Mathematische Modellierung
SS20, Übungsblatt 1

Ausarbeitung bis 4. März 2020

1. Seien für das *Supersize Me!* Problem folgende gemessene Daten gegeben:

```
n  = 30;
t  = linspace(0,30,n);
ns = 5.0; % prozent Messfehler
m  = 231.48 + (84-231.48)exp(-t/361.11) + ns*0.84*randn(1,n);
```

   Entwickeln Sie eine Methode zur Abschätzung des Parameters ϕ im Modell

$$m'(t) = \epsilon/\kappa - m(t)\phi/\kappa, \quad m(0) = 84, \quad \epsilon = 5000, \quad \kappa = 7800$$

   und implementieren Sie diese Methode mit Matlab. Für verschiedene Werte `ns` für den Messfehler, vergleichen Sie Ihren abgeschätzen Wert mit dem Wert $\phi = 21.6$ in der Vorlesung. Ist Ihre Methode robust gegenüber Ausreißer in den Daten? Hinweis: Überlegen Sie eine Zielfunktion mit entweder der ℓ_2- oder der ℓ_1-Norm der Differenzen zwischen simulierten und gemessenen Daten. Gelöst vom Herrn Morina.

2. Entwickeln Sie eine Verbesserung des *Supersize Me!* Modells, die geeigneter ist für sehr große Werte von der Masse. Erklären Sie warum Ihr Modell geeigneter ist. Hinweis: Überlegen Sie das Verhalten des Fließgleichgewichts bezüglich anderer Parameter. Gelöst von Frau Trampitsch.

3. Gegeben sei das folgende System von Differentialgleichungen als stochastisches Modell der Entdeckung von Schätzen in einer Landschaft durch zufälliges Wandern:

$$\begin{array}{rcl} p_0'(t) & = & -\beta p_0(t) \\ p_n'(t) & = & -\beta p_n(t) + \beta p_{n-1}(t), \quad n = 1, 2, \ldots, N-1 \qquad 0 \le t \le T \\ p_N'(t) & = & \qquad\qquad \beta p_{N-1}(t) \end{array}$$

   Bestimmen Sie die Anfangsbedingungen, die dem Zustand entsprechen, dass keine Schätze zur Zeit $t = 0$ entdeckt worden sind. Wählen Sie Werte $\beta, T > 0$ und $N \in \mathbb{N}$ aus, und lösen Sie das Anfangswertproblem mit Matlab, wobei $\{p_n(t)\}_{n=0}^N$ gemeinsam für $t \in [0, T]$ grafisch dargestellt werden sollen. Mit den Lösungen $\{p_n(t) : t \in [0, T]\}_{n=0}^N$ bestimmen Sie den Erwartungswert $E_N(t)$ der Schätze, die bis zur Zeit t entdeckt worden sind. Stellen Sie das Ergebnis $E_N(t)$ und auch $E(t)$ von der Vorlesung gemeinsam grafisch dar, und vergleichen Sie die Graphen für N immer größer. Gelöst vom Herrn Baumhakel.

4. Für die gegebenen Daten,

$$Y = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

   (a) führen Sie Hauptkomponentenanalyse durch, um Y_{z}, $K = \frac{1}{4} Y_{\mathrm{z}} Y_{\mathrm{z}}^\top$, V und $\Lambda = \mathrm{diag}\{\lambda_i\}$ mit $KV = V\Lambda$ und $Y_{\mathrm{s}} = \Lambda^{-\frac{1}{2}} V^\top Y_{\mathrm{z}}$ zu bestimmen. Stellen Sie die Spalten von Y und Y_{s} grafisch dar.

(b) Zeigen Sie, die gesphärten Daten Y_s erfüllen $\frac{1}{4} Y_\mathrm{s} Y_\mathrm{s}^\mathrm{T} = I$. Zeigen Sie, wenn die gesphärten Daten auf eine beliebige Achse $\hat{\boldsymbol{w}} \in \mathbb{R}^2$ mit $\|\hat{\boldsymbol{w}}\|_{\ell_2} = 1$ projiziert werden, haben die projizierten Daten die Varianz 1.

(c) Für $\theta \in [0, 2\pi]$ seien $\boldsymbol{u} = (\cos(\theta), \sin(\theta))$, $\boldsymbol{u}^\perp = (-\sin(\theta), \cos(\theta))$ and $U(\theta) = (\boldsymbol{u}(\theta); \boldsymbol{u}^\perp(\theta))$ definiert. Stellen Sie $J(\theta) = \mathcal{K}^2(\boldsymbol{u}(\theta) Y_\mathrm{s})$ grafisch dar, wobei $\mathcal{K}$ die Wölbung ist. Mit dieser Grafik bestimmen Sie den Wert θ^*, der $J(\theta)$ maximiert. Sei $X_\mathrm{z} = U(\theta^*) Y_\mathrm{s}$. Gegeben dass die Spalten von Y gleich wahrscheinliche Ergebnisse eines Zufallsexperiment sind, zeigen Sie, die sich ergebenden Koordinaten (x, y) der Spalten von X_z sind statistisch unabhängig, d.h.

$$P(x = \alpha \;\&\; y = \beta) = P(x = \alpha) \cdot P(y = \beta), \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Gelöst vom Herrn Hauser.