

# Mathematische Modellierung

## SS19, Übungsblatt 8

Ausarbeitung bis 5. Juni 2019

1. Eine Flüssigkeit soll durch eine rechteckige Leitung mit maximalem Volumenfluss strömen. Die Seiten  $a$  und  $b$  eines Querschnitts erfüllen  $0 \leq a, b \leq 2$  und  $ab = 1$ . Die zwei senkrechten Seiten werden so bearbeitet, dass es keine Reibung für die Flüssigkeit an diesen Seiten gibt. Die Viskosität der Flüssigkeit spielt die übliche Rolle bezüglich der waagerechten Seiten. Bestimmen Sie die Durchfluss maximierende Geometrie der Leitung unter diesen Bedingungen. Gelöst von Frau Alomerovic.
2. Wiederholen Sie die Maximierung der Zielfunktion

$$J(u) = \int_0^{\infty} e^{-\delta t} [ph(t) - cu(t)] dt$$

mit

$$h(t) = qu(t)x(t), \quad x'(t) = Rx(t)(1 - x(t)/K) - h(t), \quad x(0) = K/N$$

wobei die Steuerungsstrategie nun eingeschränkt wird auf der Form

$$u(t) = \begin{cases} U_1, & 0 \leq t \leq s \\ U_2, & s \leq t < \infty \end{cases} \quad \text{wobei} \quad x(s) = x(t), \quad \forall t > s.$$

Gelöst von Frau Swoboda.

3. Zwei Nachbarn sollen Wasser von einem Brunnen teilen. Für jeden Nachbar ist ein fairer Anteil vom Brunnen zum täglichen Verbrauch ausgemacht worden. Diese Menge ist für jeden Nachbar leider nicht ausreichend, und jeder muss eine Ergänzung von einem Wasserversorger kaufen. Die Ergänzung kostet einem Nachbar (durchschnittlich) €10 pro Tag. Falls ein Nachbar seinen ganzen Wasserbedarf vom Brunnenwasser an einem bestimmten Tag nimmt, erspart er sich die Kosten für die Ergänzung vom Wasserversorger an diesem Tag. Aber dann muss der andere Nachbar (durchschnittlich) €25 an diesem Tag für seinen Wasserbedarf dem Wasserversorger bezahlen. Wenn sowas an einem bestimmten Tag passiert, gibt es ab dem nächsten Tag eine tägliche Strafe von der Gemeinde für den überlaufenden Nachbarn in der Höhe von € $s$ . Angenommen es findet dieses *Spiel* an einem Tag mit Wahrscheinlichkeit 75% statt, wenn es schon am vorherigen Tag stattgefunden hat (z.B. wegen des Grundwasserspiegels, der vom Wetter abhängt). Bestimmen Sie die Strafe  $s$  von der Gemeinde, mit der sich eine Kooperation zwischen den Nachbarn auszahlt. Gelöst vom Herrn Gaggl.
4. Zwei Personen treffen sich in der Wüste und überlegen einen Tausch von zwei Ressourcen  $x$  und  $y$ , damit ihre Lebenszeiten  $u_1$  und  $u_2$  verlängert werden können. Für die Ressourcen  $x$  und  $y$  hat die erste Person die Vorräte  $x_1$  und  $y_1$  und die entsprechenden Verbrauchsraten  $a_1$  und  $b_1$ , und die zweite Person hat die Vorräte  $x_2$  und  $y_2$  und die entsprechenden Verbrauchsraten  $a_2$  und  $b_2$ . Eine Person stirbt genau dann, wenn eine eigene Ressource verbraucht worden ist. Die Ressourcen und die Verbrauchsraten sind:  $x_i = y_i = 1$ ,  $a_1 = b_2 = 1$ ,  $a_2 = b_1 = 2$ . Finden Sie ein Gleichgewicht bei diesem Tausch. Berechnen Sie den optimalen Tausch bei der Nash Schlichtungsstrategie, wenn das *Status Quo* bei dem Tausch ist: nichts tauschen. Gelöst von Frau Ganster.