

Mathematische Modellierung

SS17, Übungsblatt 3

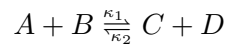
Ausarbeitung bis 28. März 2017

1. Mit Dimensionsanalyse leiten Sie das dritte Keplersche Gesetz her: *Die Quadrate der Umlaufzeiten zweier Planeten verhalten sich wie die Kuben ihrer großen Halbachsen.* (Hinweis: Sehen Sie Seite 19 im Skriptum <http://imsc.uni-graz.at/thaller/lehre/mpt/skriptum.pdf>, und geben Sie Acht, dass die Voraussetzungen des Buckingham Pi Satzes erfüllt sind.)
2. Lösen Sie das Anfangswertproblem analytisch

$$\begin{cases} P'(t) &= \frac{P(t)}{\tau} \left[1 - \frac{P(t)}{K} \right], & t > t_0 \\ P(t_0) &= P_0 \end{cases}$$

und numerisch mit Matlab (wobei die Parameter vom Benutzer eingegeben werden), und vergleichen Sie die Ergebnisse graphisch.

3. Für die chemische reversible Reaktion,

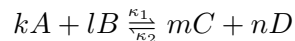


sind die Anfangskonzentrationen

$$[A](0) = 3 \text{ Mol/Liter}, [B](0) = 2 \text{ Mol/Liter}, [C](0) = 1 \text{ Mol/Liter} \text{ und } [D](0) = 0 \text{ Mol/Liter}.$$

Die Reaktionskonstanten sind $\kappa_1 = 2$ (Liter·Minuten/Mol) für die Vorwärtsreaktion und $\kappa_2 = 2$ (Liter·Minuten/Mol) für die Rückwärtsreaktion. Finden Sie die Konzentrationen $[A](t)$, $[B](t)$, $[C](t)$ und $[D](t)$ als Funktionen von der Reaktionszeit t Minuten, und stelle diese gemeinsam graphisch dar. Finde die Gleichgewichtskonzentrationen dieser Chemikalien. Zeige dass diese Gleichgewichte stabil sind.

4. Gegeben sei die chemische Reaktion,



mit folgenden Parametern:

$$k = 2, \quad l = 1, \quad m = 2, \quad n = 1$$

$$[A](0) = 2, \quad [B](0) = 2, \quad [C](0) = 2, \quad [D](0) = 1.$$

Bestimmen Sie das Anfangswertproblem

$$x'(t) = f(x(t); \kappa_1, \kappa_2), \quad x(0) = x_0$$

wobei

$$\begin{aligned} [A](t) &= [A](0) - kx(t), & [B](t) &= [B](0) - lx(t) \\ [C](t) &= [C](0) + mx(t), & [D](t) &= [D](0) + nx(t). \end{aligned}$$

Schreiben Sie die Gleichung $f(x^*; \kappa_1, \kappa_2) = 0$ in die Form um,

$$0 < \kappa_2/\kappa_1 = r(x^*)$$

um eine Beziehung zwischen Gleichgewichten x^* und dem Quotienten κ_2/κ_1 herzuleiten. (Bemerkungen Sie, wegen der Form von r bedeutet die Bedingung $\kappa_2/\kappa_1 > 0$, dass ein Gleichgewicht $x^* \in (-1, 2)$ erfüllen muss.) Zeigen Sie, die Gleichgewichte x^* mit $r'(x^*) < 0$ sind (lokal asymptotisch) stabil, während die Gleichgewichte x^* mit $r'(x^*) > 0$ instabil sind. (Hinweise: Es gilt $f'(x^*; \kappa_1, \kappa_2)/\kappa_1 = 4r'(x^*)(1 + x^*)^3$.) Leite eine entsprechende Potential-Landschaft $p(x, R)$ her, wobei $f(x; \kappa_1, \kappa_2)/\kappa_1 = -p_x(x, \kappa_2/\kappa_1)$. Stellen Sie $p(x, R)$ für verschiedene Werte von R auf dem Intervall $0 \leq x \leq 2$ grafisch dar, um Hysterese für das System zu zeigen.