Mathematische Modellierung
SS17, Übungsblatt 5

Ausarbeitung bis 1. Mai 2017

1. Entwickeln Sie eine Erweiterung des *Peak Oil* Modells, in der
   (a) das Angebot und die Nachfrage nicht unbedingt zu jeder Zeit gleich bleiben,
   (b) das Kapital nicht unbedingt ju jeder Zeit steigend ist,
   (c) eine Steuerung z.B. des Vorrats verwendet wird, um die Ziele des Monopols optimal zu erreichen.

2. Für das WTC Modell
   (a) bestätigen Sie die Formeln für die jeweiligen Zeiten und Geschwindigkeiten und
   (b) implementieren Sie das Modell, um die Einstellungen zu bestätigen, bei denen die Fallzeit der eines freien Falls entspricht.

3. Das Modell für ein Erdwärmesystem mit 6 Temperaturen (Haus T_H, Austeiler T_A, Speicher T_S, Pumpe T_P, Kollektoren T_K und Erde T_E) sei gegeben:

$$\left\{\begin{array}{rclcl}
\rho_\mathrm{H} c_\mathrm{H} V_\mathrm{H} T_\mathrm{H}' & = & \alpha_\mathrm{A}^\mathrm{H} S_\mathrm{A}^\mathrm{H}(T_\mathrm{A} - T_\mathrm{H}) & + & \alpha_\mathrm{H}^\mathrm{L} S_\mathrm{H}^\mathrm{L}(T_\mathrm{L} - T_\mathrm{H}) \\
\rho_\mathrm{A} c_\mathrm{A} V_\mathrm{A} T_\mathrm{A}' & = & \alpha_\mathrm{A}^\mathrm{H} S_\mathrm{A}^\mathrm{H}(T_\mathrm{H} - T_\mathrm{A}) & + & F_\mathrm{A}(\rho_\mathrm{S} c_\mathrm{S} T_\mathrm{S} - \rho_\mathrm{A} c_\mathrm{A} T_\mathrm{A}) \\
\rho_\mathrm{S} c_\mathrm{S} V_\mathrm{S} T_\mathrm{S}' & = & & & F_\mathrm{A}(\rho_\mathrm{A} c_\mathrm{A} T_\mathrm{A} - \rho_\mathrm{S} c_\mathrm{S} T_\mathrm{S}) \\
 & & & + & F_\mathrm{K}(\rho_\mathrm{K} c_\mathrm{K} T_\mathrm{K} - \rho_\mathrm{P} c_\mathrm{P} T_\mathrm{P}) \\
\rho_\mathrm{K} c_\mathrm{K} V_\mathrm{K} T_\mathrm{K}' & = & \alpha_\mathrm{K}^\mathrm{E} S_\mathrm{K}^\mathrm{E}(T_\mathrm{E} - T_\mathrm{K}) & + & F_\mathrm{K}(\rho_\mathrm{P} c_\mathrm{P} T_\mathrm{P} - \rho_\mathrm{K} c_\mathrm{K} T_\mathrm{K}) \\
\rho_\mathrm{E} c_\mathrm{E} V_\mathrm{E} T_\mathrm{E}' & = & \alpha_\mathrm{K}^\mathrm{E} S_\mathrm{K}^\mathrm{E}(T_\mathrm{K} - T_\mathrm{E}) & + & Q
\end{array}\right.$$

   wobei $T_\mathrm{P} = T_\mathrm{K} - \phi(T_\mathrm{K})$ für eine steigende Funktion ϕ mit den Eigenschaften $\phi(t) \overset{t\to-\infty}{\longrightarrow} 0°\mathrm{C}$ und $\phi(t) \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} 2°\mathrm{C}$. Außerdem gelten $T_\mathrm{S} > T_\mathrm{A}(0) = T_\mathrm{H}(0) > T_\mathrm{K}(0) = T_\mathrm{E}(0) > T_\mathrm{L}$.

