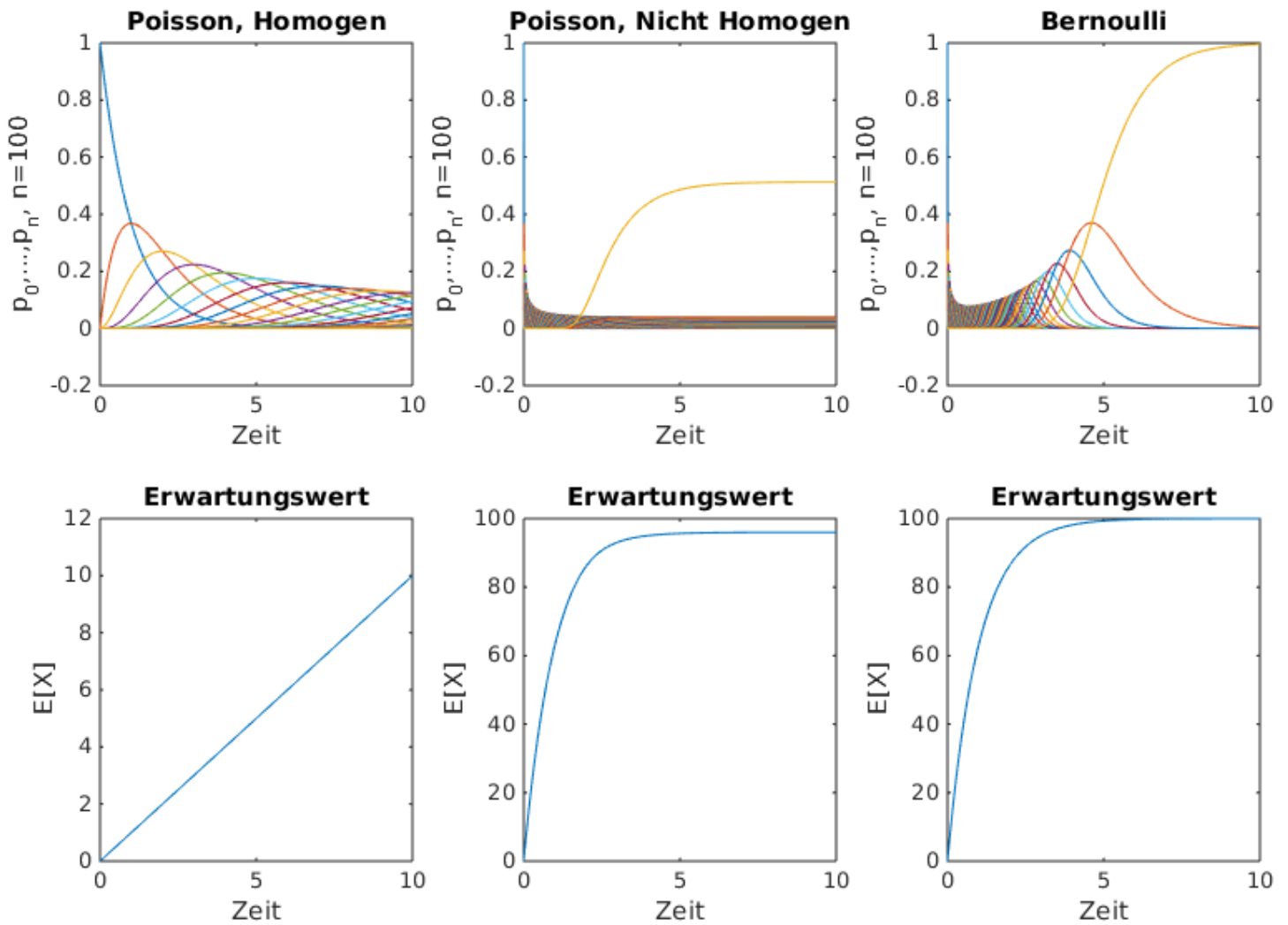
% Bernoulli Prozess
la = 1;
d   = (N:(-1):0)';
D   = spdiags(d,-1,N+1,N+1) ...
      - spdiags(d, 0,N+1,N+1);
dp   = @(t,p) la*(D*p);
opts = odeset('RelTol',1.0e-6);
p0   = zeros(N+1,1); p0(1) = 1;
[t,p] = ode45(dp,[0,T],p0,opts);
subplot(2,3,3)
plot(t,p)
xlabel('Zeit')
ylabel(sprintf('p_0,...,p_N, N=%0.0f',N))
title('Bernoulli')
subplot(2,3,6)
plot(t,p*(0:N)')
xlabel('Zeit')
ylabel('E[X]')
title('Erwartungswert')

```

Die Ergebnisse werden folgendermaßen grafisch dargestellt. Zuerst werden alle drei Systeme mit  $n = 20$  über das Zeitintervall  $[0, 100]$  gelöst,



und dann über das selbe Zeitintervall  $[0, 100]$  aber für  $n = 100$ ,



Für die zwei Werte von  $n = 20, 100$  ist das qualitative Verhalten vergleichbar für den homogenen Poisson-Prozess und für den Bernoulli-Prozess. Jedoch weisen die Ergebnisse für den nicht homogenen Poisson-Prozess darauf hin, dass das Fließgleichgewicht mit  $n$  übereinstimmt, nur wenn  $n$  ganz groß ist!