Mathematische Modellierung
SS20, Übungsblatt 8

Ausarbeitung bis 3. Mai 2020

1. Der Durchfluss in einem Rohr soll bezüglich der Geometrie eines Querschnitts Ω mit einem festgelegten Flächeninhalt maximiert werden.

   (a) Das Profil des Rohrs sei rechteckig. Die Seiten a und b eines Querschnitts erfüllen $0 \leq a, b \leq 2$ und $ab = 1$. Die zwei senkrechten Seiten werden so bearbeitet, dass es keine Reibung für die Flüssigkeit an diesen Seiten gibt. Es gibt die üblichen Reibungseffekte an den waagerechten Seiten. Bestimmen Sie die Durchfluss maximierende Geometrie der Leitung unter diesen Bedingungen.

   (b) Leiten Sie die Bedingung für die Strömungsgeschwindigkeit im Inneren des Gebiets E von dem Navier-Stokes Gleichungssystem her.

   (c) Unter der Bedingung, dass es Reibung für die Flüssigkeit an allen vier Seiten des rechteckigen Rohrs gibt, zeigen Sie dass der Durchfluss bei $a = b$ maximiert wird.

   (d) Sei die Geometrie des Rohrprofils beliebig, außer der Durchschnittsflächeninhalt bei 1 bleiben muss. Weiters gibt es Reibungseffekte entlang des ganzen abgeschlossen Rands. Zeigen Sie durch Rechnungen mit einer Diskretisierung des Problems, dass der Durchfluss bei einem kreisförmigen Profil maximiert wird.

   (e) Sei die Geometrie des Rohrprofils beliebig, außer der Durchschnittsflächeninhalt bei 1 bleiben muss. Weiters gibt es Reibungseffekte entlang des ganzen abgeschlossen Rands. Zeigen Sie theoretisch durch variationelle Rechnungen, dass der Durchfluss bei einem kreisförmigen Profil maximiert wird.

   Gelöst vom Herrn Pichlbauer.

2. Zur Maximierung des langfristigen Profits $P(t) = ph(t) - cu(t)$ einer Fischerei, soll die Zielfunktion

   $$J(u) = \int_0^\infty e^{-\delta t}[ph(t) - cu(t)]dt$$

   mit dem Raubeffekt für die Fische

   $$h(t) = qu(t)x(t), \quad x'(t) = Rx(t)(1 - x(t)/K) - h(t), \quad x(0) = K/N$$

   maximiert werden.

   (a) Bestimmen Sie die optimale Steuerung der folgenden Form,

   $$u(t) = \begin{cases} U_1, & 0 \leq t < s \\ U_2, & s \leq t < \infty \end{cases} \qquad \text{wobei} \quad x(t) = x(s), \quad \forall t > s.$$

   (b) Wiederholen Sie die Aufgabe mit einer bliebigen Anzahl N von Konstanten Zuständen $u(t) = U_i$, $s_{i-1} \leq t < s_i$, $i = 1, \ldots, N$, $U_i \in [0, U_{\max}]$, $U_{\max} = (R/q)(1 - c/(pqK))$, $s_N = \infty$, $x(t) = x(s_{N-1})$, $t > s_{N-1}$, um das diskretisierte optimale Steuerungsproblem allgemein zu lösen.

(c) Zeigen Sie durch variationelle Rechnungen, dass die im Skriptum berichtete Steuerung

$$u(t) = \left\{ \begin{array}{ll} U_1, & t \in [0, s) \\ U_2, & t \in [s, \infty) \end{array} \right. , \quad U_1 = \left\{ \begin{array}{rl} 0, & N > (1 - qU_2/R)^{-1} \\ U_{\max}, & N < (1 - qU_2/R)^{-1} \end{array} \right. ,$$

$$U_2 = \frac{R}{4q} \left[3 - \frac{c}{pqK} + \frac{\delta}{R} - \sqrt{\left(1 + \frac{c}{pqK} - \frac{\delta}{R}\right)^2 + \frac{8\delta}{R}\frac{c}{pqK}} \right],$$

$$s = s(U_1, U_2) = \frac{1}{R\rho(U_1)} \log\left[\frac{(N\rho(U_1) - 1)\rho(U_2)}{\rho(U_1) - \rho(U_2)}\right]$$

tatsächlich die allgemeinen Stationaritätsbedingungen zur eingeschränkten Maximierung des Kostenfunktionals J erfüllt.

Gelöst vom Herrn Ladreiter.

