Mathematische Modellierung
SS20, Übungsblatt 5

Ausarbeitung bis 29. April 2020

1. Das folgende *Peak Oil* Modell aus der Vorlesung sei gegeben:

$$\begin{cases} E'(t) &= aE(t)[M - E(t)] \\ F'(t) &= e[E(t-\tau) - F(t)] \\ V'(t) &= F'(t) - A'(t) \\ A'(t) &= bV(t)\ln[P(t)/P_{\min}(t)] \\ N'(t) &= cB(t)\ln[P_{\max}/P(t)] \\ P_{\min}(t) &= q + hF(t)/[E(t) - F(t)] \\ r(t) &= cB(t)/[cB(t) + bV(t)] \\ s(t) &= bV(t)/[cB(t) + bV(t)] \\ P(t) &= P_{\max}^{r(t)} P_{\min}^{s(t)}(t) \\ K'(t) &= P(t)N'(t) - P_{\min}(t)A'(t) \\ B'(t) &= fB(t)[R + gA'(t) - B(t)] \end{cases}$$

   wobei $a, b, c, e, f, g, h, P_{\max}, q, R, \tau > 0$.

   (a) Bestätigen Sie die Formeln für Angebot und Nachfrage,

$$\lim_{dt\to 0} \frac{V(t)}{dt}\left\{1 - \left[\frac{P_{\min}(t)}{P(t)}\right]^{b\cdot dt}\right\} = bV(t)\ln\left[\frac{P(t)}{P_{\min}(t)}\right] = A'(t)$$

$$\lim_{dt\to 0} c_1\frac{B(t)}{dt}\left\{1 - \left[\frac{P(t)}{P_{\max}}\right]^{c_2\cdot dt}\right\} = c_1c_2B(t)\ln\left[\frac{P_{\max}}{P(t)}\right] = N'(t).$$

   (b) Wie könnte das Modell erweitert werden, so dass das Angebot und die Nachfrage nicht unbedingt zu jeder Zeit gleich bleiben?

   (c) Wie könnte das Modell erweitert werden, so dass das Kapital nicht unbedingt zu jeder Zeit steigend ist?

   (d) Wie könnte das Monopol eine Steuerung ausüben, um einen gewissen Gewinn zu maximieren?

   Gelöst vom Herrn Hauser.

2. Für das WTC Modell:

   (a) Bestätigen Sie die Formeln für die jeweiligen Zeiten und Geschwindigkeiten.

   (b) Implementieren Sie das Modell, um die Einstellungen zu bestätigen, bei denen die Fallzeit jener eines freien Falls entspricht.

   Gelöst vom Herrn Ladreiter.

3. Das Modell für ein Erdwärmesystem mit 6 Temperaturen, Haus T_{H}, Austeiler T_{A}, Speicher T_{S}, Pumpe T_{P}, Kollektoren T_{K} und Erde T_{E}, sei gegeben:

