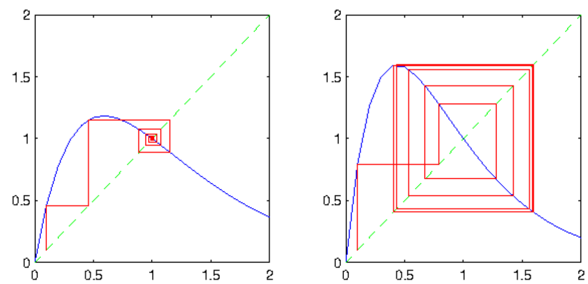
Mathematische Modellierung
SS18, Übungsblatt 6

Ausarbeitung bis 8. Mai 2019

1. Schreiben Sie einen Matlab-Code, der die Iterierten des Lachs-Modells

$$\xi_{n+1} = F(\xi_n) = \xi_n e^{r(1-\xi_n)}$$

für eingegebene ξ_0 und r ausgibt und so graphisch darstellt:

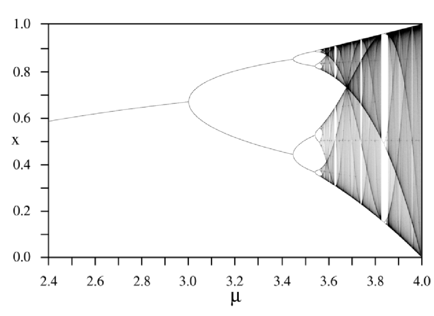


Hier ist $\xi_0 = 0.1$ für beide Fälle, und $r = 1.7$ gilt für die linke Graphik während $r = 2.3$ für die rechte Graphik gilt. Der Grenzwert für die linke Graphik ist $\xi^*_{(0)} = 1.0$, und die 2-periodischen Grenzwerte für die rechte Graphik sind $\xi^*_{(1)} = 0.4078$ und $\xi^*_{(2)} = 1.5922$. Gelöst von Frau Freuis.

2. Für das diskrete logistische Modell,

$$x_{n+1} = \mu x_n(1 - x_n)$$

sei $\{x^*_{n,j}(\mu) : j = 0, \ldots, 2^n - 1\}$ eine 2^n-periodische Lösung für ein gewisses μ. Für $n = 0$ finden Sie die Werte μ_0 und μ_1, wobei es ein stabiles Gleichgewicht $x^*_{0,0}(\mu)$ für $\mu_0 < \mu < \mu_1$ gibt. Für $n = 1$ finde den Wert μ_2, wobei es eine stabile $2-$periodische Lösung $\{x^*_{1,0}(\mu), x^*_{1,1}(\mu)\}$ für $\mu_1 < \mu < \mu_2$ gibt. Stellen Sie die Kurven $x^*_{0,0}(\mu)$, $\mu_0 < \mu < \mu_1$, $x^*_{1,0}(\mu)$, $\mu_1 < \mu < \mu_2$ und $x^*_{1,1}(\mu)$, $\mu_1 < \mu < \mu_2$ gemeinsam graphisch dar, um den entsprechenden Teil des folgenden Bifurkationbilds zu sehen.



Gelöst vom Herrn Ofner.

3. Für das kontinuierliche Verkehrsmodell,

$$x_N = \xi_N(t), \quad x_i''(t+\tau) = u^\star \frac{d}{dt} \ln[x_{i+1}(t) - x_i(t)], \quad i = 1, \ldots, N-1$$

seien $N = 3$, $\tau = 0$, $u^\star = u_{\max}/\ln(\rho_{\max}/\rho_{\mathrm{c}})$, $\rho^\star = \rho_{\max}/\mathrm{e}$. Zeigen Sie, die idealisierte Lösung $\xi_i(t) = u^\star t + (i-1)/\rho^\star$, $i = 1, \ldots, N$ ist stabil. Gelöst von Frau Swoboda.

4. Für das diskrete Verkehrsmodell,

$$X_N(n) = \Xi_N(n), \quad M^2 \Delta_n^2 X_i(n) = u^\star M \Delta_n \ln[X_{i+1}(n-\sigma) - X_i(n-\sigma)], \quad i = 1, \ldots, N-1$$

seien $N = 3$, $\sigma = 1$, $u^\star = u_{\max}/\ln(\rho_{\max}/\rho_{\mathrm{c}})$, $\rho^\star = \rho_{\max}/\mathrm{e}$. Leiten Sie eine Bedingung für die Parameter her, mit der die idealisierte Lösung $\Xi_i(n) = u^\star n/M + (i-1)/\rho^\star$ stabil ist. Gelöst von Frau Swoboda.

5. Bonus: Für das diskrete Lachs-Modell, $\xi_{n+1} = F(\xi_n)$, $F(\xi) = \xi \mathrm{e}^{r(1-\xi)}$, zeigen Sie, es gibt ein $\epsilon > 0$, mit dem Folgendes gilt. Für $r \in (2, 2+\epsilon)$ besitzt $G(\xi) = F(F(\xi))$ genau vier Fixpunkte $\xi = 0, 1, \nu_1, \nu_2$ mit $0 < \nu_1 < 1 < \nu_2$, und es gilt $|G'(\nu_1)| = |G'(\nu_2)| < 1$ für $r \in (2, 2+\epsilon)$. Gelöst von Frau Freuis.