

# Einführende Mathematische Modellierung

a.o.Univ.Prof. Mag.Dr. Stephen Keeling

<http://math.uni-graz.at/keeling/>

Literatur:

*A Concrete Approach to Mathematical Modelling* von  
Mesterton-Gibbons

Unterlagen:

<http://math.uni-graz.at/keeling/teaching.html>

# Inhaltsverzeichnis I

## Einführung

- Erstes Erlebnis der Modellierung
- Was ist Modellierung?
- Schritte der Modellierung
- Modelltypen
- Zwecke der Modellierung

## Empirische Modelle und Dimensionsanalyse

- Regression
- Lineare Regression
- Robuste Zielfunktionen
- Nicht Lineare Regression
- Die Logistische Funktion
- Einführung in Optimierung
- Parameterabschätzung
- Bevorzugte Eigenschaften eines Modells
- PCA/ICA
- Modelle durch Dimensionsanalyse
- Dimensionslose Form eines Modells
- Theorie der Dimensionsanalyse
- Buckingham Pi Satz
- Bestimmung der Atombombe-Energie

## Deterministische Strukturelle Modelle

- Logistisches Wachstum
- Räuber-Beute
- Strukturelle Stabilität
- Attraktoren und Grenzzyklen
- Konkurrierende Spezies
- Chemische Kinetik
- Das *Peak Oil* Modell
- Das WTC Modell
- Wärmeaufnahme eines Erdwärmesystems
- Parallele Kollektoren
- Wärmeabgabe eines Erdwärmesystems

# Inhaltsverzeichnis II

- Effekt der Luftblasen in Rohren
- Rudern Dynamik
- Diskrete Modelle
- Lachs Dynamik
- Chaos
- Verkehr Dynamik
- Masse-Feder-System
- Reibungskräfte
- Gedämpfte Federschwingungen

## Langzeitverhalten eines Modells

- Gleichgewichte und Attraktoren
- Stabilität eines Gleichgewichts
- Grenzyklen
- Stabilität für Kontinuierliche Dynamische Systeme
- Stabilität für Diskrete Dynamische Systeme
- Stabilität einer Dynamischen Lösung
- Stabilität für Verkehr Dynamik
- Weitere Bifurkationen und Grenzyklen
- Seltsame Attraktoren für chaotische Systeme

## Modelle für Optimierung eines Systems

- Vorteil von Doppelverglasung
- Einführung in die Strömungsmechanik
- Vorteil von kreisförmigen Rohren
- Optimale Steuerung und Utilität
- Optimierung einer Fischfangflotte
- Einführung in die Spieltheorie
- Gemischte Strategien
- Umweltpolitik
- Entscheidungstheorie
- Nash Gleichgewicht
- Pareto Optimalität
- Sicherheitsstrategien
- Gefangenendilemma

# Inhaltsverzeichnis III

Evolutionär Stabile Strategien  
Nash Verhandlungsschema

## Stochastische Modelle

Stochastische Prozesse  
Markovsche Eigenschaft und Bayessche Regel  
Populationsdynamik  
Todesprozess  
Geburtsprozess  
Poissonsche Verteilung  
Länge einer Warteschlange  
Wartezeit bei der Warteschlange  
Diskrete Probabilistische Modelle  
Optimale Entscheidung  
Optimalen Warenkauf

# Erstes Erlebnis

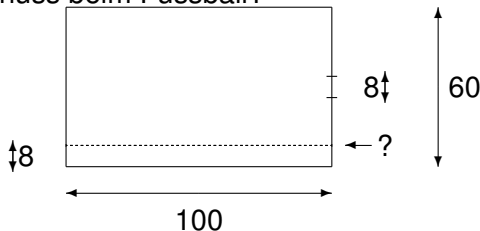
## ▶ *Supersize Me!*

- ▶ Ein Mann isst nur beim McDonalds
  - ▶ 30 Tage lang, dreimal täglich
  - ▶ jedes Produkt mindestens einmal,
  - ▶ zum “Supersize?” antwortet er immer “Ja”,
  - ▶ weniger als 5000 Schritte täglich,
  - ▶ konsumiert ungefähr 5000 kcal/Tag

Er nimmt zu: 84kg → 95.5kg.

- ▶ Hätte man die Zunahme voraussagen können?
- ▶ Wenn er fortgesetzt hätte, was wäre das Gleichgewicht gewesen?

## ▶ Bester Schuss beim Fussball?



An welcher Stelle soll geschossen werden?

# Lösungsmöglichkeiten

## ► *Supersize Me!*

- Massenerhaltung: Änderungsrate = Zufluss - Abfluss

$$\frac{dm}{dt} = z - a$$

- Daumenregel: kcal-Bedarf/Tag  $\approx \phi m$ ,  $\phi = 21.6$ .

- Wenn  $m' = 0$ ,

$$z = a = \frac{m(\text{kg}) \cdot \phi \left( \frac{\text{kcal}}{\text{kg} \cdot \text{Tag}} \right)}{\kappa \left( \frac{\text{kcal}}{\text{kg}} \right)} \quad \frac{\text{kg}}{\text{Tag}}$$

- Konversionsfaktor  $\kappa = ?$

Fett  $9 \frac{\text{kcal}}{\text{g}}$ , Kohlenhydrate  $4 \frac{\text{kcal}}{\text{g}}$ , Eiweiss  $4 \frac{\text{kcal}}{\text{g}}$

McDonalds Mischung:  $7.8 \frac{\text{kcal}}{\text{g}} = 7800 \frac{\text{kcal}}{\text{kg}}$ ,  $\kappa = 7800$ .

- Gegeben:

$$\epsilon = 5000, \quad z = \frac{\epsilon \frac{\text{kcal}}{\text{Tag}}}{\kappa \frac{\text{kcal}}{\text{kg}}} \quad \frac{\text{kg}}{\text{Tag}}$$

- Mathematisches Modell:

$$\frac{dm}{dt} = \frac{\epsilon}{\kappa} - \frac{m\phi}{\kappa}, \quad m(0) = m_0 = 84, \quad m(30) = ?$$

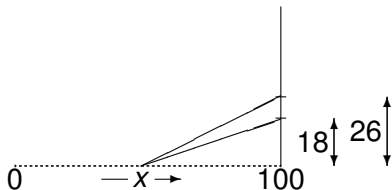
- Lösung:

$$m(t) = \epsilon/\phi + (m_0 - \epsilon/\phi)e^{-\phi t/\kappa}, \quad m(30) \approx 95.7$$

- Gleichgewicht:  $m(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \epsilon/\phi \approx 231.5\text{kg!}$

# Lösungsmöglichkeiten

- ▶ Bester Schuss beim Fussball?



- ▶ Zielfunktion ist der Winkel

$$z(x) = \tan^{-1} \left( \frac{26}{100-x} \right) - \tan^{-1} \left( \frac{18}{100-x} \right)$$

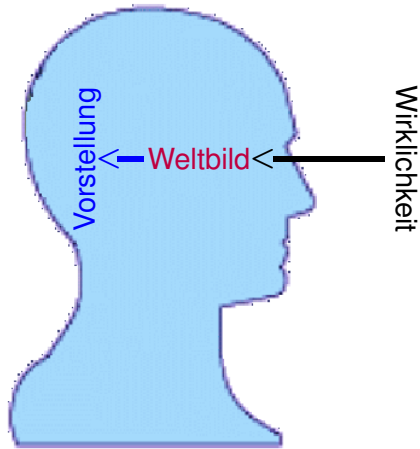
- ▶ Optimalitätsbedingung,

$$\begin{aligned} z'(x) &= \frac{\frac{26}{(100-x)^2}}{1 + \left(\frac{26}{100-x}\right)^2} - \frac{\frac{18}{(100-x)^2}}{1 + \left(\frac{18}{100-x}\right)^2} \\ &= \frac{8(9532 - 200x + x^2)}{(10324 - 200x + x^2)(10676 - 200x + x^2)} \end{aligned}$$

- ▶ Kritische Punkte:  $x = 2(50 \pm 3\sqrt{13})$ ,  $100 \pm 18i$ ,  $100 \pm 26i$ .
- ▶ Im Intervall  $[0, 100]$ ,

$$x^* = 2(50 - 3\sqrt{13}) \approx 78.4.$$

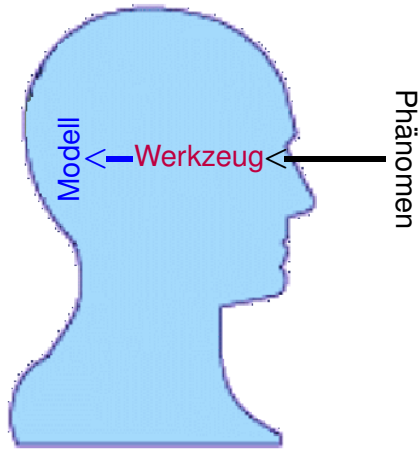
# Was ist Modellierung? Alltäglich...



Vorstellung – Wirklichkeit = ?



# Was ist Modellierung? Mathematisch...



Modell – Phänomen = ? Nah genug?

# Was ist Modellierung?

- ▶ Erste Antwort: Jeder modelliert täglich.
  - ▶ Ein neugeborenes Kind wird zuerst mit Wahrnehmungen überflutet.
  - ▶ Langsam müssen diese Wahrnehmungen effizienter bearbeitet werden, damit das Kind funktionieren kann.
  - ▶ Die Welt wird vereinfacht: Je nach Annahmen werden die meisten Details weggekehrt, die wichtigsten Sachen betont.
  - ▶ Der Mensch entwickelt ein *Weltbild* – einen Filter – mit dem die Wirklichkeit in eigene Vorstellungen abgebildet wird.
  - ▶ Ob die Abbildung exakt ist, ist nicht wichtig, sondern ob sie für gewisse Zwecke ausreichend genau ist.
- ▶ Mathematische Modellierung:
  - ▶ Ähnlich wird ein Phänomen durch den Filter des eigenen mathematischen Werkzeugs in ein *Modell* abgebildet.
  - ▶ Ob die Abbildung exakt ist, ist nicht wichtig, sondern ob sie für gewisse Zwecke ausreichend genau ist.
- ▶ Praktisches Beispiel: Wie fährt man von A nach B in Graz?
  - ▶ Das genaueste Modell ist die Stadt Graz selbst.
  - ▶ Ein Stadtplan oder eine Skizze reichen für das Ziel.

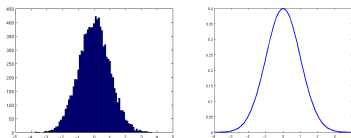
# Was ist Modellierung?

- ▶ Denkweise aufzugeben: *Die Gleichungen in Lehrbüchern stellen entdeckte natürliche Gesetze dar.*
- ▶ Unbedingt gültig?

$$E = mc^2 \quad \text{oder} \quad F = ma \quad ?$$

Newtonsche Physik ist mit Einsteinscher Physik aktualisiert worden.

- ▶ Beispiel: Proben  $\mathbf{x} = \{x_i\}$  der Aussentemperatur werden gemessen und mit einem Histogramm dargestellt:



Existiert unbedingt eine Zufallsvariable  $X$  mit einer stetigen Wahrscheinlichkeitsdichte, die vom Histogramm angenähert wird?

- ▶ Hauptpunkt: Diese Beschreibungen sind nur provisorische *Modelle*, die Gültigkeitsgrenzen haben.

# Schritte der Modellierung

## 1. Definition eines physikalischen Systems

- ▶ Innen, Aussen, Rand, Tausch, Annahmen, z.B.
  - ▶ Heizung in einem Haus wird in  $t_0 = 0$  ausgeschaltet.
  - ▶ Ortsunabhängige Innentemperatur ist  $T(t)$  und
  - ▶ Konstante Aussentemperatur ist  $T_\infty < T(t_0) = T_0$ .
  - ▶ Keine Heizquellen, keine Heizsenken.
  - ▶ Wärmetausch am Rand des Hauses.
  - ▶ Zuerst einfach, später komplizierter, je nach Bedarf.
- ▶ Fragestellung, z.B.  
Zeitdauer bis die Haustemperatur  $100(1 - p)\%$  ihres Wegs zur Aussentemperatur sinkt?

(Weitere Frage: Soll man über einen Urlaub heizen?)