3. Zwei Nachbarn müssen normalerweise einem Wasserversorger €25 pro Tag für den täglichen Verbrauch bezahlen. Um diese Kosten zu reduzieren, möchten sie einen Brunnen teilen. Wenn die Nachbarn nur den fairen Anteil in Anspruch nehmen, reduzieren sie beide ihre Kosten beim Wasserversorger auf €10 pro Tag. Erfahrung zeigt, wegen Wetterbedingungen und der Wirkung auf Grundwasser gibt für einen beliebigen Tag eine 25% Wahrscheinlichkeit, dass der Brunnen nicht verwendet werden kann, und Verwendbarkeit an einem Tag ist unabhängig von Verwendbarkeit an einem anderen Tag.

   (a) Angenommen ist es möglich, dass genau ein Nachbar den ganzen täglichen Bedarf in Anspruch nimmt. Dann erspart er sich alle Kosten beim Wasserversorger, und die üblichen Kosten für den anderen Nachbar werden nicht reduziert. Wenn dies an einem bestimmten Tag passiert, gibt es ab dem nächsten Tag eine tägliche Strafe von der Gemeinde für den überlaufenden Nachbarn in der Höhe von €s. Bestimmen Sie die Strafe s von der Gemeinde, mit der sich eine Kooperation zwischen den Nachbarn auszahlt.

   (b) Eines Tages will die Gemeinde keine Strafe mehr von den Nachbarn kassieren. Sie sorgt dafür, dass der Brunnen immer ausreichend befühlt ist und zuverlässig verwendet werden kann. Zusätzlich wird ein Mechanismus eingerichtet, wobei ein Nachbar den fairen Anteil vom Brunnen bekommt, aber nur wenn der andere Nachbar vor Ort ein Pumpensystem für ihn betätigt. Für seine Mühe bekommt er von dem so begünstigten Nachbar €1 abgebucht. Bestimmen Sie das Gleichgewicht für dieses Spiel, auch wenn es für eine bekannte Anzahl von Tagen wiederholt wird.

   (c) Für das Spiel im Teil (b) sei für die beiden Nachbarn die Anzahl der fortlaufenden Tage unbekannt, an denen das Handeln stattfindet. Die Anzahl wird aber mit einer geometrischen Verteilung abgeschätzt. Bestimmen Sie, ob es sich für die Nachbarn auszahlt, dass sie kooperieren. Entwickeln Sie Strategieen für eine Folge von Tagen, anstatt für einen einzigen beliebigen zufälligen Tag, um den eigenen Gewinn eines Nachbars für eine Tagefolge zu erhöhen.

   (d) Schreiben Sie einen Matlab Code, um das Verhalten dieser zwei Nachbarn zu simulieren. In der Simulation soll der eine Nachbar eine Strategie vom Teil (c) verwenden, und der andere Nachbar soll die sogenannte *tit-for-tat* (Axelrod) Strategie verwenden, wobei man am ersten Tag kooperiert, und nachher verhält man sich, wie der Gegner sich am vorigen Tag verhalten hat.

Gelöst vom Herrn Rotman.

4. Zwei Personen treffen sich in der Wüste und überlegen einen Tausch von zwei Ressourcen x und y, damit ihre Lebenszeiten u_1 und u_2 verlängert werden können. Für die Ressourcen x und y hat die erste Person die Vorräte x_1 und y_1 und die entsprechenden Verbrauchsraten a_1 und b_1, und die zweite Person hat die Vorräte x_2 und y_2 und die entsprechenden Verbrauchsraten a_2 und b_2. Eine Person stirbt genau dann, wenn eine eigene Ressource verbraucht worden ist. Die Ressourcen und die Verbrauchsraten sind: $x_i = y_i = 1$, $a_1 = b_2 = 1$, $a_2 = b_1 = 2$. Finden Sie ein Gleichgewicht bei diesem Tausch. Berechnen Sie den optimalen Tausch bei der Nash Verhandlungsstrategie, wenn das *Status Quo* bei dem Tausch ist: nichts tauschen. Gelöst vom Herrn Hauser.

5. Um ein gemeinsames Reiseziel auszuwählen, verwenden die Personen einer Gruppe das folgende Wahlsystem, das natürlich für andere Entscheidungen verwendet werden kann. Es seien M Reiseziele und N Personen. Seien die Reiseziele mit Eckpunkten $\{\boldsymbol{r}_i\}_{i=1}^M \subset \mathbb{R}^{M-1}$ eines M-Simplex $\mathcal{S}_M \subset \mathbb{R}^{M-1}$ dargestellt, und $R = \{\boldsymbol{r}_1, \dots, \boldsymbol{r}_M\} \in \mathbb{R}^{(M-1)\times M}$. Die $j$te Person gibt eine *verteilte Wahlstimme* $\boldsymbol{w}_j^\star \in \mathbb{R}^M$ ab, wobei $R\boldsymbol{w}_j^\star$ eine konvexe Kombination der Reiseziele in $\mathcal{S}_M$ ist, die die eigenen Präferenzen darstellt. Wenn der Entscheidungsprozess in einer einzigen Runde abgeschlossen werden soll, sind das verteilte Wahlergebnis $\boldsymbol{r}^*$ und das reine Wahlergebnis $\hat{\boldsymbol{r}}$ gegeben durch

$$\hat{\boldsymbol{r}} = \operatorname*{argmin}_{1\le i\le M} \|\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}^\star\|, \quad \boldsymbol{r}^\star = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^N R\boldsymbol{w}_j^\star.$$