   (a) Schätzen Sie realistische Werte für die Parameter ab, implementieren Sie das Modell mit Matlab und entwicklen Sie Funktionen $F_\mathrm{K}(t)$ und $F_\mathrm{A}(t)$ damit $T_\mathrm{H} \in [T_{\min}, T_{\max}]$.
   (b) Für die Parameter,

$$\rho_\mathrm{H} c_\mathrm{H} V_\mathrm{H}, \quad \rho_\mathrm{A} c_\mathrm{A} V_\mathrm{A}, \quad \rho_\mathrm{S} c_\mathrm{S} V_\mathrm{S}, \quad \rho_\mathrm{K} c_\mathrm{K} V_\mathrm{K}, \quad \rho_\mathrm{E} c_\mathrm{E} V_\mathrm{E} = 1$$

$$\rho_\mathrm{A} c_\mathrm{A} F_\mathrm{A}, \quad \rho_\mathrm{S} c_\mathrm{S} F_\mathrm{A}, \quad \rho_\mathrm{K} c_\mathrm{K} F_\mathrm{K}, \quad \rho_\mathrm{E} c_\mathrm{E} F_\mathrm{K} = 1$$

$$\alpha_\mathrm{A}^\mathrm{H} S_\mathrm{A}^\mathrm{H}, \quad \alpha_\mathrm{H}^\mathrm{L} S_\mathrm{H}^\mathrm{L}, \quad \alpha_\mathrm{K}^\mathrm{E} S_\mathrm{K}^\mathrm{E} = 1$$

$$\alpha_\mathrm{H}^\mathrm{L} S_\mathrm{H}^\mathrm{L} T_\mathrm{L} = 1, \quad \rho_\mathrm{P} c_\mathrm{P} F_\mathrm{K} T_\mathrm{P} = 1, \quad Q = 1$$

   leiten Sie ein Gleichgewicht her, und bestimmen Sie ob dieses Gleichgewicht stabil ist. Wenn ja, ist es auch lokal oder sogar global asymptotisch stabil?

(c) Sei $t^\star$ die Laufzeit der Pumpe, die notwendig ist, um eine gezielte Energie $E^\star$ ins Haus zu bringen:

$$E^\star = \rho_K c_K F_K \int_0^{t^\star} \phi(T_K(t, F_K))dt$$

Sei $\phi(T) = 2\min\{\max\{T/T_K(0), 0\}, 1\}$. Zeigen Sie für $Q = 0$, es gilt immer $T_K \in [0, T_K(0)]$, und daher folgt $\phi(T_K) = 2T_K/T_K(0)$. Die obige Gleichung definiert implizit eine Funktion $t^\star = t^\star(F_K)$. Zeigen Sie, $t^{\star\prime}(F_K) < 0$, und daher ist es theoretisch vorteilhaft, dass F_K möglichst groß ist.

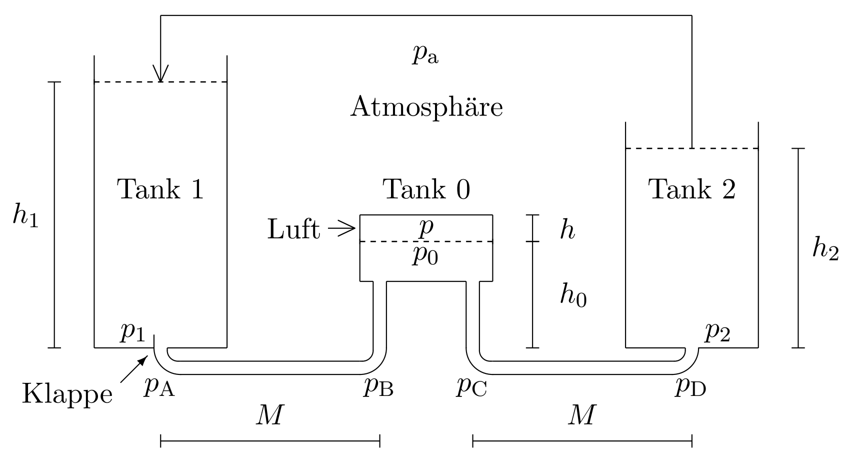
4. Für das folgende Tanksystem sei angenommen:

   (a) die Großenordnung der Zustandsvariablen sind so, dass die Gesetze von Bernoulli und Poiseuille ausreichend gelten,

   (b) es gibt einen Mechanismus, wobei die Höhen h_1 und h_2 konstant bleiben, und

   (c) der Zustand des Systems hat ein Fließgleichgewicht erreicht.

   Leite die Gleichgewicht-Druckverteilung her.



Für das folgende Tanksystem sei angenommen, dass es einen Mechanismus gibt, wobei die Höhen h_1 und h_2 konstant bleiben. Entwickle ein dynamisches Modell für den Zustand des Systems, das nach der Klappenöffnung gelten soll und dessen Fließgleichgewicht mit den Gesetzen von Bernoulli und Poiseuille übereinstimmt.