Mathematische Modellierung
SS17, Übungsblatt 8

Ausarbeitung bis 6. Juni 2017

1. Eine Flüssigkeit soll durch eine rechteckige Leitung mit maximalem Volumenfluss strömen. Die Seiten a und b eines Querschnitts erfüllen $0 \leq a, b \leq 2$ und $ab = 1$. Die zwei senkrechten Seiten werden so bearbeitet, dass es keine Reibung für die Flüssigkeit an diesen Seiten gibt. Die Viskosität der Flüssigkeit spielt die übliche Rolle bezüglich der waagerechten Seiten. Bestimmen Sie die optimale Geometrie der Leitung unter diesen Bedingungen.

2. Sei $P(t)$ eine Profitrate zur Zeit t. Sei $G(t) = \int_0^t P(s)ds$ die Gesamtprofit bis zur Zeit t. Sei $G_0(t)$ das Geld, das bis zum Betrag $G(t)$ über das Zeitintervall $[0, t]$ auf einem Bankkonto mit kontinuierlicher Zinsrate δ wachsen würde, d.h. $G_0(t) = G(t)\mathrm{e}^{-\delta t}$ ist der gegenwärtige Wert vom $G(t)$. Unter den Annahmen dass $G_0(0) = G_0(\infty) = 0$ gelten (d.h. die Gesamtprofit ist anfänglich Null und der gegenwärtige Wert der Gesamtprofit wird Null nach unendlicher Zeit), zeigen Sie:
$$\delta \int_0^\infty G_0(t)dt = \int_0^\infty e^{-\delta t} P(t)dt$$

3. Schreiben Sie einen Mathematica-Code, um das Kostenfunktional zu maximieren
$$J(u) = \int_0^\infty e^{-\delta t}[pqx(t) - c]u(t)dt$$
über Steuerungen der Form,
$$u(t) = \begin{cases} 0, & 0 < t \leq s \\ U, & s < t < \infty \end{cases}$$
und unter der Nebenbedingung,
$$x'(t) = Rx(t)[1 - x(t)/K] - qu(t)x(t), \quad x(0) = K/N, \quad x'(s) = 0$$
Das Ergebnis soll mit der folgenden optimalen Steuerung übereinstimmen:
$$U^* = \frac{R}{4q}\left\{3 - \frac{c}{pqK} + \frac{\delta}{R} - \sqrt{\left(1 + \frac{c}{pqK} - \frac{\delta}{R}\right)^2 + \frac{8c\delta}{pqKR}}\right\}$$
$$s^* = s(U^*), \quad s(U) = \frac{1}{R}\ln\left\{(N-1)\left(\frac{R}{qU} - 1\right)\right\}$$

4. Zwei Länder sollen eine schwindende Ressource teilen. Für jedes Land ist eine faire Menge zum täglichen Verbrauch etabliert worden. Zwei Strategien für jedes Land sind: *Kooperieren* (sich an der fairen Menge anzuhalten) oder *Überlaufen* (so viel wie möglich der Ressource zu verbrauchen). Die täglichen Auszahlungen der zwei Länder können so dargestellt werden:

		Land A	
		Kooperieren	Überlaufen
Land	Kooperieren	(R,R)	(S,T)
B	Überlaufen	(T,S)	(U,U)

wobei die Auszahlungen R, S, T und U erfüllen $T > R > U > S$, $R > (S+T)/2$. Unter der Annahme dass dieses Spiel schon m Mal stattgefunden hat, findet das Spiel am nächten Tag mit Wahrscheinlichkeit p/m (d.h. durch m weil die Ressource schwindend ist). Bestimmen Sie ob beim wiederholten Spielen Kooperieren sich überhaupt auszahlt, und wenn ja, über wie viele Tage soll ein Land kooperieren, um den eigenen Gewinn zu maximieren.

5. Zwei Personen treffen sich in der Wüste und überlegen einen Tausch von zwei Ressourcen x und y, damit ihre Lebenszeiten u_1 und u_2 verlängert werden können. Für die Ressourcen x und y hat die erste Person die Vorräte x_1 und y_1 und die entsprechenden Verbrauchsraten a_1 und b_1, und die zweite Person hat die Vorräte x_2 und y_2 und die entsprechenden Verbrauchsraten a_2 und b_2. Eine Person stibt genau dann, wenn eine eigene Ressource verbraucht worden ist. Die Ressourcen und die Verbrauchsraten sind: $x_i = y_i = 1$, $a_1 = b_2 = 1$, $a_2 = b_1 = 2$. Finden Sie ein Gleichgewicht bei diesem Tausch. Berechnen Sie den optimalen Tausch bei der Nash Schlichtungsstrategie, wenn das *Status Quo* bei dem Tausch ist: nichts tauschen.