Mit $\boldsymbol{w}_j^{(1)} = \boldsymbol{w}_j^\star$ sei nun $\boldsymbol{w}_j^{(l)}$ die verteilte Wahlstimme der $j$ten Person in einer $l$ten Runde, wobei das verteilte Ergebnis

$$\boldsymbol{r}^{(l)} = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^N R\boldsymbol{w}_j^{(l)}, \quad l = 0, 1, 2, \dots$$

am Ende der $l$ten Runde bekanntgegeben wird. Angenommen wird $\boldsymbol{w}_j^{(l+1)}$ so ausgewählt, dass die eigene Utilität maximiert wird,

$$\boldsymbol{w}_j^{(l+1)} = \operatorname*{argmin}_{\boldsymbol{w}\in\mathcal{S}_M} \|R(\boldsymbol{w} - \boldsymbol{w}_j^{(l)}) - \alpha_j^{(l)}(R\boldsymbol{w}^\star - \boldsymbol{r}^{(l)})\|$$

wobei der Wert $\alpha_j^{(l)} = 2$ vorläufig gemeint ist, aber das Wählen kann durch $\alpha_j^{(l)} \in (0, 2)$ gebremst werden. Das reine Wahlergebnis nach der $l$ten Runde ist

$$\hat{\boldsymbol{r}}^{(l)} = \operatorname*{argmin}_{1\le i\le M} \|\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}^{(l)}\|.$$

(a) Mit zufällig ausgewählten Präferenzen $\{\boldsymbol{w}_j^\star\}_{j=1}^N$ der Wähler, simulieren Sie das Wahlsystem mit einem Matlab Code.

(b) Zeigen Sie anhand der Wahlergebnisse nach einer Runde, dass das Simplex gleichseitig sein soll, da sonst eine nicht geeignete Korrespondenz zwischen dem verteilten und dem reinen Ergebnis sich ergeben kann.

(c) Zeigen Sie, das Ergebnis nach der ersten Runde erfüllt die Bedingungen für eine *faire* Gruppenentscheidung im Satz von Arrow (über die Nichtexistenz einer fairen Gruppenentscheidung), nämlich

i. die Gruppenentscheidung soll nicht von einer Person bestimmt werden,

ii. wenn alle Personen $\boldsymbol{r}_i$ vor $\boldsymbol{r}_j$ bevorzugen, dann soll in der Gruppenentscheidung $\boldsymbol{r}_i$ vor $\boldsymbol{r}_j$ gereiht werden, und

iii. wenn alle Personen $\boldsymbol{r}_i$ vor $\boldsymbol{r}_j$ bevorzugen und bei dieser Reihung bleiben, dann in der Gruppenentscheidung bleibt $\boldsymbol{r}_i$ vor $\boldsymbol{r}_j$ vorgereiht, unabhängig von Änderungen in der Einriehung von anderen Optionen $\boldsymbol{r}_k$, $k \neq i, j$.

(d) Bestimmen Sie strategisch geeignete Werte $\{\alpha_j^{(l)}\}$.

(e) Bestimmen Sie, ob die Iterierten $\{\boldsymbol{r}_k^{(l)}\}_{l=1}^{\infty}$ immer einen Fixpunkt haben,

(f) und zwar welcher anhand des Ergebnisses der ersten Runde vorausgesagt werden kann oder nicht.

Bei Simulationen und anfänglichen Überlegungen nehmen Sie zur Vereinfachung an, dass $M = 3$ und $N = 2$ gelten, damit das Wahlsystem veranschaulicher und leicht grafisch dargestellt wird. Gelöst vom Herrn Hauser.

6. Um einen Kurs positiv abzuschließen müssen die Teilnehmer eine Prüfung mit *multiple response* Fragen bestehen. Dafür gibt es für jede Frage vier Antwortmöglichkeiten, wobei mindestens eine richtig ist und mindestens eine falsch ist. Alle richtigen Antworten werden gleich positiv gewichtet und alle falsche Antworten gleich negativ. Die Summe der positiven Gewichte ist $+1$, und die Summe der negativen Gewichte ist -1. Der Kurs wird positiv abgeschloßen, wenn die durchschnittliche Leistung über 0.5 liegt. Die Teilnehmer überlegen eine optimale Strategie der Prüfungskunst, und der Kursleiter überlegt eine optimale Strategie, die eine Motivation zum Lernen anbietet. Bestimmen Sie die besten jeweiligen Strategieen.