Mathematische Modellierung
SS17, Übungsblatt 4

Ausarbeitung bis 4. April 2017

1. Für das Räuber-Beute Modell

$$x' = (a_1 - b_1 y)x, \quad y' = (b_2 x - a_2)y$$

zeigen Sie, dass die Lösungskurven in Niveau-Kurve der Funktion

$$P(x, y) = a_2 \ln(x) - b_2 x + a_1 \ln(y) - b_1 y$$

liegen und stellen Sie diese mit Matlab für verschiedene Werte $c = P(x, y)$ graphisch dar. Lösen Sie das System der gewöhnlichen Differentialgleichungen mit Matlab für verschiedene Startwerte (x_0, y_0) und untersuchen Sie die Stabilität des Gleichgewichts $(a_2/b_2, a_1/b_1)$ rechenbetont. Dann zeigen Sie theoretisch, dass das Gleichgewicht stabil ist. Hinweis: Für Stabilität soll man eine Lyapunov Funktion verwenden.

2. Für das Konkurrenz Modell

$$x' = (a_1 - b_1 y)x, \quad y' = (a_2 - b_2 x)y$$

zeigenn Sie, dass die Lösungskurven in Niveau-Kurve der Funktion

$$Q(x, y) = -a_2 \ln(x) + b_2 x + a_1 \ln(y) - b_1 y$$

liegen und stellen Sie diese mit Matlab für verschiedene Werte $c = Q(x, y)$ graphisch dar. Lösen Sie das System der gewöhnlichen Differentialgleichungen mit Matlab für verschiedene Startwerte (x_0, y_0) und untersuchen Sie die Stabilität des Gleichgewichts $(a_2/b_2, a_1/b_1)$ rechenbetont. Dann zeigen Sie theoretisch, dass das Gleichgewicht instabil ist. Hinweis: Für Stabilität soll man eine Jacobi-Matrix verwenden.

3. Schreiben Sie einen Matlab-Code zur Simulation des verallgemeinerten Räuber-Beute Modells,

$$\begin{aligned} x' &= a_1 x \left(1 - \frac{x}{K}\right) - \frac{b_1 x y}{1 + c_1 x} \\ y' &= a_2 y \left(1 - \frac{y}{b_2 x}\right) \end{aligned}$$

und zeigen Sie für gewisse Werte der Parameter einen stabilen Grenzzyklus auf.

4. Gegeben sei das gedämpfte Feder-Masse-Modell,

$$m u''(t) = f - k u(t) - c u'(t)$$

mit Parametern $m = 1$, $k = 1$, $f = 1$ und $c = 3$. Dies wird in die Form eines Systems erster Ordnung so umgeschrieben,

$$\boldsymbol{u}'(t) = A\boldsymbol{u}(t) + \boldsymbol{b}, \quad \boldsymbol{u}(t) = (u(t); u'(t)), \quad A = [0, 1; -k, -c]/m, \quad \boldsymbol{b} = (0; f/m).$$

Zeigen Sie, dass das Gleichgewicht existiert

$$\boldsymbol{u}^\star = (u^\star; 0) = -A^{-1}\boldsymbol{b}$$

und es ist lokal asymptotisch stabil. Dann zeigen Sie, das System kann auch so umgeschrieben werden,

$$\boldsymbol{w}'(t) = A\boldsymbol{w}(t), \quad \boldsymbol{w}(t) = \boldsymbol{u}(t) - \boldsymbol{u}^\star.$$

Um zu zeigen, dass $\boldsymbol{w}^\star = \mathbf{0}$ global asymptotisch stabil ist, leiten Sie eine Funktion $P(\boldsymbol{w})$ her, die erfüllt

$$S^{-\top}S^{-1}A\boldsymbol{w} = -\nabla P(\boldsymbol{w}), \quad AS = S\Lambda, \quad \Lambda = \operatorname{diag}\{\lambda_i\}_{i=1}^{2}$$

und zeigen Sie, dass P zum globalen Minimum in $\boldsymbol{w}^\star = \mathbf{0}$ entlang jeder Lösungskurve $\boldsymbol{w}(t)$ streng fällt.