

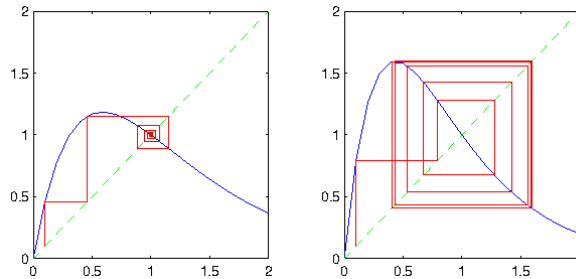
# Mathematische Modellierung SS17, Übungsblatt 6

Ausarbeitung bis 16. Mai 2017

1. Schreiben Sie einen Matlab-Code, der die Iterierten des Lachs-Modells

$$\xi_{n+1} = F(\xi_n) = \xi_n e^{r(1-\xi_n)}$$

für eingegebene  $\xi_0$  und  $r$  ausgibt und so graphisch darstellt:

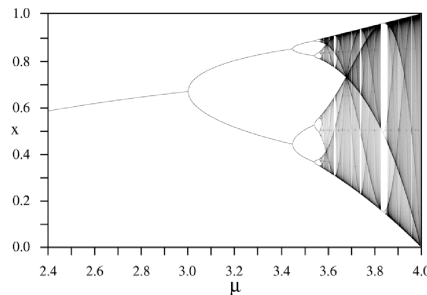


Hier ist  $\xi_0 = 0.1$  für beide Fälle, und  $r = 1.7$  gilt für die linke Graphik während  $r = 2.3$  für die rechte Graphik gilt. Der Grenzwert für die linke Graphik ist  $\xi_{(0)}^* = 1.0$ , und die 2-periodischen Grenzwerte für die rechte Graphik sind  $\xi_{(1)}^* = 0.4078$  und  $\xi_{(2)}^* = 1.5922$ .

2. Für das diskrete logistische Modell,

$$x_{n+1} = \mu x_n (1 - x_n)$$

sei  $\{x_{n,j}^*(\mu) : j = 0, \dots, 2^n - 1\}$  eine  $2^n$ -periodische Lösung für ein gewisses  $\mu$ . Für  $n = 0$  finden Sie die Werte  $\mu_0$  und  $\mu_1$ , wobei es ein stabiles Gleichgewicht  $x_{0,0}^*(\mu)$  für  $\mu_0 < \mu < \mu_1$  gibt. Für  $n = 1$  finde den Wert  $\mu_2$ , wobei es eine stabile 2-periodische Lösung  $\{x_{1,0}^*(\mu), x_{1,1}^*(\mu)\}$  für  $\mu_1 < \mu < \mu_2$  gibt. Stellen Sie die Kurven  $x_{0,0}^*(\mu)$ ,  $\mu_0 < \mu < \mu_1$ ,  $x_{1,0}^*(\mu)$ ,  $\mu_1 < \mu < \mu_2$  und  $x_{1,1}^*(\mu)$ ,  $\mu_1 < \mu < \mu_2$  gemeinsam graphisch dar, um den entsprechenden Teil des folgenden Bifurkationbilds zu sehen.



3. Für das kontinuierliche Verkehrsmodell,

$$x_N = \xi_N(t), \quad x_i''(t + \tau) = u^* \frac{d}{dt} \ln[x_{i+1}(t) - x_i(t)], \quad i = 1, \dots, N - 1$$

seien  $N = 3$ ,  $\tau = 0$ ,  $u^* = u_{\max} / \ln(\rho_{\max} / x_c)$ ,  $\rho^* = \rho_{\max} / e$ . Zeigen Sie, die idealisierte Lösung  $\xi_i(t) = u^* t + (i - 1) / \rho^*$ ,  $i = 1, \dots, N$  ist stabil.

4. Für das diskrete Verkehrsmodell,

$$X_N(n) = \Xi_N(n), \quad M^2 \Delta_n^2 X_i(n) = u^* M \Delta_n \ln[X_{i+1}(n - \sigma) - X_i(n - \sigma)], \quad i = 1, \dots, N - 1$$

seien  $N = 3$ ,  $\sigma = 1$ ,  $u^* = u_{\max}/\ln(\rho_{\max}/x_c)$ ,  $\rho^* = \rho_{\max}/e$ . Leiten Sie eine Bedingung für die Parameter her, mit der die idealisierte Lösung  $\Xi_i(n) = u^* n/M + (i - 1)/\rho^*$  stabil ist.

5. Bonus: Für das diskrete Lachs-Modell,  $\xi_{n+1} = F(\xi_n)$ ,  $F(\xi) = \xi e^{r(1-\xi)}$ , zeigen Sie für  $r > 2$ , es gibt genau drei Fixpunkte  $\nu_1 < 1 < \nu_2$  für  $G(\xi) = F(F(\xi))$ , und es gilt  $|G'(\nu_1)| = |G'(\nu_2)| < 1$  für  $r \in (2, 2 + \epsilon)$  für ein  $\epsilon > 0$ .