$$\begin{cases} \rho_{\mathrm{H}} c_{\mathrm{H}} V_{\mathrm{H}} T'_{\mathrm{H}} &= \alpha^{\mathrm{H}}_{\mathrm{A}} S^{\mathrm{H}}_{\mathrm{A}} (T_{\mathrm{A}} - T_{\mathrm{H}}) &+ \alpha^{\mathrm{L}}_{\mathrm{H}} S^{\mathrm{L}}_{\mathrm{H}} (T_{\mathrm{L}} - T_{\mathrm{H}}) \\ \rho_{\mathrm{A}} c_{\mathrm{A}} V_{\mathrm{A}} T'_{\mathrm{A}} &= \alpha^{\mathrm{H}}_{\mathrm{A}} S^{\mathrm{H}}_{\mathrm{A}} (T_{\mathrm{H}} - T_{\mathrm{A}}) &+ F_{\mathrm{A}} (\rho_{\mathrm{S}} c_{\mathrm{S}} T_{\mathrm{S}} - \rho_{\mathrm{A}} c_{\mathrm{A}} T_{\mathrm{A}}) \\ \rho_{\mathrm{S}} c_{\mathrm{S}} V_{\mathrm{S}} T'_{\mathrm{S}} &= &F_{\mathrm{A}} (\rho_{\mathrm{A}} c_{\mathrm{A}} T_{\mathrm{A}} - \rho_{\mathrm{S}} c_{\mathrm{S}} T_{\mathrm{S}}) \\ & &+ F_{\mathrm{K}} (\rho_{\mathrm{K}} c_{\mathrm{K}} T_{\mathrm{K}} - \rho_{\mathrm{P}} c_{\mathrm{P}} T_{\mathrm{P}}) \\ \rho_{\mathrm{K}} c_{\mathrm{K}} V_{\mathrm{K}} T'_{\mathrm{K}} &= \alpha^{\mathrm{E}}_{\mathrm{K}} S^{\mathrm{E}}_{\mathrm{K}} (T_{\mathrm{E}} - T_{\mathrm{K}}) &+ F_{\mathrm{K}} (\rho_{\mathrm{P}} c_{\mathrm{P}} T_{\mathrm{P}} - \rho_{\mathrm{K}} c_{\mathrm{K}} T_{\mathrm{K}}) \\ \rho_{\mathrm{E}} c_{\mathrm{E}} V_{\mathrm{E}} T'_{\mathrm{E}} &= \alpha^{\mathrm{E}}_{\mathrm{K}} S^{\mathrm{E}}_{\mathrm{K}} (T_{\mathrm{K}} - T_{\mathrm{E}}) &+ Q \end{cases}$$

wobei $T_{\mathrm{P}} = T_{\mathrm{K}} - \phi(T_{\mathrm{K}})$ für eine Funktion $\phi(T) = 2\min\{\max\{T/T_{\mathrm{K}}(0), 0\}, 1\}$. Außerdem gelten $T_{\mathrm{S}} > T_{\mathrm{A}}(0) = T_{\mathrm{H}}(0) > T_{\mathrm{K}}(0) = T_{\mathrm{E}}(0) > T_{\mathrm{L}} = 0$.

(a) Schätzen Sie realistische Werte für die Parameter ab, implementieren Sie das Modell mit Matlab und entwicklen Sie Steuerungsfunktionen $F_{\mathrm{K}}(t)$ und $F_{\mathrm{A}}(t)$ (z.B. *Bang-Bang* Kontrolle, d.h. Schaltfunktionen), mit denen T_{H} in einem bestimmten Zielintervall z.B. $[22°, 23°]$ bleibt. Achten Sie dabei, dass auch T_{S} zur Sicherheit in einem bestimmten Zielintervall bleiben soll, z.B. $[35°, 40°]$.

(b) Für die Parameter,

$$\rho_{\mathrm{H}} c_{\mathrm{H}} V_{\mathrm{H}}, \quad \rho_{\mathrm{A}} c_{\mathrm{A}} V_{\mathrm{A}}, \quad \rho_{\mathrm{S}} c_{\mathrm{S}} V_{\mathrm{S}}, \quad \rho_{\mathrm{K}} c_{\mathrm{K}} V_{\mathrm{K}}, \quad \rho_{\mathrm{E}} c_{\mathrm{E}} V_{\mathrm{E}} = 1$$

$$\rho_{\mathrm{A}} c_{\mathrm{A}} F_{\mathrm{A}}, \quad \rho_{\mathrm{S}} c_{\mathrm{S}} F_{\mathrm{A}}, \quad \rho_{\mathrm{K}} c_{\mathrm{K}} F_{\mathrm{K}}, \quad \rho_{\mathrm{E}} c_{\mathrm{E}} F_{\mathrm{K}} = 1$$

$$\alpha^{\mathrm{H}}_{\mathrm{A}} S^{\mathrm{H}}_{\mathrm{A}}, \quad \alpha^{\mathrm{L}}_{\mathrm{H}} S^{\mathrm{L}}_{\mathrm{H}}, \quad \alpha^{\mathrm{E}}_{\mathrm{K}} S^{\mathrm{E}}_{\mathrm{K}} = 1$$