# Schritte der Modellierung

## 2. Symbolische Beschreibung des Systems

- ▶ Prinzip, z.B. Mengenbilanz, Erhaltungssatz,

$$\text{Änderungsrate} = \begin{matrix} \text{innere} \\ \text{Änderungsrate} \end{matrix} = \begin{matrix} \text{hinein über} \\ \text{den Rand} \end{matrix} - \begin{matrix} \text{heraus über} \\ \text{den Rand} \end{matrix} + \begin{matrix} \text{innere} \\ \text{Quellen} \end{matrix} - \begin{matrix} \text{innere} \\ \text{Senken} \end{matrix}$$

Für das Haus besagt das Newtonsche Abkühlungsgesetz:

$$\text{Energieänderung im Haus} \propto \text{Temperaturdifferenz zwischen innen und aussen}$$

- ▶ Mathematische Formulierung. Newtonsches Abkühlungsgesetz beschreibt Diffusion so:

$$E'(t) \propto [T_{\infty} - T(t)]$$

oder mit  $E(t) = \rho c V T(t)$ ,  $\alpha = \lambda / \delta$ ,

$$\rho c V T'(t) = \alpha A [T_{\infty} - T(t)], \quad T(t_0) = T_0$$

$\rho$  = Dichte  
 $c$  = spezifische Wärmekapazität  
 $V$  = Volumen  
 $\alpha$  = Wärmeübergangskoeffizient  
 $A$  = Grenzflächeninhalt  
 $\lambda$  = Wärmeleitfähigkeit  
 $\delta$  = Wanddicke

- ▶ Antwort zur Fragestellung:  $t^* = ?$ ,  $T(t^*) - T_{\infty} = \rho [T_0 - T_{\infty}]$ .

# Schritte der Modellierung

## 3. Lösung des mathematischen Modells

- ▶ Lösung, analytisch:

$$\rho c V T'(t) = \alpha A [T_\infty - T(t)], \quad T(0) = T_0$$

Analytische Lösung (siehe Mathematica):

$$T(t) = T_\infty + (T_0 - T_\infty) \exp[-\alpha A t / (\rho c V)]$$

- ▶ Lösung, numerisch (wenn analytisch nicht praktisch):

Gitter:  $t_0, t_1, \dots$ , oder  $t_k = k \Delta t$ ,  $k = 0, 1, \dots$

$$T'(t) \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{T(t + \Delta t) - T(t)}{\Delta t} \Rightarrow T'(t_k) \approx \frac{T(t_{k+1}) - T(t_k)}{\Delta t}$$

Mit  $T_k \approx T(t_k)$ ,

$$\frac{(T_{k+1} - T_\infty) - (T_k - T_\infty)}{\Delta t} = \frac{T_{k+1} - T_k}{\Delta t} = -\frac{\alpha A}{\rho c V} (T_k - T_\infty)$$

Mit  $\tau = \rho c V / (\alpha A)$ ,

$$T_{k+1} - T_\infty = (1 - \tau^{-1} \Delta t) (T_k - T_\infty), \quad k = 1, 2, \dots$$

Numerische Lösung (siehe Matlab):

$$T_k = T_\infty + (1 - \tau^{-1} \Delta t)^k (T_0 - T_\infty)$$

# Schritte der Modellierung

## 4. Untersuchung des mathematischen Modells

- ▶ Qualitative Untersuchung:

$$\rho c V T'(t) = \alpha A [T_\infty - T(t)], \quad T(0) = T_0$$

Macht die Lösung

$$T(t) = T_\infty + (T_0 - T_\infty) \exp[-\alpha A t / (\rho c V)]$$

überhaupt sinn? Grafik von  $e^{-t/\tau}$ ,  $\tau > 0$ ?

Gleichgewicht?

$$0 = T' = \frac{\alpha A}{\rho c V} [T_\infty - T] \Rightarrow T = T_\infty$$

Stabilität?

$$\forall T_0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} T(t) = T_\infty$$

# Schritte der Modellierung

## 5. Vergleich mit dem physikalischen System

- ▶ Antwort zur Fragestellung:

$$T(t) = T_{\infty} + (T_0 - T_{\infty}) \exp[-\alpha A t / (\rho c V)]$$

100(1 - p)% des Wegs zum  $T_{\infty}$ ,  $T(t^*) - T_{\infty} = p[T_0 - T_{\infty}]$ :

$$p[T_0 - T_{\infty}] = T(t^*) - T_{\infty} = [T_0 - T_{\infty}] \exp[-\alpha A t^* / (\rho c V)]$$

Nach  $t^*$  auflösen,

$$-\ln(p^{-1}) = \ln(p) = -\frac{\alpha A t^*}{\rho c V} \quad \Rightarrow \quad t^* = \frac{\rho c V}{\alpha A} \ln\left(\frac{1}{p}\right)$$

- ▶ Stimmt mit Daten überein? Wenn es Schwingungen in Messdaten gibt, sind diese zufällige Messfehler oder systematische Abweichungen vom Modell?
- ▶ Wenn es übereinstimmt, ist Modell vielleicht voraussagefähig. Sonst sind Verbesserungen notwendig, z.B. Verfeinerungen der Kompartimente, Heizquellen, Heizsenken.



# Modelltypen

## ▶ Strukturelle Modelle

- ▶ Beziehungen zwischen Komponenten werden betrachtet.

- ▶ Beispiel (oben): Temperatur im Haus

$$T(t) = T_{\infty} + (T_0 - T_{\infty}) \exp[-\alpha At / (\rho c V)].$$

- ▶ Beispiel (unten): Fall eines Steins

$$x'' = -g, x(0) = h, x'(0) = 0 \Rightarrow x(t) = -gt^2/2 + h.$$

$$x(\tau) = 0 \Rightarrow \tau = \sqrt{2h/g} \Rightarrow v = -x'(\tau) = \sqrt{2gh}.$$

## ▶ Empirische Modelle

- ▶ Gemessene Daten  $\{(t_n, T_n)\}_{n=1}^N$ ,

$$\text{empirische Kurve } T(t; a, b, c) = a + be^{ct}.$$

- ▶ Parameterbestimmung durch Minimierung der Funktion

$$E(a, b, c) = \sum_{n=1}^N [T(t_n; a, b, c) - T_n]^2.$$

## ▶ Modelle durch Dimensionsanalyse

- ▶ Aufprallsgeschwindigkeit  $v$  eines fallenden Steins?

Masse  $m$ , Höhe  $h$ , Fallzeit  $\tau$ , Beschleunigung  $g$ .

- ▶ Dimensionsanalyse:  $v = f(h, m, g, \tau)$ . (L/Z, L, M, L/Z<sup>2</sup>, Z)

Dimensionsrichtige Möglichkeiten:  $v = k\sqrt{gh}$ ,  $v = k'g\tau$ ,  
 $v = k''h/\tau$ , wobei  $k, k', k''$  dimensionslos sind.

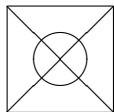
# Modelltypen

## ▶ Deterministisch

- ▶ Beispiele (oben): Temperatur im Haus und Fall eines Steins
- ▶ Beispiel: Thermodynamik mit makroskopischen Eigenschaften, z.B. Druck, Temperatur, Dichte
- ▶ Beispiel: Entdeckung von Schätzen in einer Landschaft
  - ▶  $\beta$  = Bruchteil der Fläche mit Schätzen.
  - ▶  $E(t)$  = Anzahl der durch zufälliges Wandern entdeckten Schätzen bis zur Zeit  $t$ .
  - ▶ Modell:  $E' = \beta$ ,  $E(0) = 0 \Rightarrow E(t) = \beta t$ .

## ▶ Stochastisch

- ▶ Beispiel: Statistische Mechanik mit mikroskopischen Eigenschaften, z.B. Positionen und Geschwindigkeiten von Molekülen, Kollisionen, Kräfte
- ▶ Beispiel: Entdeckung von Schätzen in einer Landschaft
  - ▶  $p_n(t)$  = Wahrscheinlichkeit dass  $n$  in  $t$  schon gefunden
  - ▶  $P(n_t \rightarrow (n+1)_{t+dt}) = \beta dt, \forall n$
  - ▶  $P(n_t \rightarrow n_{t+dt}) = 1 - P(n_t \rightarrow (n+1)_{t+dt}) \cdots = 1 - \beta dt$
  - ▶  $p_n(t+dt) = P(n_t \rightarrow n_{t+dt}) \cdot p_n(t)$  (Bayes)  
+  $P((n-1)_t \rightarrow n_{t+dt}) \cdot p_{n-1}(t)$  + vernachlässigbar
  - ▶  $p_n(t+dt) = (1 - \beta dt)p_n(t) + \beta dt p_{n-1}(t)$



# Modelltypen

## ▶ Stochastisch

### ▶ Beispiel: Entdeckung von Schätzen in einer Landschaft

- ▶  $p_n(t + dt) = (1 - \beta dt)p_n(t) + \beta dt p_{n-1}(t)$
- ▶  $p'_n(t) \leftarrow [p_n(t + dt) - p_n(t)]/dt = -\beta p_n(t) + \beta p_{n-1}(t)$
- ▶ Erwartungswert der gefundenen Schätze in  $t$  ist  
 $E(t) = \sum_{n=0}^{\infty} n p_n(t) = \sum_{n=1}^{\infty} n p_n(t)$
- ▶ Lösungen  $\{p'_n(t)\}_{n=0}^{\infty}$  stetig und Summen gleichmäßig konvergent bedeutet

$$\begin{aligned} E'(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} n p'_n(t) = -\beta \sum_{n=1}^{\infty} n p_n(t) + \beta \sum_{n=1}^{\infty} n p_{n-1}(t) \\ &= -\beta E(t) + \beta \sum_{n=1}^{\infty} (n-1) p_{n-1}(t) \Big|_{=E(t)} + \beta \sum_{n=1}^{\infty} p_{n-1}(t) \Big|_{=1} \end{aligned}$$

oder  $E'(t) = \beta$ , und  $E(0) = 0 \Rightarrow E(t) = \beta t$ .

- ▶ So entstehen makroskopische Größen durch Erwartungswerte von mikroskopischen stochastischen Größen.

# Modelltypen

## ▶ Konzentrierte Parameter

- ▶ Wird angenommen, dass gewisse Ortsabhängigkeiten vernachlässigt werden können.
- ▶ Beispiel: Die Innentemperatur  $T(t)$  im Haus zur Zeit  $t$  erfüllt das Newtonsche Abkühlungsgesetz ( $\alpha = \lambda/\delta$ ),

$$\rho c V T'(t) = \alpha A [T_\infty - T(t)], \quad T(0) = T_0$$

- ▶ Solche Modelle werden üblicherweise mit gewöhnlichen Differentialgleichungen beschrieben.

## ▶ Verteilte Parameter

- ▶ Ortsabhängigkeiten werden nicht vernachlässigt.
- ▶ Beispiel: Die Innentemperatur  $T(t, \mathbf{x})$  im Haus zur Zeit  $t$  und an der Stelle  $\mathbf{x}$  erfüllt die Wärmeleichung,

$$\rho c T_t = \nabla \cdot (\lambda \nabla T), \quad T(t, \text{Wand}) = T_\infty(\text{Wand}), \quad T(0, \mathbf{x}) = T_0(\mathbf{x})$$

wobei die Wärmeleitfähigkeit  $\lambda = \lambda(\mathbf{x})$  kleiner in der Mauer und größer in der Luft ist.

$$\text{Temperaturleitfähigkeit} = a = \lambda / (\rho c)$$

- ▶ Solche Modelle werden üblicherweise mit partiellen Differentialgleichungen beschrieben.

# Modelltypen

## ▶ Dynamische Modelle

### ▶ Zeitlich kontinuierliche Modelle

- ▶ Evolution hängt von Zeit kontinuierlich ab.

- ▶ Beispiel: Logistisches Wachstum,

$$P'(t) = \alpha P(t)[K - P(t)]$$

Lösungen sind einfach S-förmig.

### ▶ Zeitlich diskrete Modelle

- ▶ Zustand springt diskret zur nächsten Generation.

- ▶ Beispiel: Logistische Evolution,

$$P_{n+1} = \tilde{\alpha} P_n [\tilde{K} - P_n]$$

Lösungen könnten periodisch sogar chaotisch sein!

## ▶ Statische Modelle

- ▶ Zustand hängt von Zeit nicht ab.

- ▶ Beispiel: Eine Membran mit der Spannung  $T$  ist am Rand eingespannt und mit der Last  $f(\mathbf{x})$  im Inneren belastet.

