

# Mathematische Modellierung SS19, Übungsblatt 3

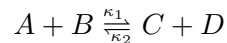
Ausarbeitung bis 27. März 2019

1. Mit Dimensionsanalyse leiten Sie das dritte Keplersche Gesetz her: *Die Quadrate der Umlaufzeiten zweiter Planeten verhalten sich wie die Kuben ihrer großen Halbachsen.* (Hinweis: Sehen Sie Seite 35 im Skriptum <http://imsc.uni-graz.at/thaller/lehre/mpt/skriptum.pdf>, und geben Sie Acht, dass die Voraussetzungen des Buckingham Pi Satzes erfüllt sind.) Gelöst von Frau Ganster.
2. Lösen Sie das Anfangswertproblem analytisch

$$\begin{cases} P'(t) = \frac{P(t)}{\tau} \left[ 1 - \frac{P(t)}{K} \right], & t > t_0 \\ P(t_0) = P_0 \end{cases}$$

und numerisch mit Matlab (wobei die Parameter vom Benutzer eingegeben werden), und vergleichen Sie die Ergebnisse graphisch. Gelöst von Frau Swoboda.

3. Für die chemische reversible Reaktion,

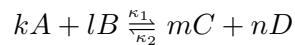


sind die Anfangskonzentrationen

$$[A](0) = 3 \text{ Mol/Liter}, [B](0) = 2 \text{ Mol/Liter}, [C](0) = 1 \text{ Mol/Liter} \text{ und } [D](0) = 0 \text{ Mol/Liter}.$$

Die Reaktionskonstanten sind  $\kappa_1 = 2$  (Liter·Minuten/Mol) für die Vorwärtsreaktion und  $\kappa_2 = 2$  (Liter·Minuten/Mol) für die Rückwärtsreaktion. Finden Sie die Konzentrationen  $[A](t)$ ,  $[B](t)$ ,  $[C](t)$  und  $[D](t)$  als Funktionen von der Reaktionszeit  $t$  Minuten, und stellen Sie diese gemeinsam graphisch dar. Finden Sie die Gleichgewichtskonzentrationen dieser Chemikalien. Zeigen Sie dass diese Gleichgewichte stabil sind. Gelöst von Frau Alomerovic.

4. Gegeben sei die chemische Reaktion,



mit folgenden Parametern:

$$k = 2, \quad l = 1, \quad m = 2, \quad n = 1$$

$$[A](0) = 2, \quad [B](0) = 2, \quad [C](0) = 2, \quad [D](0) = 1.$$

Bestimmen Sie das Anfangswertproblem

$$x'(t) = f(x(t); \kappa_1, \kappa_2), \quad x(0) = x_0$$

wobei

$$\begin{aligned} [A](t) &= [A](0) - kx(t), & [B](t) &= [B](0) - lx(t) \\ [C](t) &= [C](0) + mx(t), & [D](t) &= [D](0) + nx(t). \end{aligned}$$

Schreiben Sie die Gleichung  $f(x^*; \kappa_1, \kappa_2) = 0$  in die Form um,

$$0 < \kappa_2/\kappa_1 = r(x^*)$$

um eine Beziehung zwischen Gleichgewichten  $x^*$  und dem Quotienten  $\kappa_2/\kappa_1$  herzuleiten. (Bemerkungen Sie, wegen der Form von  $r$  bedeutet die Bedingung  $\kappa_2/\kappa_1 > 0$ , dass ein Gleichgewicht  $x^* \in (-1, 2)$  erfüllen muss.) Zeigen Sie, die Gleichgewichte  $x^*$  mit  $r'(x^*) < 0$  sind (lokal asymptotisch) stabil, während die Gleichgewichte  $x^*$  mit  $r'(x^*) > 0$  instabil sind. (Hinweise: Es gilt  $f'(x^*; \kappa_1, \kappa_2)/\kappa_1 = 4r'(x^*)(1 + x^*)^3$ .) Leiten Sie eine entsprechende Potential-Landschaft  $p(x, R)$  her, wobei  $f(x; \kappa_1, \kappa_2)/\kappa_1 = -p_x(x, \kappa_2/\kappa_1)$ . Stellen Sie  $p(x, R)$  für verschiedene Werte von  $R$  auf dem Intervall  $0 \leq x \leq 2$  grafisch dar, um Hysterese für das System zu zeigen. Gelöst vom Herrn Gaggl.