$$\alpha^{\mathrm{L}}_{\mathrm{H}} S^{\mathrm{L}}_{\mathrm{H}} T_{\mathrm{L}} = 0, \quad \rho_{\mathrm{P}} c_{\mathrm{P}} F_{\mathrm{K}} T_{\mathrm{P}} = 2, \quad Q = 2$$

leiten Sie ein Gleichgewicht her, und bestimmen Sie ob dieses Gleichgewicht stabil ist, und zwar ob es lokal oder sogar global asymptotisch stabil ist.

(c) Mit $Q = 0$ sei $t^\star$ die Laufzeit der Pumpe, die notwendig ist, um eine gezielte Energie $E^\star$ ins Haus zu bringen:

$$E^\star = \rho_{\mathrm{K}} c_{\mathrm{K}} F_{\mathrm{K}} \int_0^{t^\star} \phi(T_{\mathrm{K}}(t, F_{\mathrm{K}}))dt.$$

i. Zeigen Sie, es gilt immer $T_{\mathrm{K}} \in [0, T_{\mathrm{K}}(0)]$, und daher folgt $\phi(T_{\mathrm{K}}) = 2T_{\mathrm{K}}/T_{\mathrm{K}}(0)$.

ii. Eine Funktion $t^\star = t^\star(F_{\mathrm{K}})$ sei durch diese Formel implizit definiert. Zeigen Sie, es gilt $t^{\star\prime}(F_{\mathrm{K}}) < 0$, und daher ist es theoretisch vorteilhaft, dass F_{K} möglichst groß ist.

Gelöst vom Herrn Morina.

4. Gegeben sei eine Kette von Kompartimenten,

$$T_0, F \to \boxed{T_1} \overset{\kappa_{1,2}}{\longleftrightarrow} \boxed{T_2} \overset{\kappa_{2,3}}{\longleftrightarrow} \quad \cdots \quad \overset{\kappa_{n-1,n}}{\longleftrightarrow} \boxed{T_n} \to F$$

wobei in jedem Kompartiment Wärme wohl gemischt ist, und daher hat das $i$te Kompartiment eine einzige Temperatur T_i. Durch Konvektion wird Flüssigkeit von links nach rechts mit der Flussrate F transportiert, und die konstant bleibende Tempartur der zugeführten Flüssigkeit ist T_0. Für $i = 1, 2, \ldots, n-1$ wird Wärme durch Diffusion zwischen Kompartimenten i und $i+1$ mit dem Temperaturübergangskoeffizient $\kappa_{i,i+1}$ transportiert.

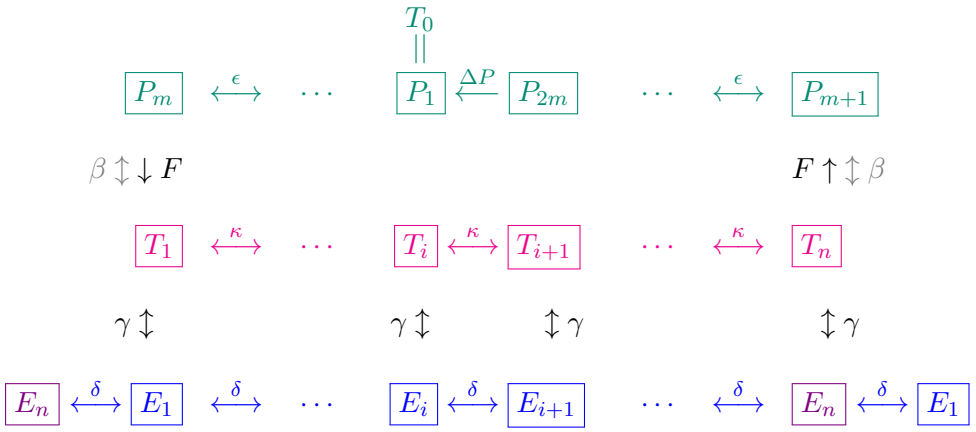
(a) Entwickeln Sie ein dynamisches Modell vom Wärmetransport durch diese Kette von Kompartimenten und

(b) mit selbst ausgewählten Parametern führen Sie eine Simulation mit Matlab durch.