Die Poissongleichung ist ein verteiltes Modell für die Verformung  $u(\mathbf{x})$ ,

$$-T\Delta u = f, \quad u(\text{Rand}) = 0$$

# Zwecke der Modellierung

- ▶ Vor allem die motivierende Fragestellung zu beantworten.
  - ▶ Zeitdauer bis die Raumtemperatur  $100(1 - p)\%$  ihres Wegs zur Aussentemperatur sinkt?
- ▶ Das modellierte System besser zu verstehen.
  - ▶  $t^* = \ln(1/p)\rho cV/(\alpha A)$ .  
Effekt der Dämmung? Hausoberfläche?
- ▶ Systemparameter zu schätzen.
  - ▶ Bestimmung von  $\rho cV/(\alpha A)$ ? von  $\alpha$ ?
- ▶ Das modellierte System zu steuern oder optimieren.
  - ▶ Oberfläche  $A$  minimieren?
- ▶ Optimale Steuerung
  - ▶ Wie viele Boote einer Flotte sollen in Betrieb sein?
- ▶ Optimale Entscheidung
  - ▶ Wie viele Waren sollen gekauft und gelagert werden?
  - ▶ Soll man eine Fahrkarte kaufen?

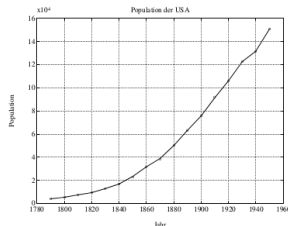
# Empirische Modelle

- ▶ Beispiel: Voraussage des Bevölkerungswachstums

Population  
der USA

Gegeben seien

$$\{(t_i, P_i)\}_{i=1}^N$$



- ▶ Mögliche Modelle
  - ▶  $P(t) = kt + d$  (linear)
  - ▶  $P(t) = Ce^{kt}$  (exponentiell)
  - ▶  $P(t) = K/[1 + \exp(-(t - t_0)/\tau)]$  (logistisch)
- ▶ Für das lineare Modell,  $P(t; k, d) = kt + d$ , kann man die Zielfunktion leicht minimieren,

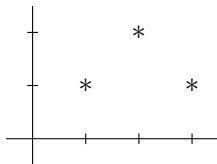
$$E(k, d) = \sum_{i=1}^N |P(t_i; k, d) - P_i|^2$$

# Lineare Regression

- ▶ **Hausaufgabe:** Zeige,  $E$  wird global minimiert in

$$k^* = \frac{\overline{t \cdot P} - \bar{t} \cdot \bar{P}}{\overline{t^2} - \bar{t}^2}, \quad d^* = \bar{P} - k\bar{t}, \quad \text{z.B. } \overline{t \cdot P} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N t_i P_i$$

- ▶ Einfaches Beispiel in dem die Regressionsgerade klar ist?



$$k = 0, d = 4/3$$

- ▶ Für die Zielfunktion

$$E(k, d) = \left[ \sum_{i=1}^N |P(t_i; k, d) - P_i|^p \right]^{\frac{1}{p}} \quad \|\mathbf{x}\|_{\ell_\infty} = \max_{1 \leq i \leq N} |x_i|$$

$$\|\mathbf{x}\|_{\ell_p} = \left[ \sum_{i=1}^N |x_i|^p \right]^{\frac{1}{p}}$$

soll mit  $p = 1, 2$  oder  $\infty$  minimiert werden?

- ▶ Leichter zu lösen mit  $p = 2$ , aber  $p = 1$  ist robuster!



# Robuste Zielfunktionen

**Hausaufgabe:** Für  $\mathbf{e} = \langle 1, \dots, 1 \rangle$ ,  $\mathbf{f} = \langle a, b, \dots, b \rangle \in \mathbb{R}^{n+1}$   
zeige

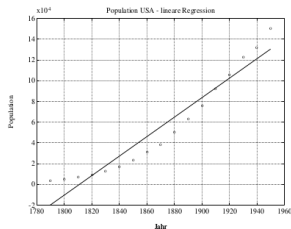
$$\frac{a + nb}{1 + n} = \arg \min_{c \in \mathbb{R}} \|\mathbf{f} - c\mathbf{e}\|_{\ell_2}^2 \quad \text{während} \quad b = \arg \min_{c \in \mathbb{R}} \|\mathbf{f} - c\mathbf{e}\|_{\ell_1}$$

Botschaft: Die  $\|\cdot\|_{\ell_2}$ -Norm läßt sich von Ausreißern beeinflussen, die  $\|\cdot\|_{\ell_1}$ -Norm aber weniger.

- ▶ Das empirische Ergebnis,

Population  
der USA

approximiert durch  
lineare Regression



weist systematische Abweichungen auf!

- ▶ Das lineare Modell ist daher nicht geeignet.

# Exponentielle Regression

- ▶ Für das exponentielle Modell,  $P(t; k, C) = Ce^{kt}$ , kann man die Zielfunktion minimieren,

$$E(k, C) = \sum_{i=1}^N |P(t_i; k, C) - P_i|^2$$

aber eine andere Regressionslösung kann leichter berechnet werden.

- ▶ Mit der Transformation,

$$Q(t; k, d) = \ln P(t; k, C) = \ln C|_{=d} + kt$$

kann man die Zielfunktion

$$F(k, d) = \sum_{i=1}^N |Q(t_i; k, d) - \ln P_i|^2$$

leicht minimieren:

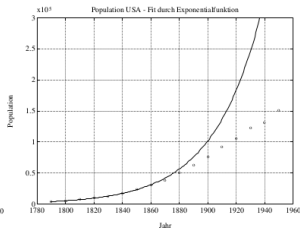
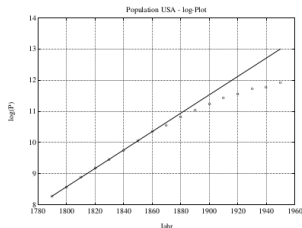
$$k = \frac{\bar{t} \cdot \ln \bar{P} - \bar{t} \cdot \overline{\ln P}}{\bar{t}^2 - \overline{t^2}}, \quad d = \overline{\ln P} - k\bar{t}, \quad C = e^d$$

- ▶ Bemerke, die minimierende Lösung für  $F$  ist nicht notwendigerweise die minimierende Lösung für  $E$ !

# Nicht Lineare Regression

- ▶ Das empirische Ergebnis,

Population  
der USA  
approximiert durch  
lineare Regression  
von exponentiell  
transformierten Daten



weist systematische Abweichungen auf!

- ▶ Das exponentielle Modell ist daher nicht geeignet.
- ▶ Für das logistische Modell,

$$P(t; K, t_0, \tau) = K / [1 + \exp(-(t - t_0)/\tau)]$$

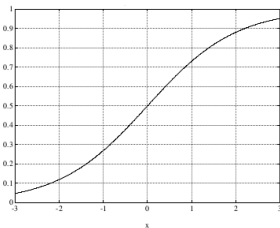
kann man die Zielfunktion minimieren,

$$E(K, t_0, \tau) = \sum_{i=1}^N |P(t_i; K, t_0, \tau) - P_i|^2$$

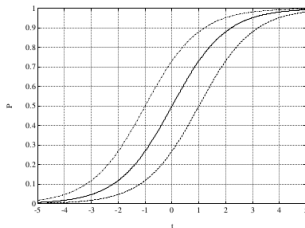
aber Optimierungsmethoden sind dafür notwendig.

# Die Logistische Funktion

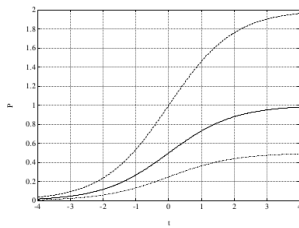
- Qualitative Eigenschaften:



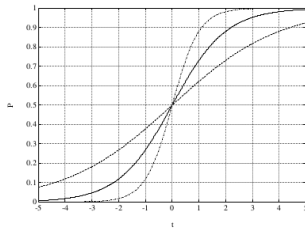
$$P(t; K, t_0, \tau) = K / [1 + \exp(-(t - t_0)/\tau)]$$



$t_0$  variiert



$K$  variiert



$\tau$  variiert

- $K$  = Kapazität,  $(t_0, K/2)$  = Wendepunkt,  $\tau$  = Zeitskala

# Einführung in Optimierung

- ▶ Beispiel:

$$f(x, y) = \frac{1}{4}x^2 + y^2$$

- ▶ Niveau-Kurven:  $f(x, y) = \text{Konstante}$ .
- ▶ Gradient:

$$\nabla f(x, y) = \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x/2 \\ 2y \end{bmatrix}$$

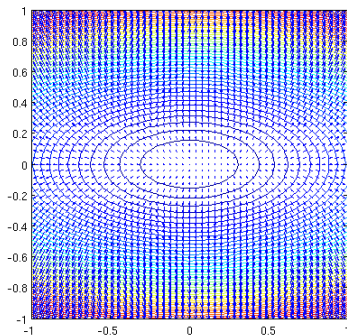
steht senkrecht auf einer  
Niveau-Kurve.

- ▶ Abstiegsverfahren:  $\mathbf{x} = \langle x, y \rangle^T$

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k - \alpha \nabla f(\mathbf{x}_k)$$

wobei  $\alpha$  ausgewählt wird,  
sodass  $f(\mathbf{x}_{k+1}) < f(\mathbf{x}_k)$ .

- ▶ Das Verfahren verlangt Zugang zum  $\nabla f$ , und es kann in einem lokalen Minimum eingefangen werden.

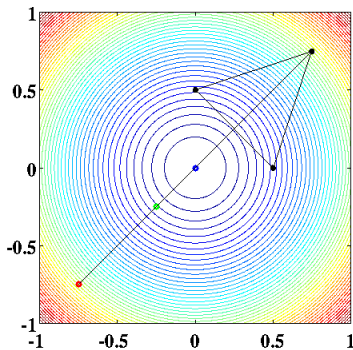


# Nelder-Mead Verfahren

- ▶ Das Verfahren heisst auch *Simplex Verfahren*, besonders in höheren Dimensionen. MATLAB: `fminsearch`.
- ▶ Beispiel: In  $\mathbb{R}^2$  beginnt man mit 3 Startpunkten, z.B.

$$\mathbf{x}_1 = \left(\frac{3}{4}, \frac{3}{4}\right), \quad \mathbf{x}_2 = \left(0, \frac{1}{2}\right), \quad \mathbf{x}_3 = \left(\frac{1}{2}, 0\right)$$

und wertet aus,  $f(\mathbf{x}_1) > f(\mathbf{x}_2) = f(\mathbf{x}_3)$ . (Konturen unbekannt)



Mit dem Mittelpunkt

$$\mathbf{x}_m = \frac{\mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_3}{2}$$

sind die nächsten vernünftigen Proben:

$$\mathbf{x}_m - \frac{1}{2}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_m)$$

$$\mathbf{x}_m - (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_m)$$

und

$$\mathbf{x}_m - 2(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_m)$$

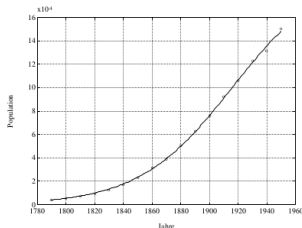
Es wird ersetzt  $\mathbf{x}_1 \leftarrow \mathbf{x}_m - \frac{1}{2}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_m)$ , dann neu gestartet, usw.

# Nelder-Mead Verfahren

- ▶ Das Verfahren hat Schwierigkeiten, wenn die Simplizen nicht regulär sind, d.h. sehr dünn oder sehr flach.
- ▶ Deswegen sollen die Größenordnungen der Parameter durch eine Skalierung vergleichbar gemacht werden.
- ▶ Beispiel: Für die Bevölkerungsdaten,  $K \approx 180000$   
Wendepunkt =  $(t_0, K/2) \approx (1910, 90000)$ ,  $t_0 \approx 1910$   
 $4000 = P(1790) \approx 180000e^{(1790-1910)/\tau}$ ,  $\tau \approx 30$
- ▶ Mit den Optimierungsparametern  $x_1$ ,  $x_2$  und  $x_3$   
 $K = x_1 \cdot 10^5$ ,  $t_0 = x_2 \cdot 10^3$ ,  $\tau = x_3 \cdot 10^1$   
 $t = [\dots]$ ,  $P = [\dots]$ ,  $f = K./(1 + \exp(-(t - t_0)/\tau))$   
 $E = \text{sum}((f - P).^2)$
- ▶ Das empirische Ergebnis,

$$K \approx 200070$$
$$t_0 \approx 1915.8$$
$$\tau \approx 32.496$$

passt ziemlich gut.



