Mathematische Modellierung
SS19, Übungsblatt 9

Ausarbeitung bis 19. Juni 2019

1. Es gibt unendlich viele versteckte Schätze zu finden, aber man wird schlauer beim Suchen. Sei $X(t)$ eine Zufallsvariable für die Anzahl der gefundenen Schätze bis zur Zeit t. Angenommen gilt $P\{X(\delta t) = i | X(0) = i-1\} = b_i \delta t + o(\delta t)$, wobei:

$$b_i = Bi, \quad 1 \leq i < \infty.$$

Zeigen Sie für $i_0 \geq 1$, dass

$$P\{X(t) = i\} = p_i(t) = \frac{(i-1)!}{(i_0-1)!(i-i_0)!} e^{-Bi_0 t}(1-e^{-Bt})^{i-i_0}, \quad i > i_0, \quad p_i(t) = 0, \quad i < i_0$$

$$p_{i_0}(t) = \frac{(i-1)!}{(i_0-1)!(i-i_0)!} e^{-Bi_0 t}, \quad p_i(t) = 0, \quad i < i_0$$

die Lösung des folgenden Systems ist:

$$p_i(t) = 0, \quad 0 \leq i < i_0; \qquad p_i'(t) = b_{i-1}p_{i-1}(t) - b_i p_i(t), \quad i \geq i_0; \quad p_i(0) = \delta_{i,i_0}.$$

Leiten Sie ein Anfangswertproblem für den Erwartungswert $x(t) = E[X(t)]$ her, und zeigen Sie damit, es gilt $x(t) = i_0 e^{Bt}$. Gelöst von Frau Ganster.

2. Für eine Zufallsvariable $X(t)$ seien $p_n(t) = P(X(t) = n)$ Wahrscheinlichkeiten, die erfüllen:

$$\begin{aligned} p_0'(t) &= -b_0 p_0(t) + d_1 p_1(t) \\ p_n'(t) &= -(b_n + d_n)p_n(t) + b_{n-1}p_{n-1}(t) + d_{n+1}p_{n+1}(t), \quad n = 1, \ldots, \infty \end{aligned}$$

wobei

$$b_n = n(\beta_1 - \beta_2 n) \quad d_n = n(\mu_1 + \mu_2 n).$$

Zeigen Sie, der Erwartungswert $x(t) = E[X(t)]$ und die Varianz $\sigma^2(t) = E[X(t)^2] - E[X(t)]^2$ erfüllen:

$$x'(t) = \frac{x(t)}{\tau}\left[1 - \frac{x(t)}{K}\right] - \nu\sigma^2(t), \qquad \tau = \frac{1}{\beta_1 - \mu_1}, \quad K = \frac{\beta_1 - \mu_1}{\beta_2 + \mu_2}, \quad \nu = (\beta_2 + \mu_2).$$

Also wenn $\sigma(t) \approx 0$ gilt, ist $x(t)$ ungefähr logistisch. Schreiben Sie einen Matlab-Code, um $p_n(t)$ für $n = 0, \ldots, N$ zu berechnen und graphisch darzustellen. Weiters berechnen Sie den Erwartungswert $x(t)$ und vergleichen Sie ihn mit der Lösung der obigen (logistischen) Differentialgleichung mit $\nu = 0$. (Hinweis: Wählen Sie β_1 und β_2 so aus, dass $b_n \geq 0$ für $n = 0, \ldots, N$ gilt.) Gelöst von Herrn Ofner.

3. Für eine Zufallsvariable $X(t)$ seien $p_n(t) = P\{X(t) = n\}$ Wahrscheinlichkeiten, die erfüllen:

$$\begin{aligned} p_0'(t) &= -b_0 p_0(t) + d_1 p_1(t) \\ p_n'(t) &= -(b_n + d_n)p_n(t) + b_{n-1}p_{n-1}(t) + d_{n+1}p_{n+1}(t), \quad 1 \leq n \leq N-1 \\ p_N'(t) &= -d_N p_N(t) + b_{N-1}p_{N-1}(t) \end{aligned}$$

wobei

$$b_n = 1/c, \quad d_n = \begin{cases} 2/s, & 2 \le n \le N \\ 1/s, & n = 1 \end{cases} \qquad \text{und} \quad \rho = s/c.$$

Für das stabile Gleichgewicht $\{p_n(\infty)\}$ des obigen Systems zeigen Sie

$$E[X(\infty)] = p_0 \rho \frac{N(\rho/2)^{N+1} - (N+1)(\rho/2)^N + 1}{(1-\rho/2)^2}, \quad p_0 = \frac{1-\rho/2}{1+\rho/2-\rho(\rho/2)^N}$$

wobei

$$E[X(\infty)] \overset{\rho\to 2}{\longrightarrow} \frac{N(N+1)}{1+2N}, \quad E[X(\infty)] \overset{N\to\infty}{\longrightarrow} \frac{4\rho}{4-\rho^2} \equiv L_2(\rho).$$

Gelöst von Frau Alomerovic.