(c) Finden Sie ein Gleichgewicht für Ihr Modell und zeigen Sie, dass dieses Gleichgewicht global asymptotisch stabil ist.

Gelöst von Frau Trampitsch.

5. Nun sei die Kette von Kompartimenten im letzten Beispiel im folgenden System eingebettet, in dem P_i, T_i und E_i Temperaturen in einem Pumpensystem, einem Kollektorensystem bzw. einem Erdesystem darstellen.



Zur Vereinfachung seien alle Temperaturübergangskoeffizienten ortsunabhängig. Die Kompartimenten mit Temperaturen $\{P_i\}_{i=1}^{m}$ und $\{P_i\}_{i=m+1}^{2m}$ stellen eine Zufuhr zu bzw. eine Abfuhr von dem Kollektorensystem dar, wobei eine Wärmepumpe sich zwischen diesen befindet, mit der die Temperatur $P_1 = T_0$ eingehalten wird. Durch Konvektion wird Flüssigkeit in dem Kreis zwischen dem Pumpensystem und dem Kollektorensystem mit Flussrate F transportiert. Der Temperaturübergangskoeffizient ϵ betrifft Diffusion im Pumpensystem. Der Temperaturübergangskoeffizient β hat mit möglicher Diffusion zwischen dem Pumpensystem und dem Kollektorensystem zu tun. Nach wie vor betrifft der Temperaturübergangskoeffizient κ Diffusion im Kollektorensystem. Der Temperaturübergangskoeffizient γ hat mit Diffusion zwischen dem Kollektorensystem und dem Erdesystem zu tun. Schließlich betrifft der Temperaturübergangskoeffizient δ Diffusion im Erdesystem. Im Erdesystem ist das erste Kompartiment mit dem letzten kreisartig verbunden, und es gibt im Erdesystem keine Konvektion.

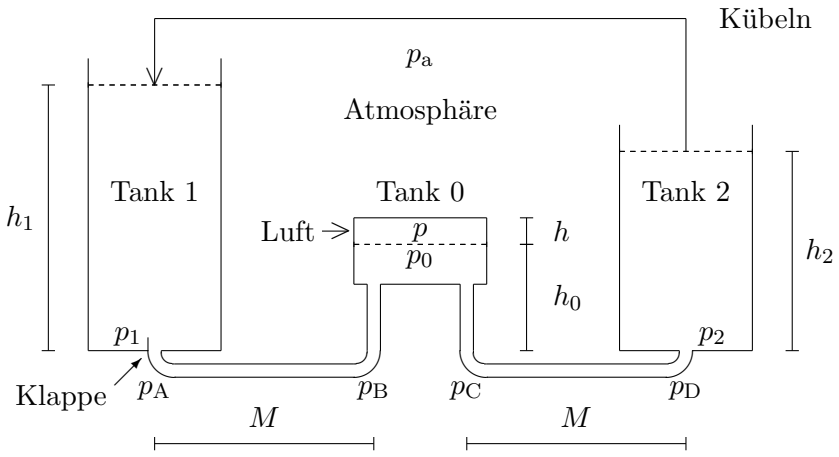
(a) Entwickeln Sie ein dynamisches Modell vom Wärmetransport durch diese Kompartimenten und

(b) mit selbst ausgewählten Parametern führen Sie eine Simulation mit Matlab durch.

(c) Durch eine strategische Auswahl an Parametern, untersuchen Sie welche Randbedingungen im letzten Beispiel am geeignetesten sind, um die äußere Umgebung zu modellieren.

Gelöst von Frau Trampitsch.