# Parameterbestimmung durch Regressionsanalyse

- ▶ Eine chemische Reaktion läuft ab, und chemische Daten  $\{(t_j, u_j)\}_{j=1}^N$  werden gemessen: Konzentration  $u_j$  (in Mol pro Liter) zur Zeit  $t_j$ .

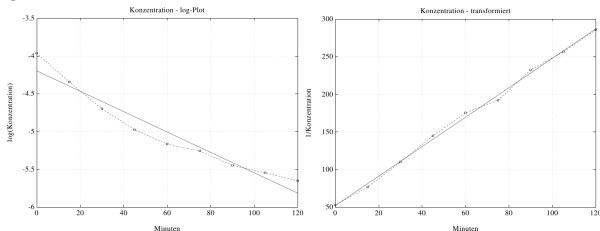
$t$	0	15	30	45	60	75	90	105	120
$u(t)$	0.0190	0.0130	0.0091	0.0069	0.0057	0.0052	0.0043	0.0039	0.0035

- ▶ Die *Ordnung* ( $m$ ) einer Reaktion:
  - ▶  $m = 1$ :  $U \rightarrow \tilde{U}$  ( $u' = -ku$ )
  - ▶  $m > 1$ :  $mU \rightarrow U_m$  ( $u' = -\kappa u^m$ )
- ▶ Das empirische Modelle für eine Reaktion  $m$ ter Ordnung:
  - ▶  $m = 1$ :  $u(t) = Ce^{-kt}$ .
  - ▶  $m > 1$ :  $u(t) = (kt + d)^{-\frac{1}{m-1}}$ . ( $\kappa = k/(m-1)$ )
  - ▶ Bemerkung:  $\lim_{m \rightarrow 1} [(m-1)kt + u_0^{1-m}]^{-\frac{1}{m-1}} = u_0 e^{-kt}$ .
- ▶ Die Ordnung der obigen Reaktion soll bestimmt werden.
- ▶ Regression kann durch Transformationen für jede Ordnung durchgeführt werden.
  - ▶  $m = 1$ :  $\ln u(t) = \ln C - kt$ .
  - ▶  $m > 1$ :  $u(t)^{1-m} = kt + d$ .



# Parameterbestimmung durch Regressionsanalyse

- ▶ Die Ergebnisse für  $m = 1$  und  $m = 2$ :



$\{(t_i, \ln u_i)\}_{i=1}^N$  links und  $\{(t_i, 1/u_i)\}_{i=1}^N$  rechts.

- ▶ Für  $m = 1$  sind die Datenpunkte um die Regressionsgerade nicht zufällig gestreut.
- ▶ Für  $m = 2$  sind sie schon zufällig gestreut, aber
- ▶ Übungsbeispiel: noch besser für  $m = 3$ ?
- ▶ Maße der Datenanpassung:  $\|\text{Abstände}\|_{\ell_2}$ ,  $\|\text{Abstände}\|_{\ell_1}$ , Korrelationskoeffizient für die Daten  $\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^N$ ,

$$r = \frac{\overline{x \cdot y} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{[\overline{x^2} - \bar{x}^2]^{1/2} [\overline{y^2} - \bar{y}^2]^{1/2}}, \quad r^2 \rightarrow 1 \Rightarrow \text{perfekte Anpassung.}$$

# Ein Gutes Modell

- ▶ Bevor man optimiert, was ist überhaupt ein *gutes* Modell?
- ▶ Eigenschaften:
  - ▶ Wenig unabhängige interpretierbare Parameter.
  - ▶ Modell ist voraussagefähig, z.B.

$$P(t) = \frac{K}{1 + \left(\frac{K}{P_0} - 1\right)e^{-\frac{t-t_0}{\tau}}}, \quad u(t) = \begin{cases} u_0 e^{-kt}, & m = 1 \\ (kt + u_0^{1-m})^{-\frac{1}{m-1}}, & m > 1 \end{cases}$$

- ▶ Nachteile von vielen Parametern, z.B.  $P(t) = \sum_{j=0}^n a_j t^j$ ,
  - ▶ Unbekannte Parameter sind:  $\{a_j\}_{j=0}^n$
  - ▶ Werden mit Daten bestimmt:  $P_i = P(t_i) = \sum_{j=0}^n a_j t_i^j$ ,  $0 \leq i \leq n$ ,

$$\begin{bmatrix} 1 & t_0 & t_0^2 & \cdots & t_0^n \\ \vdots & & & & \vdots \\ 1 & t_n & t_n^2 & \cdots & t_n^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_0 \\ \vdots \\ P_n \end{bmatrix}$$

- ▶ oder durch  $\min = \sum_{j=0}^m [P(t_j) - P_j]^2$ ,  $m \geq n$ ,

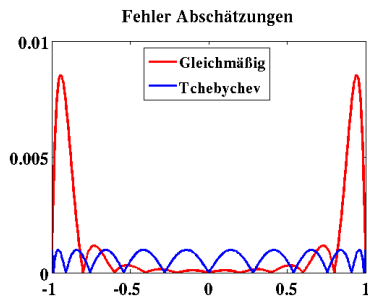
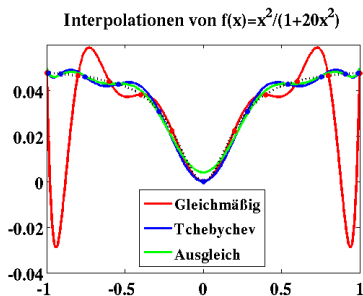
$$A = \begin{bmatrix} 1 & t_0 & t_0^2 & \cdots & t_0^n \\ \vdots & & & & \vdots \\ 1 & t_m & t_m^2 & \cdots & t_m^n \end{bmatrix}, \quad A^T A a = A^T P$$

# Genauigkeit globaler Interpolation

- ▶ Beispiel: Die Funktion  $f(x) = x^2/(1 + 20x^2)$  wird mit  $n = 10$  oder  $m = 100$  Punkten folgendermassen interpoliert:

- (Gleichmässig) ▶  $P(x_j) = f(x_j), x_j = -1 + 2i/n, i = 0, \dots, n$
- (Tchebychev) ▶  $Q(t_j) = f(t_j), t_j = \cos(\pi(j + 1/2)/(N + 1)), j = 0, \dots, n$
- (Ausgleich) ▶  $\sum_{k=0}^m |R(y_k) - f(y_k)|^2 = \min, y_k = -1 + 2k/m, k = 0, \dots, m$

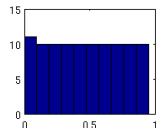
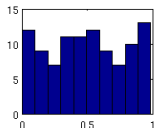
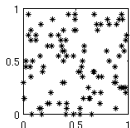
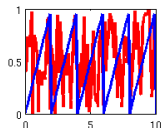
- ▶ Die Ergebnisse sehen so aus:



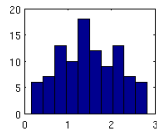
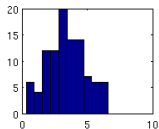
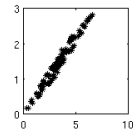
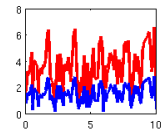
wobei die theoretischen Fehler rechts gezeigt werden.

# Grafischen Überblick der PCA/ICA

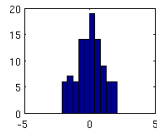
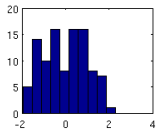
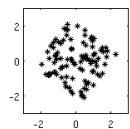
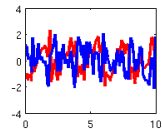
Quellen



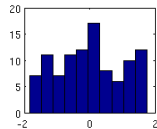
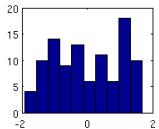
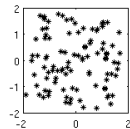
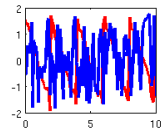
Mischungen



gesphärt (PCA)



getrennt (ICA)



Zeit

Streuung

Histogramme

# Formulierung der PCA/ICA

- Die **Quellensignale**  $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2 \in \mathbb{R}^n$  sind die Reihen von

$$Z = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_1^T \\ \mathbf{z}_2^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1(t_1) & z_1(t_2) & \cdots & z_1(t_n) \\ z_2(t_1) & z_2(t_2) & \cdots & z_2(t_n) \end{bmatrix}$$

Diese sind **unabhängig** und **nicht Gauß verteilt**.

- Die **Meßsignale**  $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \in \mathbb{R}^n$  sind unbekannte **Mischungen** der Quellen

$$\begin{bmatrix} \mathbf{y}_1^T \\ \mathbf{y}_2^T \end{bmatrix} = Y = AZ, \quad A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$$

Diese sind **nicht unabhängig** und eher **Gauß verteilt**.

- Ziel ist, die **Gaußianität** zu minimieren, um **Schätzungen**  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbb{R}^n$  der Quellen zu bestimmen,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_1^T \\ \mathbf{x}_2^T \end{bmatrix} = X = WY, \quad W \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$$

**schrittweise** durch  $W = (\text{Dreh}) \cdot (\text{Skal}) \cdot (\text{Dreh}) \approx A^{-1}$ .

# Formulierung der PCA/ICA

Schritte:

- ▶ Zentrieren:  $\bar{Y} \in \mathbb{R}^m, \mathbf{e} \in \mathbb{R}^n$   
 $Y_z = Y - \bar{Y}\mathbf{e}^T, \quad \bar{Y}_i = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n Y_{ij}, \quad \mathbf{e}_i = 1$

- ▶ Sphären:  $K = \frac{1}{n} Y_z Y_z^T, \quad KV = V\Lambda, \quad Y_s = \Lambda^{-\frac{1}{2}} V^T Y_z$

- ▶ Drehen:  $X_z = UY_z, \quad U^T = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m\}$

wobei jedes  $\mathbf{u}_k$  die Gaußianität minimiert.

Z.B. **Wölbung** (Kurtosis)  $\mathbf{x} = \{x_i\} \ \& \ M_1(\mathbf{x}) = 0$   
 $\Rightarrow M_k(\mathbf{x}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^k$

$\mathcal{K}(\mathbf{x}) = M_4(\mathbf{x}) - 3M_2^2(\mathbf{x})$   
erfüllt  $\mathcal{K}(\mathbf{n}) = 3\sigma^4 - 3\sigma^4 = 0$  für  $\mathbf{n} \sim N(\mu, \sigma^2)$ .

Also kann  $\mathcal{J}(\mathbf{u}) = \mathcal{K}^2(Y_s^T \mathbf{u})$  mit  $\mathbf{u}_k^T \mathbf{u}_l = \delta_{kl}$  maximiert werden.

- ▶ Verschieben:  $X = X_z + U\Lambda^{-\frac{1}{2}} V^T \bar{Y}\mathbf{e}^T = U\Lambda^{-\frac{1}{2}} V^T Y = WY$

# Formulierung der PCA/ICA

(PCA) Sei die Daten so zerlegt,

$$Y_z = Y - \bar{Y}\mathbf{e}^T, \quad K = \frac{1}{n} Y_z Y_z^T, \quad KV = V\Lambda, \quad Y_s = \Lambda^{-\frac{1}{2}} V^T Y_z$$

Sei  $\Lambda = \text{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_m\}$  mit  $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_m$ . Mit  $P \in \mathbb{R}^{r \times m}$ ,  $r < m$ ,  $P_{i,j} = \delta_{i,j}$ , werden die Daten  $Y$  zum  **$r$  stärksten Hauptkomponenten** projiziert,

$$Y \approx Y_P = \bar{Y}\mathbf{e}^T + V\Lambda^{\frac{1}{2}} P^T P Y_s = \bar{Y}\mathbf{e}^T + \frac{1}{n} Y_z (P Y_s)^T (P Y_s)$$

(ICA) Sei die Daten weiter so zerlegt,

$$X_z = U Y_s$$

Mit  $Q \in \mathbb{R}^{r \times m}$ ,  $r < m$ ,  $Q_{i,j} = \delta_{q_i,j}$ , werden die Daten  $Y$  zum  **$r$  independent components**  $\{q_1, \dots, q_r\}$  so projiziert,

$$Y \approx Y_Q = \bar{Y}\mathbf{e}^T + V\Lambda^{\frac{1}{2}} U^T Q^T Q X_z = \bar{Y}\mathbf{e}^T + \frac{1}{n} Y_z (Q X_z)^T (Q X_z)$$

# Ein Schlechtes Modell

Nachteile von empirischen Modellen mit vielen Parametern:

- ▶ Information kann von den vielen Parametern  $\{a_j\}_{j=0}^n$  nicht entnommen werden.
- ▶ Jeder Datensatz kann mit genug Parametern exakt interpoliert werden.
  - ▶ Ist das Ergebnis *zwischen* den Datenpunkten sinnvoll?
  - ▶ *Ausserhalb* der Datenpunkte?
- ▶ Die Parameter des Ergebnisses hängen von den Daten nicht notwendigerweise stabil ab:  $\mathbf{P} = \{P_i\}_{i=0}^n$ ,  $\mathbf{a} = \{a_j\}_{j=0}^n$ ,

$$\|\mathbf{P} - \tilde{\mathbf{P}}\| \text{ klein} \not\Rightarrow \|\mathbf{a} - \tilde{\mathbf{a}}\| \text{ klein}$$

$$\text{z.B. } \mathbf{A}\mathbf{a} = \mathbf{P}, \mathbf{A}\tilde{\mathbf{a}} = \tilde{\mathbf{P}},$$

$$\frac{\|\mathbf{a} - \tilde{\mathbf{a}}\|}{\|\mathbf{a}\|} \leq \kappa(\mathbf{A}) \frac{\|\mathbf{P} - \tilde{\mathbf{P}}\|}{\|\mathbf{P}\|}$$

wobei  $\kappa(\mathbf{A}) = \|\mathbf{A}\| \|\mathbf{A}^{-1}\|$  sehr groß werden kann.