4. Sei $i \in \{0(\mathrm{G}), 1, \ldots, N\}$ ein Index für einen Stockwerk in einem Gebäude. Sei X eine Zufallsvariable, wobei $X(n) = i$ gilt, wenn ein Aufzug sich im i-ten Stockwerk nach n Zeitschritten der Länge Δt befindet. Für $p_i(n) = P(X(n) = i)$ und $\boldsymbol{p}(n) = \{p_i(n)\}_{i=0}^N$ sei $P \in \mathbb{R}^{(N+1)\times(N+1)}$ eine stochastische Matrix, wobei $\boldsymbol{p}(n) = P^\top \boldsymbol{p}(n-1)$ gilt.

   Angenommen ist Δt so klein, dass Sprünge von zwei oder mehr Stockwerken im Zeitintervall Δt nicht möglich sind. Daher ist P tridiagonal aber sonst eine beliebige stochastische Matrix. Insbesondere ist es nicht notwendigerweise der Fall, dass P symmetrisch ist.

   Für ein $N \in \mathbb{N}$ und für ausgewählte Einträge in P, bestimmen Sie den stationären Zustand (Gleichgewicht) der Zustände $\boldsymbol{p}^\star$ des Aufzugs. Zeigen Sie, es gilt $\boldsymbol{p}_0^\top P^n \to \boldsymbol{p}^{\star\top}$, $n \to \infty$, für eine beliebige Anfangsverteilung $\boldsymbol{p}_0$. Zeigen Sie weiters, es gilt $P^n > 0$ für ein $n \in \mathbb{N}$, und alle Zeilen von P^n konvergieren zum Zustand $\boldsymbol{p}^{\star\top}$. Unter welchen Bedingungen sind alle Einträge von $\boldsymbol{p}^\star$ gleich?

   Führen Sie die folgende Simulation durch. Wählen Sie anfänglich einen beliebigen Stockwerk mit Index i aus. Berechnen Sie eine in $[0, 1]$ gleichmäßig verteilte Zusallszahl z (z.B. mit `rand` im Matlab) aus. Setzen Sie den nächsten Stockwerk zu dem mit Index $j = 0$ wenn $0 \le z \le P_{i,0}$ und sonst mit Index j mit $0 < j \le N$ wenn $P_{i,j-1} < z \le P_{i,j}$. Führen Sie solche Schritte mehrmals durch, bis die relative Häufigkeitsverteilung für die Stockwerke stabil wird. Vergleichen Sie diese Häufigkeitsverteilung mit $\boldsymbol{p}^*$.

   Gelöst von Frau Freuis.

5. Waren werden von einer Firma innerhalb des Zeitintervalls $0 \le t \le 1$ verkauft, und Profit soll maximiert werden. Zu Beginn dieses Intervalls werden u Einheiten der Waren bestellt und sofort geliefert. Sei die Anzahl der im Zeitintervall von Konsumenten nachgefragten Wareneinheiten durch eine Zufallsvariable Z dargestellt. Diese sei mit der folgenden Wahrscheinlichkeitsdichte abgeschätzt:

$$f(z) = \frac{\chi_{[a,b]}(z)}{b-a}, \quad \chi_{[a,b]}(z) = \begin{cases} 1, & a \le z \le b \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

   Die Fixkosten der Firma sind k, die Einheitskosten sind c_0 und der Einheitspreis für Konsumenten ist p. Die Lagerungskosten sind:

$$c_1 \int_0^1 \zeta(t) dt$$

   wobei die Anzahl der gelagerten Waren zur Zeit t gegeben ist durch

$$\zeta(t) = \begin{cases} u, & t = 0 \\ (u - Z) \cdot H(u - Z), & t > 0. \end{cases}$$

   Maximieren Sie den Erwartungswert des Profits, um die optimale Bestellung u^* zu finden. Gelöst von Herrn Gaggl.