6. (a) Für das folgende Tanksystem sei angenommen: (i) die Großenordnung der Zustandsvariablen sind so, dass die Gesetze von Bernoulli und Poiseuille ausreichend gelten, (ii) es wird mit der Flussrate F vom Tank 2 zum Tank 1 gekübelt und (iii) der Zustand des Systems hat ein Fließgleichgewicht erreicht.

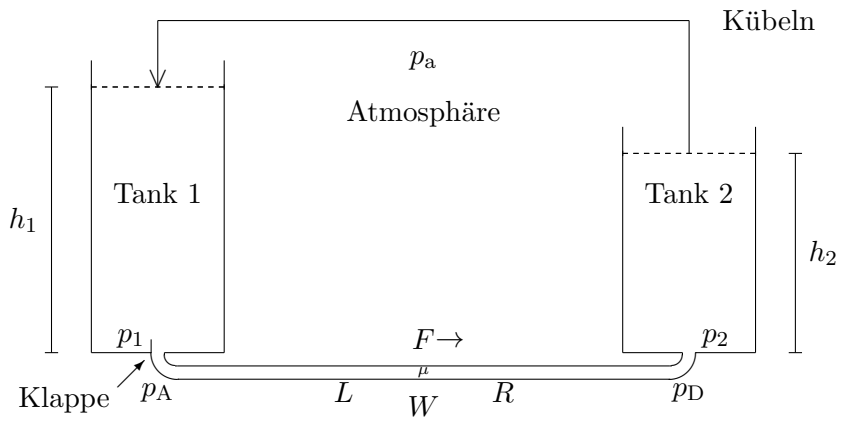


Bezüglich der Größen

p_a	=	atmosphärischer Druck
h_i	=	Höhe der Flüssigkeit im Tank i, $i = 0, 1, 2$
h	=	Höhe des Luftraums im Tank 0
S	=	Querschnittflächeninhalt im Tank i, $i = 0, 1, 2$
A	=	Querschnittflächeninhalt im Schlauch, $A \ll S$
R	=	Radius des Schlauches, $A = \pi R^2$
p_i	=	Druck im Boden vom Tank i, $i = 1, 2$
p_I	=	Druck an den Stellen I=A,B,C,D im Schlauch
p_0	=	Druck an der Flüssigkeitsoberfläche im Tank 0
p	=	Druck der Luft im Tank 0, $p = p_0$
M	=	Länge der Schlauchstücke $\overline{\mathrm{AB}}$ und $\overline{\mathrm{CD}}$
L	=	Gesamtlänge des Schlauches, $L \approx 2M$
ρ	=	Dichte der Flüssigkeit
ρ_L	=	Dichte der Luft
T	=	Temperatur der Luft
$\mathcal{R}$	=	Gas-Konstante im idealen Gas-Gesetz
m_L	=	Masse der Luft, $m_L = \rho_L h S$
v	=	lokale Geschwindigkeit der Flüssigkeit
F	=	Flussrate der Flüssigkeit im gesamten System
g	=	Erdbeschleunigung
μ	=	Viskosität der Flüssigkeit
W	=	Widerstand des Schlauches, $W = 8\mu L/(\pi R^4)$
V	=	Volumen der Flüssigkeit

leiten Sie die Druckverteilung im Fließgleichgewicht her.

(b) Das folgende Tanksystem mit den oben aufgelisteten Größen sei gegeben, wobei mit der Flussrate F vom Tank 2 zum Tank 1 gekübelt wird. Entwickeln Sie ein dynamisches Modell für den Zustand des Systems, das nach der Klappenöffnung gelten soll und dessen Fließgleichgewicht mit den Gesetzen von Bernoulli und Poiseuille übereinstimmt.



(c) Erweitern Sie Ihr dynamisches Modell vom Teil (b), um den dynamischen Zustand und das Fließgleichgewicht für Teil (a) zu berechnen. Untersuchen Sie die Wirkung auf den Fluss im Fließgleichgewicht, wenn h, d.h. der Luftraum, anfänglich immer kleiner wird.

Gelöst vom Herrn Pichlbauer.