- ▶ Rechenaufwand nicht notwendig.



# Ein Modell dimensionslos umschreiben

- ▶ Temperaturverlauf im Haus:

$$\rho c V T'(t) = \alpha A [T_\infty - T(t)], \quad T(0) = T_0$$

- ▶ Dimensionslose Größen:

$$\theta = T/T_0, \quad \tau = \alpha A t / (\rho c V)$$

- ▶ Differentialgleichung mit diesen,

$$\rho c V \frac{dT}{dt} = \rho c V \frac{d}{dt}(\theta T_0) = \rho c V T_0 \frac{d\theta}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} = \alpha A T_0 \frac{d\theta}{d\tau}$$

$$\alpha A [T_\infty - T] = \alpha A [T_\infty - T_0 \theta] = \alpha A T_0 [T_\infty / T_0 - \theta]$$

$$\Rightarrow \alpha A T_0 \frac{d\theta}{d\tau} = \alpha A T_0 [T_\infty / T_0 - \theta] \Rightarrow \frac{d\theta}{d\tau} = \theta_\infty - \theta$$

wobei  $\theta_\infty = T_\infty / T_0$  und  $\theta(0) = T(0) / T_0 = 1$ .

- ▶ *Dynamische Ähnlichkeit:* Für ein Experiment mit allen Parametern skaliert ( $\tilde{\alpha} \tilde{A} / (\tilde{\rho} \tilde{c} \tilde{V}) = \alpha A / (\rho c V)$ ,  $\tilde{T}_\infty / \tilde{T}_0 = T_\infty / T_0$ ), ist das Verhalten in  $\theta$  gleich.

# Realistisches Beispiel: Navier-Stokes

- ▶ Impulserhaltung für ein inkompressibles Fluid:

$$\rho \partial_t \mathbf{v} + \rho (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{v} + \mathbf{f}$$

$\rho$  = Dichte,  $\mathbf{v}$  = Geschwindigkeit,  $p$  = Druck,  $\nu$  = Viskosität,  $\mathbf{f}$  = Kraft

- ▶ Dimensionslose Größen:

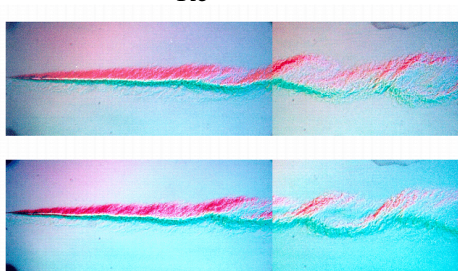
$$\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x}/L, \quad \tilde{\mathbf{v}} = \mathbf{v}/U, \quad \tilde{t} = tU/L, \quad \tilde{p} = p/(\rho U^2), \quad \tilde{\mathbf{f}} = \mathbf{f}L/(\rho U^2)$$

wobei  $L$  und  $U$  charakteristische Längen- bzw. Geschwindigkeits-Maßstäbe sind.

- ▶ Dimensionslos umgeschrieben, wobei  $Re = \rho LU/\nu$

$$\partial_{\tilde{t}} \tilde{\mathbf{v}} + (\tilde{\mathbf{v}} \cdot \tilde{\nabla}) \tilde{\mathbf{v}} = -\tilde{\nabla} \tilde{p} + \frac{1}{Re} \tilde{\nabla}^2 \tilde{\mathbf{v}} + \tilde{\mathbf{f}}$$

- ▶ Hoch- und  
Niedrig-  
Geschwindigkeits-  
strömungen,  
Reynoldszahl  
( $Re$ ) aber gleich:



# Modelle durch Dimensionsanalyse

▶ Meßgröße: 
$$G = \underbrace{m(G)}_{\text{Maßzahl}} \cdot \underbrace{[G]}_{\text{Maßeinheit}}$$

▶ Grundgrößen:

$$\{g_i\}_{i=1}^r \quad \text{z.B.} \quad g_1 = \text{Länge}, \quad g_2 = \text{Zeit}, \quad g_3 = \text{Masse}$$

▶ Grundeinheiten:

$$\{[g_i]\}_{i=1}^r \quad \text{z.B.} \quad [g_1] = \text{Meter}, \quad [g_2] = \text{Sek}, \quad [g_3] = \text{Kg}$$

SI System:

Meter, Sekunde, Kilogramm, Ampere, Kelvin, Candela, Mol

▶ Abgeleitete Größen:

$$\{G_j\}_{j=1}^n \quad \text{z.B.} \quad G_1 = g_1/g_2 (\text{Geschwindigkeit})$$
$$[G_1] = [g_1]/[g_2] = \text{Meter/Sek}$$

▶ Im allgemeinen,

$$G_j = \prod_{i=1}^r g_i^{\alpha_{ij}}, \quad [G_j] = \prod_{i=1}^r [g_i]^{\alpha_{ij}}$$

▶ Dimensionslos wenn  $[G] = 1$ .

# Modelle durch Dimensionsanalyse

**Def:** Die Größen  $\{\mathcal{G}_k = \prod_{j=1}^n G_j^{\lambda_{jk}}\}_{k=1}^m$  sind *unabhängige Kombinationen* von  $\{G_j\}_{j=1}^n$ , wenn die Vektoren  $\lambda_k = \{\lambda_{jk}\}_{j=1}^n$ ,  $k = 1, \dots, m$ , linear unabhängig sind.

- Beispiel: Fall eines Steins,  $(g_1 = L, g_2 = Z, g_3 = M)$

$$\underbrace{v}_{G_1} = f(\underbrace{h}_{G_2}, \underbrace{m}_{G_3}, \underbrace{g}_{G_4}, \underbrace{\tau}_{G_5})$$

Unabhängige Kombinationen von  $\{G_1, \dots, G_5\}$ ,

$$\begin{aligned}\Pi_1 &= v \cdot (\tau/h) = G_1 G_5 G_2^{-1} & \lambda_1 &= \langle 1, -1, 0, 0, 1 \rangle^T \\ \Pi_2 &= g \cdot (\tau/v) = G_4 G_5 G_1^{-1} & \lambda_2 &= \langle -1, 0, 0, 1, 1 \rangle^T\end{aligned}$$

da  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  linear unabhängig sind.

Bemerke:  $[\Pi_1] = 1 = [\Pi_2]$ .

## Buckingham Pi Satz

**Satz** (Buckingham Pi): Gegeben seien Grundgrößen  $\{g_i\}_{i=1}^r$  und abgeleitete Größen  $\{G_j\}_{j=1}^n$  mit  $G_j = \prod_{i=1}^r g_i^{\alpha_{ij}}$ , wobei die Matrix  $A = \{\alpha_{ij} : 1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq n\}$  erfüllt  $\text{Rang}(A) = r$ . Dann gibt es genau  $n - r$  dimensionslose unabhängige Kombinationen  $\{\Pi_k\}_{k=1}^{n-r}$  von  $\{G_j\}_{j=1}^n$  sodass eine Gleichung 
$$\Phi(G_1, \dots, G_n) = 1$$

sich äquivalent folgendermaßen umschreiben läßt:

$$\Psi(\Pi_1, \dots, \Pi_{n-r}) = 1.$$

- ▶ Beispiel: Fall eines Steins,  $r = 3$ ,  $n = 5$ ,

$$\Pi_1 = v \cdot (\tau/h), \quad \Pi_2 = g \cdot (\tau/v) \quad (\text{Woher?})$$

sind  $n - r = 2$  dimensionslose unabhängige

Kombinationen von  $\{G_1, \dots, G_5\}$ . (Siehe oben) Es gilt

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{matrix} \quad \text{Rang}(A) = 3 = r?$$

$G_1 \quad G_2 \quad G_3 \quad G_4 \quad G_5$

$v = f(h, m, g, \tau) \rightarrow \Pi_1 = F(\Pi_2)$ . Experiment:  $\Pi_2 = 1$ .

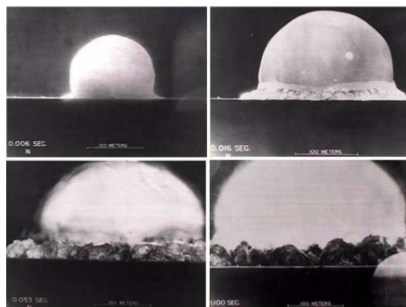
Also  $\Pi_1 = F(1) = k$ . Experiment:  $k = 2$ . Ergebnis:  $v = 2h/\tau$ .

# Realistisches Beispiel der Dimensionsanalyse

Englischer Physiker

G.I. Taylor

hat die Energie der ersten Atombombe von einem Film berechnet.



► Größen die (anscheinend) eine Rolle spielen:

$G_1$	$E$	Energie der Explosion	$ML^2Z^{-2}$	(K.E. = $\frac{1}{2}mv^2$ )
$G_2$	$t$	Zeit seit der Explosion	$Z$	
$G_3$	$R$	Radius des Feuerballs	$L$	
$G_4$	$\rho_A$	Dichte der Aussenluft	$ML^{-3}$	
$G_5$	$\rho_I$	Dichte der Innenluft	$ML^{-3}$	
$G_6$	$p_A$	Druck der Aussenluft	$ML^{-1}Z^{-2}$	( $F/A$ , $kg\ m/s^2 / m^2$ )
$G_7$	$p_I$	Druck der Innenluft	$ML^{-1}Z^{-2}$	

## Realistisches Beispiel der Dimensionsanalyse

- ▶ Soll z.B. die Temperatur dabei sein?

Ein Gas-Gesetz wie  $p = \rho \mathcal{R} T$  bedeutet,  $T$  läßt sich von den anderen Größen bestimmen.

- ▶  $\{g_1 = L, g_2 = Z, g_3 = M\}, \{G_j\}_{j=1}^7 \Rightarrow r = 3, n = 7.$
- ▶ Es gilt  $\text{Rang}(A) = 3 = r,$  (Wie?)

$$A = \begin{array}{ccccccc} \left[ \begin{array}{ccccccc} 2 & 0 & 1 & -3 & -3 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right] & \begin{array}{l} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{array} \\ \begin{array}{ccccccc} G_1 & G_2 & G_3 & G_4 & G_5 & G_6 & G_7 \end{array} & \end{array}$$

- ▶ Mit Buckingham Pi sucht man  $n - r = 4$  dimensionslose Größen  $\{\Pi_k\}_{k=1}^4$ .
- ▶ Hinweis:  $\Pi_1$  soll energieartig sein, damit die untersuchte Größe dabei ist.
- ▶ Mit der Erwartung einer Beziehung  $\Pi_1 = F(\Pi_2, \Pi_3, \Pi_4)$  sucht man Größen  $\{\Pi_2, \Pi_3, \Pi_4\}$ , die klein oder konstant sind, damit  $F(\Pi_2, \Pi_3, \Pi_4) \approx \text{Konstante}$ .

