Mathematische Modellierung
SS20, Übungsblatt 7

Ausarbeitung bis 20. Mai 2020

1. Gegeben sei das kontinuierliche Verkehrsmodell für N Autos,

$$\begin{cases} x_i''(t+\tau) = -u^\star \dfrac{x_i'(t) - x_{i+1}'(t)}{x_{i+1}(t) - x_i(t)}, \quad t > 0 \\ x_i(t) = p_i + u^\star t, \quad x_i'(t) = u^\star, \quad -\tau \le t \le 0 \end{cases} \qquad i = 1, \dots, N-1$$

wobei $x_N(t) = u^\star t + (N-1)/\rho^*$, $u^\star = u_{\max}/\ln(\rho_{\max}/\rho_{\mathrm{c}})$, $\rho^* = \rho_{\max}/e$, $\rho_{\mathrm{c}} \in (0, \rho^\star)$, $u_{\max} > 0$, $\rho_{\max} > 0$ und $p_i \in \mathbb{R}$.

(a) Schreiben Sie einen Matlab Code, um das Problem numerisch zu lösen. Für $\tau = 0$ stehen Matlab interne Funktionen wie `ode23` zur Verfügung, und sonst für $\tau > 0$ kann die Matlab interne Funktion `dde23` verwendet werden. Verwenden Sie den Code, um Ergebnisse wie auf Seiten 124 – 126 im Skriptum zu berechnen.

(b) Bonus: Schreiben Sie dieses Modell der Lagrange-Formulierung in eine Euler-Formulierung mit einer partiellen Differentialgleichung um. Diskretisieren Sie die PDG und lösen Sie sie numerisch. Vergleichen Sie die Ergebnisse mit jenen von einer *upwind* Diskretisierung des Erhaltungssatzes $\rho_t + f(\rho)_x = 0$ mit $f(\rho) = \rho u(\rho)$ wobei die Geschwindigkeitsfunktion

$$f(\rho) = \rho u(\rho), \quad u(\rho) = \begin{cases} u_{\max}, & 0 \le \rho \le \rho_{\mathrm{c}} \\ u^\star \ln(\rho_{\max}/\rho), & \rho_{\mathrm{c}} \le \rho \le \rho_{\max}, \\ 0, & \rho_{\max} \le \rho \end{cases} \qquad \begin{array}{c} \rho_{\mathrm{c}} \in (0, \rho^*), \\ \rho^* = \rho_{\max}/e \end{array}$$

für das Lagrange-Modell in der Vorlesung hergeleitet worden ist.

Gelöst vom Herrn Baumhakel.

2. Gegeben sei das kontinuierliche Verkehrsmodell für N Autos $\boldsymbol{x}(t) = \{x_i(t)\}_{i=1}^N$,

$$\begin{cases} x_i'(t) = v_i(t) + \alpha D_i(\boldsymbol{x}(t-\tau)) \\ v_i'(t) = -\beta B_i(\boldsymbol{x}(t-\tau), \boldsymbol{v}(t-\tau)) \end{cases} t > 0 \qquad i = 1, \dots, N-1$$
$$x_i(t) = p_i + \hat{u}t, \quad x_i'(t) = \hat{u}, \quad -\tau \le t \le 0$$

mit $x_N(t) = \hat{u}t + (N-1)/\hat{\rho}$, $v_N(t) = \hat{u}$, $\hat{u} > 0$, $\hat{\rho} > 0$, $\alpha, \beta > 0$, $\tau \ge 0$, $p_i \in \mathbb{R}$, Dämpfung

$$D_i(\boldsymbol{x}(t)) = \begin{cases} x_{i+1} - 2x_i + x_{i-1} & i = 2, \dots, N-1, \\ x_2 - x_1 - 1/\rho^\star & i = 1 \end{cases}$$

und Bremsenkräften (vgl. Differenzen der kinetischen Energie)

$$B_i(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{v}(t)) = \begin{cases} \dfrac{|v_i|v_i - |v_{i+1}|v_{i+1}}{x_{i+1} - x_i} + \dfrac{|v_i|v_i - |v_{i-1}|v_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}, & i = 2, \dots, N-1 \\ \dfrac{|v_1|v_1 - |v_2|v_2}{x_2 - x_1}, & i = 1. \end{cases}$$

(a) Für $N \in \mathbb{N}$ schreiben Sie einen Matlab Code, um das Verkehrsmodell numerisch zu lösen. Verwenden Sie den Code, um Ergebnisse wie auf Seiten 124 – 126 im Skriptum zu berechnen.