# Realistisches Beispiel der Dimensionsanalyse

- ▶ Nimm

$$\begin{aligned}\Pi_1 &= E(\rho_A^{-1} R^{-5} t^2) & \Pi_2 &= \rho_A^5 (E^{-2} \rho_I^{-3} t^6) \\ \Pi_3 &= \rho_A / \rho_I & \Pi_4 &= \rho_A / \rho_I\end{aligned}$$

- ▶ Es gilt

$$\begin{aligned}[\Pi_1] &= \frac{ML^2 L^3 1}{Z^2 M L^5} Z^2 = 1, & [\Pi_2] &= \frac{M^5 Z^4 L^9}{L^5 Z^{10} M^2 L^4 M^3} Z^6 = 1, \\ [\Pi_3] &= 1, & [\Pi_4] &= 1\end{aligned}$$

- ▶ Zu zeigen ist,  $\Pi_k = \prod_{j=1}^7 G_j^{\lambda_{kj}}$  sind unabhängige Kombinationen von  $\{G_j\}_{j=1}^7$ :

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \langle 1, 2, -5, -1, 0, 0, 0 \rangle^T \\ \lambda_2 &= \langle -2, 6, 0, 0, -3, 5, 0 \rangle^T \\ \lambda_3 &= \langle 0, 0, 0, 1, -1, 0, 0 \rangle^T \\ \lambda_4 &= \langle 0, 0, 0, 0, 0, 1, -1 \rangle^T\end{aligned}$$

sind linear unabhängig. (Wie?)

- ▶ Buckingham Pi:

$$\Phi(E, t, R, \rho_A, \rho_I, \rho_A, \rho_I) = 1 \rightarrow \Pi_1 = F(\Pi_2, \Pi_3, \Pi_4).$$



## Realistisches Beispiel der Dimensionsanalyse

- ▶ In der Gleichung  $\Pi_1 = F(\Pi_2, \Pi_3, \Pi_4)$  gelten  $\Pi_2, \Pi_3, \Pi_4 \approx 0$ .
- ▶ Mit  $k = F(0, 0, 0)$  kann folgendes Modell mit dem Film angewendet werden:

$$E\rho_A^{-1}R^{-5}t^2 = k$$

- ▶ Vom Film kann man messen:  $R = R(t)$ .
- ▶ Vom Modell:  $R^5 = \left(\frac{E}{\rho_A k}\right) t^2$  oder

$$R(t) = \gamma t^{2/5} \quad \text{wobei} \quad \gamma = \left(\frac{E}{\rho_A k}\right)^{1/5} = \text{Konstante}$$

- ▶ Mit den Filmdaten  $\{(t_n, R_n)\}_{n=1}^N$  schätzt man  $\gamma$  so ab:

$$\gamma \approx \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N R_n t_n^{-2/5}$$

- ▶ Mit  $\gamma$  und  $\rho_A$  bekannt, folgt

$$E = k(\rho_A \gamma^5)$$

aber  $k = ?$

## Realistisches Beispiel der Dimensionsanalyse

- ▶ Man macht eine kleinere Explosion, für welche  $(\Pi_2, \Pi_3, \Pi_4)$  klein genug sind, dass  $F(\Pi_2, \Pi_3, \Pi_4) \approx F(0, 0, 0) = k$  gilt.
- ▶ Sei  $E_0$  die Energie der kleineren Explosion.
- ▶ Es gilt für das kleinere Experiment,

$$k \approx F(\Pi_2, \Pi_3, \Pi_4) = \Pi_1 = E_0(\rho_A)_0^{-1} R_0^{-5} t_0^2.$$

oder

$$R_0 = \gamma_0 t_0^{\frac{2}{5}} \quad \text{wobei} \quad \gamma_0 = \left( \frac{E_0}{\rho_A k} \right)^{\frac{1}{5}} = \text{Konstante}$$

da  $(\rho_A)_0 = \rho_A$  gilt.

- ▶ Ähnlich mit Daten  $\{(t_0, R_0)_n\}_{n=1}^N$  schätzt man  $\gamma_0$  so ab:

$$\gamma_0 = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N (R_0 t_0^{-\frac{2}{5}})_n$$

- ▶ Mit  $\gamma_0$  und  $\rho_A$  bekannt, folgt

$$E_0 = k(\rho_A \gamma_0^5)$$

- ▶ Mit  $k = E/(\rho_A \gamma^5) = E_0/(\rho_A \gamma_0^5)$  folgt

$$E = E_0(\gamma/\gamma_0)^5.$$

# Deterministische Strukturelle Modelle

## Wachstum und Zerfall

- ▶ Änderungsrate:  $x'(t)$ , z.B. für die Schatzsuche  $E'(t) = \beta$ .
- ▶ Spezifische Änderungsrate:  $x'(t)/x(t)$ , z.B.  
Geburt:  $x'/x = \beta > 0$ , Tod:  $x'/x = -\mu < 0$
- ▶ Beispiel: Schadstoff in einem See. Massenerhaltung

$$m' = z - a, \quad VS' = 0 - rS$$

wobei  $VS = m$ ,  $z = 0$ ,  $a = rS$ , → □ →

$m =$  Masse des Schadstoffs,  $S =$  Konzentration des Schadstoffs  
 $z =$  Zufluss,  $V =$  Volumen des Sees  
 $a =$  Abfluss,  $r =$  Flussrate durch den See

Spezifische Änderungsrate:  $S'/S = -r/V < 0$ .

- ▶ Radioaktiver Zerfall:  $x(t) =$  Anzahl der Atomen im erregten Zustand,

$$x'/x = -\lambda < 0, \quad x(t) = x(0)e^{-\lambda t}$$

Halbwertszeit  $= \tau$ :  $x(\tau)/x(0) = e^{-\lambda\tau} = 1/2$

$$-\lambda\tau = -\ln(2) \Rightarrow \lambda = \ln(2)/\tau$$

$$x(t) = x(0)e^{-\ln(2)t/\tau} = x(0)e^{\ln 2^{-t/\tau}} = x(0)2^{-t/\tau}$$

# Logistisches Wachstum

- ▶ Spezifische Änderungsrate:  $P'/P = \beta - \mu$ .
- ▶  $\beta$  und  $\mu$  Konstanten  $\Rightarrow P(t) = P(0)e^{(\beta-\mu)t}$ .
- ▶ Die einfachsten Verallgemeinerungen: lineare Abhängigkeit vom Zustand,

$$\beta(P) = \beta_0 - \beta_1 P, \quad \mu(P) = \mu_0 + \mu_1 P$$

Mit dichter Bevölkerung werden Mechanismen wirksam, die das Wachstum einbremsen, geringere Kinderfreudigkeit ( $\beta_1 > 0$ ) und/oder erhöhte Sterblichkeit ( $\mu_1 > 0$ ) bewirken.

- ▶ Mit Zeitskala  $\tau = 1/(\beta_0 - \mu_0)$  und Kapazität  $K = 1/[\tau(\beta_1 + \mu_1)]$ ,

$$P' = \frac{P}{\tau} \left( 1 - \frac{P}{K} \right)$$

- ▶ Mit der Nebenbedingung  $P(t_0) = K/2$ , (Osterinsel?)

$$P(t) = \frac{K}{1 + \left(\frac{K}{P_0} - 1\right)e^{-\frac{t-t_0}{\tau}}}$$

**Hausaufgabe:** Löse diese Differentialgleichung mit Nebenbedingung.

# Räuber-Beute

- ▶ Ein Ökosystem:

$x(t)$  = Anzahl der Pflanzenfresser zur Zeit  $t$

$y(t)$  = Anzahl der Raubtiere zur Zeit  $t$

- ▶ Aufbau einer spezifischen Änderungsrate für  $x$ :

ohne  $y$  :  $\frac{x'}{x} = a_1$ , mit  $y$  :  $\frac{x'}{x} = a_1 - b_1 y$

- ▶ Aufbau einer spezifischen Änderungsrate für  $y$ :

ohne  $x$  :  $\frac{y'}{y} = -a_2$ , mit  $x$  :  $\frac{y'}{y} = -a_2 + b_2 x$

- ▶ Lotka-Volterra, Räuber-Beute Gleichungen,

$$x' = (a_1 - b_1 y)x$$

$$y' = (b_2 x - a_2)y$$

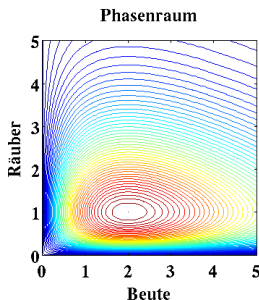
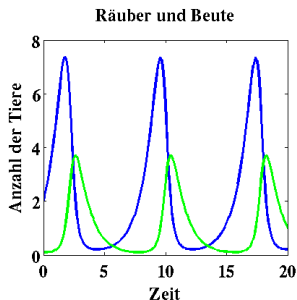
- ▶ Ist ein *autonomes* System, d.h.  $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x})$  und  $\mathbf{f}$  hängt von der Zeit  $t$  nicht explizit ab.

- ▶ Gleichgewicht:

$$x^* = a_2/b_2, \quad y^* = a_1/b_1$$

# Räuber-Beute

- ▶ Simulationen:  $(a_1 = a_2 = b_1 = 1, b_2 = \frac{1}{2}; x_0 = 2, y_0 = \frac{1}{10})$



- ▶ **Strukturelle Stabilität:**
  - ▶ Wenn die Natur kleine Störungen der Systemeigenschaften macht, ändert sich das Systemverhalten nicht radikal.
  - ▶ Sonst wird das System durch solche natürliche Störungen geändert, bis es robuster wird.
  - ▶ Wenn kleine Störungen  $(\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \tilde{\mathbf{x}}' = \tilde{\mathbf{f}}(\tilde{\mathbf{x}}), \mathbf{f} - \tilde{\mathbf{f}} \in C^1)$  in einem Modell gemacht werden und die Topologie der Lösungen sich nicht ändert, ist das Modell *strukturell stabil*.
- ▶ Kritik des Räuber-Beute Modells: ist nicht strukturell stabil.

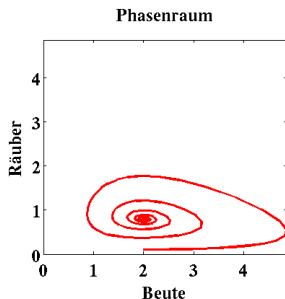
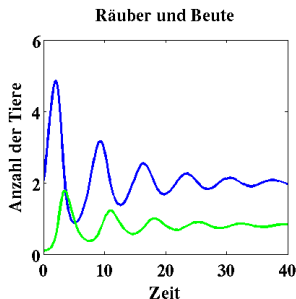
# Räuber-Beute

- ▶ Behauptung: Räuber-Beute ist nicht strukturell stabil.
- ▶ Wenn das Modell so geändert wird,

$$\begin{aligned}x' &= a_1x(1 - \epsilon x) - b_1xy \\ y' &= (b_2x - a_2)y\end{aligned}$$

d.h. die Pflanzenfresser wachsen logistisch und nicht exponentiell, dann ändert sich die Topologie der Lösungen.

- ▶ Simulationen: ( $a_1 = a_2 = b_1 = 1, b_2 = \frac{1}{2}, \epsilon = \frac{1}{10}; x_0 = 2, y_0 = \frac{1}{10}$ )



- ▶ Dieses Modell ist auch nicht strukturell stabil:  $\epsilon = 0$  führt zu periodischen Lösungen.

# Attraktoren und Grenzzyklen

- ▶ Gibt es eine Änderung des Räuber-Beute Modells, die zur strukturellen Stabilität führt?
- ▶ Ja, und zwar mit einem stabilen *Grenzzyklus*.

**Def:** Für  $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ , ist die Menge  $M$  ein *Attraktor*, wenn  $\exists \delta > 0$ , sodass  $\forall \mathbf{x}_0$  mit  $\text{dist}(\mathbf{x}_0, M) < \delta$ , gilt die Konvergenz  $\text{dist}(\mathbf{x}(t), M) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$ . Wenn die Konvergenz  $\text{dist}(\mathbf{x}(t), M) \xrightarrow{t \rightarrow -\infty} 0$  gilt, ist  $M$  ein *Abweiser*.

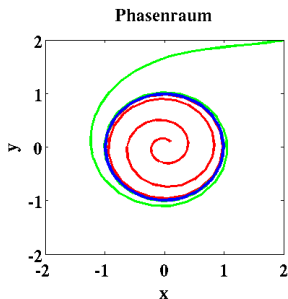
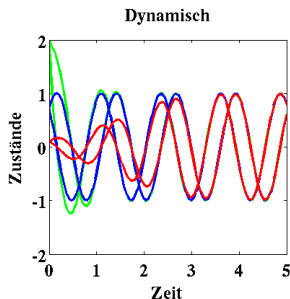
**Def:** Für  $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ , ist die Menge  $G$  ein *Grenzzyklus*, wenn eine periodische Lösung  $\mathbf{x}_G$  in  $G$  liegt, und es existiert mindestens eine andere Lösung  $\tilde{\mathbf{x}}$ , die erfüllt  $\text{dist}(\tilde{\mathbf{x}}(t), G) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$  oder  $\text{dist}(\tilde{\mathbf{x}}(t), G) \xrightarrow{t \rightarrow -\infty} 0$ .  $G$  ist ein *stabiler Grenzzyklus* wenn es ein Attraktor ist, und  $G$  ist ein *instabiler Grenzzyklus* wenn es ein Abweiser ist.



# Attraktoren und Grenzzyklen

- ▶ Explizites Beispiel eines stabilen Grenzzyklus.

$$\begin{cases} x' = (1 - r^2)x - 5y \\ y' = (1 - r^2)y + 5x \end{cases} \quad r^2 = x^2 + y^2 \quad r' = r(1 - r^2)$$



- ▶ Räuber-Beute Variante mit einem stabilen Grenzzyklus,

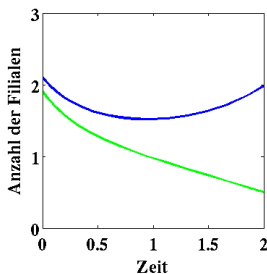
$$x' = a_1 x \left(1 - \frac{x}{K}\right) - \frac{b_1 xy}{1 + c_1 x}, \quad y' = a_2 y \left(1 - \frac{y}{b_2 x}\right)$$

Beute-Kapazität  $K$ , Grenze  $b_1/c_1$  für den Räubereffekt, Räuber-Kapazität  $b_2 x$ .

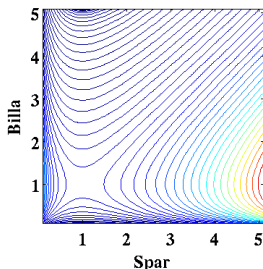
# Konkurrierende Spezies

- ▶ Filialen von 2 Geschäften zur Zeit  $t$ :  $x(t)$  und  $y(t)$ .
  - ▶ Aufbau einer spezifischen Änderungsrate für  $x$ :  
ohne  $y$ :  $\frac{x'}{x} = a_1$ , mit  $y$ :  $\frac{x'}{x} = a_1 - b_1 y$
  - ▶ Aufbau einer spezifischen Änderungsrate für  $y$ :  
ohne  $x$ :  $\frac{y'}{y} = a_2$ , mit  $x$ :  $\frac{y'}{y} = a_2 - b_2 x$
  - ▶ Gause Gleichungen:  $x^* = a_2/b_2$ ,  $y^* = a_1/b_1$   
 $x' = (a_1 - b_1 y)x$ ,  $y' = (a_2 - b_2 x)y$
- Simulationen: ( $a_1 = a_2 = b_1 = b_2 = 1$ ;  $x_0 = 2.1, y_0 = 1.9$ )

Billa und Spar



Phasenraum



Gleichgewicht  
( $x^*, y^*$ ) ist  
*instabil*  
(aber anziehend  
auf  $\frac{y}{x} = \frac{a_1 b_2}{a_2 b_1}$ ).

realistisch?

# Konkurrierende Spezies

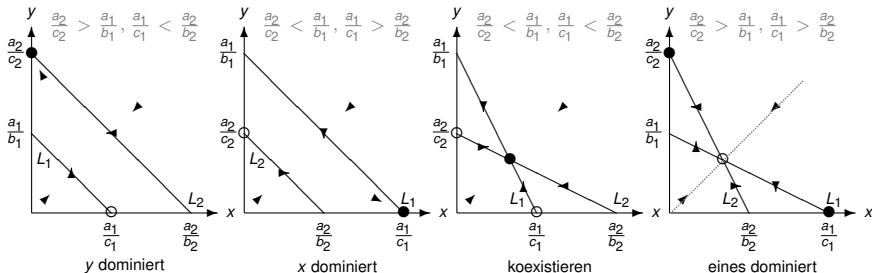
- ▶ Logistische Änderung des obigen Systems:

$$x' = (a_1 - c_1x - b_1y)x, \quad y' = (a_2 - c_2y - b_2x)y$$

d.h. ohne  $y$ ,  $x' = (a_1 - c_1x)x$ , und ohne  $x$ ,  $y' = (a_2 - c_2y)y$ .

- ▶ Phasenraum bezüglich der Geraden:

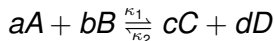
$$L_1 : c_1x + b_1y = a_1, \quad L_2 : b_2x + c_2y = a_2$$



- ▶ Geschäfte (und Spezies) koexistieren tatsächlich.

# Chemische Kinetik

- ▶ Generisches Beispiel:



d.h.  $a$  Mol von  $A$  reagiert mit  $b$  Mol von  $B$ , und es ergibt sich  $c$  Mol von  $C$  und  $d$  Mol von  $D$ .

(1 Mol beinhaltet  $6.022 \cdot 10^{23}$  Einheiten.)

- ▶ Je nach Umgebung (z.B. Temperatur) kann die Reaktion vorwärts oder rückwärts laufen.
- ▶  $\kappa_1$  und  $\kappa_2$  hängen mit den jeweiligen Reaktionsraten zusammen.
- ▶  $[A]$  = Konzentration von  $A$  in Mol pro Liter.
- ▶ Die *stoichiometrischen* Koeffizienten ( $a, b, c, d$ ) lassen sich mit einem gemeinsamen Faktor  $x(t)$  bis zur Zeit  $t$  im Lauf der Reaktion skalieren.
- ▶ Es gelten

$$\begin{aligned} [A](t) &= [A](0) - a \cdot x(t), & [C](t) &= [C](0) + c \cdot x(t) \\ [B](t) &= [B](0) - b \cdot x(t), & [D](t) &= [D](0) + d \cdot x(t) \end{aligned}$$

# Chemische Kinetik

- ▶ Es folgt

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{1}{a} \frac{d[A]}{dt} = -\frac{1}{b} \frac{d[B]}{dt} = \frac{1}{c} \frac{d[C]}{dt} = \frac{1}{d} \frac{d[D]}{dt}$$

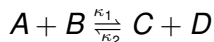
( $a, b, c, d = 1$  ist klar, und z.B.

$a = 2, b = 0$  ist wie

$A + B \rightsquigarrow A + A$  und  $AB \rightsquigarrow A^2$ )

$$\begin{aligned} &= \kappa_1 [A]^a [B]^b - \kappa_2 [C]^c [D]^d \\ &= \kappa_1 ([A](0) - a \cdot x)^a ([B](0) - b \cdot x)^b \\ &\quad - \kappa_2 ([C](0) + c \cdot x)^c ([D](0) + d \cdot x)^d \end{aligned}$$

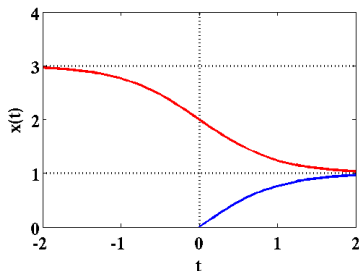
- ▶ Einfacher Fall:



$$\begin{aligned} x' &= \kappa_1 (\alpha - x)(\beta - x) - \kappa_2 (\gamma + x)(\delta + x) \\ &= \dots = (\kappa_1 - \kappa_2)(x - x_1)(x - x_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 &= 1, \quad x_2 = 3, \quad \kappa_1 > \kappa_2 \Rightarrow \\ &(-\min\{\gamma, \delta\} \leq x \leq \min\{\alpha, \beta\}) \end{aligned}$$

Reaktionsfortschritt



## Wirtschaftliches Modell: *Peak Oil*

- ▶ Zusammenfassung der Problemstellung:
  - ▶ Erdölentdeckung: *Peak* im Jahr 1965.
  - ▶ Erdölförderung: *Peak* im Jahr 2006.
  - ▶ Alternativen sind bei weitem nicht so energiereich.
  - ▶ Mit Erdöl ist Weltbevölkerung gewaltig angestiegen.
  - ▶ Nachfrage trifft Angebot: Ölpreis schwankt.
  - ▶ Ziel: Ein grobes Modell für Prognosen zu entwickeln.

- ▶ Entdeckung: (Beobachtung: logistisch)

$$E'(t) = aE(t)[M - E(t)]$$

wobei  $M$  = Gesamtmenge an Erdöl in der Erde.

- ▶ Förderung (Produktion): (Beobachtung: logistisch mit Verzögerung)

$$F'(t) = e[E(t - \tau) - F(t)][K'(t) > 0]K'(t)$$

wobei  $\tau$  = Verzögerung und  $K$  = Kapital eines Monopols.

- ▶ Vorrat: (Mengenbilanz)

$$V'(t) = F'(t) - N'(t)$$

wobei  $N$  = Gesamtmenge an je nachgefragten Erdöl.

Als Nächstes  $A$  = Gesamtmenge an je angebotenen Erdöl.

## Wirtschaftliches Modell: *Peak Oil*

► Angebot: 
$$0 \xleftarrow{dt} A(t + dt) - A(t) \xrightarrow{P_{\min}(t)/P(t) \rightarrow 0} V(t),$$
$$A(t + dt) - A(t) = V(t) \left\{ 1 - \left[ \frac{P_{\min}(t)}{P(t)} \right]^{b \cdot dt} \right\}$$

wobei  $P(t)$  = Fasspreis des Erdöls und  
 $P_{\min}(t)$  = minimaler (kostenabdeckender) Fasspreis.

$$P_{\min}(t) = q + h \frac{F(t)}{E(t) - F(t)}$$

Mit  $dt \rightarrow 0$  folgt

$$A'(t) = bV(t) \ln \left[ \frac{P(t)}{P_{\min}(t)} \right]$$

► Nachfrage: 
$$0 \xleftarrow{P_{\max} \leftarrow P(t)} N(t + dt) - N(t) \xrightarrow{P(t) \rightarrow 0} c_1 B(t),$$
$$N(t + dt) - N(t) = c_1 B(t) \left\{ 1 - \left[ \frac{P(t)}{P_{\max}} \right]^{c_2 \cdot dt} \right\}$$

Mit  $c = c_1 c_2$  und  $dt \rightarrow 0$  folgt

$$N'(t) = cB(t) \ln \left[ \frac{P_{\max}}{P(t)} \right]$$

wobei  $B$  = Weltbevölkerung und  $P(t) = P_{\max} \Rightarrow$  Stillstand.

## Wirtschaftliches Modell: *Peak Oil*

- ▶ Fasspreis: (Effizienter-Markt Hypothese)

$$P'(t) = d[N'(t) - A'(t)], \quad (d \rightarrow \infty)$$

Mit  $N'(t) = A'(t)$ ,

$$P(t) = P_{\max}^{r(t)} \cdot P_{\min}^{s(t)}(t)$$

wobei

$$r(t) = \frac{cB(t)}{cB(t) + bV(t)}, \quad s(t) = \frac{bV(t)}{cB(t) + bV(t)}$$

- ▶ Kapital: (Mengenbilanz)

$$K'(t) = P(t) \cdot N'(t) - P_{\min}(t) \cdot A'(t)$$

- ▶ Bevölkerung

$$B'(t) = fB(t)[R + g \cdot A'(t) - B(t)]$$

logistisch mit Kapazität  $R + g \cdot A'(t)$ , d.h.

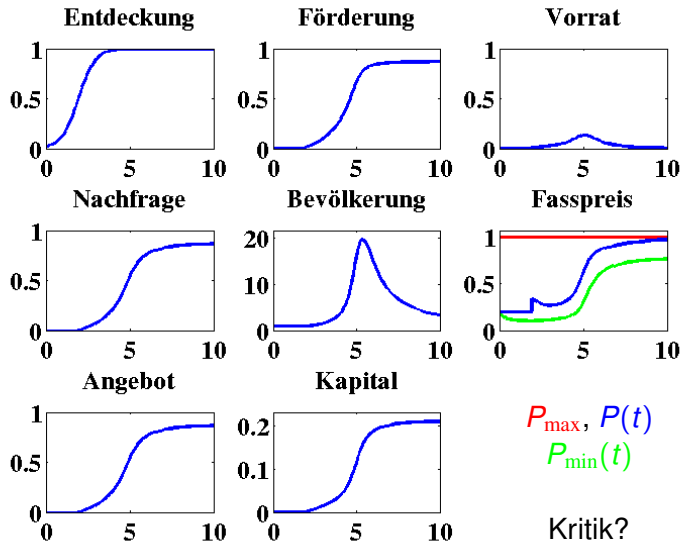
- ▶  $R$  = Kapazität ohne Erdöl, und
- ▶ je schneller angeboten wird, desto höher ist die Kapazität.