(b) Zeigen Sie mit $\tau = 0$, der idealisierte Zustand $x_i \to \xi_i(t) = \hat{u}t + (i-1)/\hat{\rho}$, $v_i \to \eta_i = \hat{u}$, ist lokal asymptotisch stabil, d.h. für $\phi_i(t) = x_i(t) - \xi_i(t)$, $\psi_i(t) = v_i(t) - \eta_i(t)$, ist $\phi_i^\star = 0 = \psi_i^\star$ein lokal asymptotisch stabiles Gleichgewicht.

(c) Leiten Sie eine Beziehung $u = u(\rho)$ zwischen Dichte ρ und Geschwindigkeit u von diesem Modell her, die einem Fließgleichgewicht entspricht. Anhand der Geschwindigkeitsfunktion $u(\rho)$ bestimmen Sie einen idealisierten Zustand $(u^\star, \rho^\star)$, der den Verkehrsfluss $f(\rho) = \rho u(\rho)$ maximiert. Untersuchen Sie durch Matlab-Simulationen, ob dieser Zustand einem stabilen Fließgleichgewicht entspricht. Je nach Ergebnissen ändern Sie das Modell so, wie Sie geeignet finden.

(d) Bonus: Schreiben Sie dieses Modell der Lagrange-Formulierung in eine Euler-Formulierung mit einer partiellen Differentialgleichung um. Diskretisieren Sie die PDG und lösen Sie sie numerisch. Vergleichen Sie die Ergebnisse mit jenen von einer *upwind* Diskretisierung des Erhaltungssatzes $\rho_t + f(\rho)_x = 0$ mit der im Teil (c) hergeleiteten Flussfunktion $f(\rho)$.

Gelöst vom Herrn Baumhakel.

3. Gegeben sei das diskrete Verkehrsmodell für N Autos,

$$\left\{ \begin{array}{rcll} \Delta_n^2 X_i(n) & = & \Delta t u^\star \Delta_n \ln(X_{i+1}(n-\sigma) - X_i(n-\sigma)), & n = \sigma, \sigma+1, \ldots \\ X_i(m) & = & \alpha_i(m), & m = 0, \ldots, \sigma+1 \end{array} \right. \qquad i = 1, \ldots, N-1$$

wobei $X_N(n) = u^\star n\Delta t + (N-1)/\rho^\star$, $\Delta t > 0$, $\sigma \in \mathbb{N}_0$, $u^\star = u_{\max}/\ln(\rho_{\max}/\rho_{\mathrm{c}})$, $\rho^\star = \rho_{\max}/e$, $\rho_{\mathrm{c}} \in (0, \rho^\star)$, $\rho_{\max} > 0$, $\alpha_i(m) \in \mathbb{R}$, $\alpha_{i-1}(m) < \alpha_i(m)$. Schreiben Sie einen Matlab Code, um das Problem numerisch zu lösen. Untersuchen Sie rechenbetont die Stabilität des idealen Zustands $\Xi_i(n) = u^\star n\Delta t + (i-1)/\rho^\star$.

4. Der dynamische Wärmetransport durch ein Fenster mit Doppelverglasung wird untersucht.

(a) Entwickeln Sie ein dynamisches Modell von diesem Wärmetransport, in dem die Temperatur sich nur in einer räumlichen Dimension senkrecht auf dem Fenter variiert, und in dieser Richtung wird das Fenster in diskreten Zellen diskretisiert. Zeigen Sie, das Fließgleichgewicht dieses dynamischen Modells stimmt mit dem statischen Ergebnis aus der Vorlesung überein.

(b) Wiederholen Sie diese Untersuchung in einem Kontinuum mit der Wärmegleichung in einer räumlichen Dimension.

Gelöst von Frau Trampitsch.