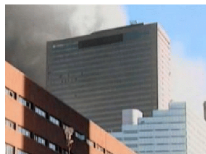
# Wirtschaftliches Modell: *Peak Oil*

## ► Simulation:

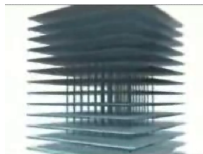
$a$	2.0e0	$c$	5.0e-2	$f$	1.0e-1	$h$	1.0e-1	$P_{\max}$	1.0e0	$R$	1.0e0
$b$	4.0e0	$e$	1.0e1	$g$	7.0e1	$M$	1.0e0	$q$	1.0e-1	$E(\tau)$	$M/2$



# Modellierung des Einsturzes der WTC Türme



WTC7



Pfannkuchen-Modell



Steven Jones, BYU



Kevin Ryan, UL



## Einführung in die Erhaltungssätze

- ▶ Zwei Massen  $m_1, m_2$  mit Geschwindigkeiten  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$  treffen einander ohne Schwerkraft,

Massenerhaltung:  $m_1 + m_2 = \tilde{m}_1 + \tilde{m}_2$

Impulserhaltung:  $\mathbf{v}_1 m_1 + \mathbf{v}_2 m_2 = \tilde{\mathbf{v}}_1 \tilde{m}_1 + \tilde{\mathbf{v}}_2 \tilde{m}_2$

Energieerhaltung:  $\frac{1}{2} |\mathbf{v}_1|^2 m_1 + \frac{1}{2} |\mathbf{v}_2|^2 m_2 = \frac{1}{2} |\tilde{\mathbf{v}}_1|^2 \tilde{m}_1 + \frac{1}{2} |\tilde{\mathbf{v}}_2|^2 \tilde{m}_2$

und nachher gibt es Massen  $\tilde{m}_1, \tilde{m}_2$  mit Geschwindigkeiten  $\tilde{\mathbf{v}}_1, \tilde{\mathbf{v}}_2$ .

- ▶ Wenn für  $i = 1, 2$  gilt  $m_i = \tilde{m}_i$ , folgt

$$\tilde{\mathbf{v}}_i = \mathbf{v}_S - (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_S)$$

wobei

$$\mathbf{v}_S = (\mathbf{v}_1 m_1 + \mathbf{v}_2 m_2) / (m_1 + m_2)$$

die Geschwindigkeit für den Schwerpunkt bezeichnet.

## Das WTC Modell

- ▶ Zur Zeit  $t_1$  ist Masse  $m_1$  im freien Fall mit Geschwindigkeit  $u_1 < 0$ .
- ▶ Masse  $m_1$  fällt von Höhe  $h$  zur Masse  $m_2$ .
- ▶ Die Dauer des Falls ist:

$$t_2 = t_1 + [u_1 + \sqrt{u_1^2 + 2gh}]/g$$

- ▶ Die Geschwindigkeiten der Massen knapp vor der Kollision sind:

$$v_1 = -\sqrt{u_1^2 + 2gh}, \quad v_2 = 0$$

- ▶ Von der Kollision wird der Bruchteil  $\sigma$  von der Masse  $m_2$  verstaubt und zufällig gestreut:

$$m_2 \rightarrow (1 - \sigma)m_2 + \sigma m_2, \quad \sigma m_2 = \sum_{l>2} m_l, \quad \sum_{l>2} \tilde{v}_l m_l = 0$$

- ▶ Von Massenerhaltung ist die neue Masse im freien Fall:

$$m_1 + (1 - \sigma)m_2$$

## Das WTC Modell

- ▶ Sei  $\Delta p_0 \delta(t - t_2)$  die wirkende Reserve-Befestigungskraft in dem Moment  $t = t_2$  der Kollision.
- ▶ D.h. wenn der Impuls  $m_1 v_1$  der fallenden Masse kleiner als  $\Delta p_0$  ist, gibt es keine weitere Bewegung.
- ▶ Von Impulserhaltung,

$$\begin{aligned}\Delta p_0 + v_1 m_1 + v_2 m_2 &= \tilde{v}_1 \tilde{m}_1 + \tilde{v}_2 \tilde{m}_2 + \sum_{l>2} \tilde{v}_l \tilde{m}_l \\ \Delta p_0 + v_1 m_1 &= \tilde{v}_1 m_1 + \tilde{v}_1 (1 - \sigma) m_2\end{aligned}$$

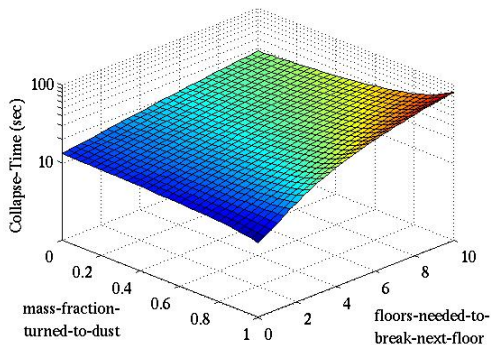
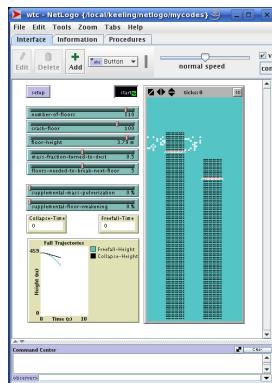
ist die neue Geschwindigkeit der Masse im freien Fall:

$$\tilde{v}_1 = [m_1 v_1 + \Delta p_0] / [m_1 + (1 - \sigma) m_2]$$

- ▶ Zusammenfassung:
  - ▶ Freier Fall:  $m_1$  mit  $u_1$  in  $t_1$ , dann  $v_1$  in  $t_2$
  - ▶ Kollision:  $\tilde{m}_1 = m_1 + m_2 - \text{Staub}$ , und  $\tilde{m}_1 \tilde{v}_1 = m_1 v_1 + \Delta p_0$
  - ▶  $\Delta p_0 = (N m_2) v_0 = N m_2 \sqrt{2gh}$  für eingegebenes  $N$werden iterativ im Code verwendet.
- ▶ Siehe <http://math.uni-graz.at/keeling/wtc/wtc.html>.

# Das WTC Modell

- ▶ Siehe <http://math.uni-graz.at/keeling/wtc/wtc.html> für den Code und für eine Beschreibung der folgenden Ergebnisse.



- ▶ Alle Fallzeiten sind größer als die für einen freien Fall, ausser  $\sigma = 1$  und  $N = 0$ .

# Modellierung eines Erdwärmesystems

Zuerst die Wärmeaufnahme:

- ▶ Das einfachste Modell der Flächenkollektoren in der Erde:
  - ▶ 1 Kompartiment für das Kollektorensystem.
  - ▶ 1 Kompartiment für das Erdesystem.
- ▶ Für jedes Kompartiment,
  - ▶ Kollektorensystem, Energie und Temperatur:  
$$E_K = \rho_K c_K V_K T_K$$
  - ▶ Erdesystem, Energie und Temperatur:  $E_E = \rho_E c_E V_E T_E$
- ▶ Für reine Diffusion über die Grenzfläche:
  - ▶  $E'_K = \alpha_K^E S_K^E (T_E - T_K)$
  - ▶  $E'_E = \alpha_K^E S_K^E (T_K - T_E)$
- ▶ Die Flussrate durch das Kollektorensystem:  $F_K$
- ▶ Der Zufluss für das Kollektorensystem hat Temperatur  $T_P$ ,
  - ▶ die in der Wärmepumpe eingestellt ist, und
  - ▶ hängt von der Abflusstemperatur des Kollektorensystems ab.
  - ▶ Die Abflusstemperatur des Kollektorensystems ist  $T_K$ . Warum?
  - ▶ In einem *normalen* Temperaturbereich ( $0^\circ\text{C} - 10^\circ\text{C}$ ), gilt  
 $T_P = T_K - \Delta T$ ,  $\Delta T \approx 2^\circ\text{C}$ , aber  $\Delta T \rightarrow 0$  für  $T_K < 0$ .

$\rho$  = Dichte  
 $c$  = spezifische Wärmekapazität  
 $V$  = Volumen  
 $\alpha$  = Wärmeübergangskoeffizient  
 $S$  = Grenzflächeninhalt

# Wärmeaufnahme

- ▶ Energieerhaltung:  $T_P < T_K(0) = T_E(0) = T_0$

$$\begin{cases} \rho_K c_K V_K T'_K = \alpha_K^E S_K^E (T_E - T_K) + F_K (\rho_P c_P T_P - \rho_K c_K T_K) \\ \rho_E c_E V_E T'_E = \alpha_K^E S_K^E (T_K - T_E) \end{cases}$$

- ▶ Fragestellung: Soll die Flussrate  $F$  höher oder niedriger eingestellt werden?
- ▶ Intuitiv: Eiskaltes Wasser strömt über die Hand.
  - ▶ Es ist länger auszuhalten, wenn die Flussrate niedriger ist,
  - ▶ d.h. Energietransport  $E'$  ist weniger, wenn  $F$  kleiner ist.
  - ▶ Für das Erdwärmesystem soll Energietransport höher sein.
- ▶ Im obigen System der GDG ist der Energietransport ins Haus,

$$-(E_K + E_E)' = \rho_K c_K F_K (T_K - T_P)$$

- ▶ Wenn  $\Delta T = T_K - T_P$  fixiert ist, ist die gewonnene Energie pro Zeiteinheit umso höher, je größer  $F_K$  ist.
- ▶  $T_K - T_P$  im obigen System soll mit einer Funktion  $\phi(T_K)$  ersetzt werden, die von der Wärmepumpe abhängt, z.B.

$$\phi(t) \approx 2, t \approx 5, \text{ aber } \phi(t) \rightarrow 0 \text{ für } t < 0.$$

Eine Möglichkeit wäre,  $\phi$  ist eine logistische Funktion.



# Wärmeaufnahme

- ▶ Der Energietransport ins Haus wird

$$-(E_K + E_E)' = \rho_K c_K F_K \phi(T_K)$$

und die Wirkung einer größeren Flussrate  $F_K$  nimmt ab, wenn  $\phi(T_K)$  klein wird.

**Hausaufgabe:** Sei  $t^*(F_K)$  die Laufzeit der Pumpe, die notwendig ist, um eine gezielte Energie  $E^*$  ins Haus zu bringen:

$$E^* = \rho_K c_K F_K \int_0^{t^*(F_K)} \phi(T_K(t; F_K)) dt \quad \text{mit} \quad \phi(T) = 2 \min\{\max\{T/T_0, 0\}, 1\}$$

Zeige  $T_K \in [0, T_0]$  und daher  $\phi(T_K) = 2T_K/T_0$ . Zeige  $t^{*\prime}(F_K) < 0$ .

- ▶ Folglich ist es theoretisch vorteilhaft, dass  $F_K$  möglichst groß ist.
- ▶ Wenn die Flussrate immer größer wird, gibt es trotzdem Kosten für eine große Flussrate, besonders wenn sehr kalte Flüssigkeit visköser wird. Daher gibt es praktisch eine optimale Flussrate.
- ▶ Die Flussrate kann passiv durch parallele Leitungen erhöht werden.

## Parallele Kollektoren

- ▶ Wenn eine Druckdifferenz  $\Delta P$  von der Wärmepumpe erzeugt wird, folgt aus dem Ohmschen Gesetz dass

$$\Delta P = W_K \cdot F_K$$

gilt, wobei  $W$  der Widerstand des Kollektorensystems ist.

- ▶ Für eine einzige Leitung mit Radius  $R$  und Länge  $L$  ist der Widerstand durch das Poiseuille'sche Gesetz gegeben,

$$W = 8\nu L / (\pi R^4)$$

wobei  $\nu$  die Viskosität der Flüssigkeit ist.

- ▶ (Wenn die Strömung turbulent ist, ist der Widerstand noch höher, aber er hängt von  $L$  immer noch linear ab.)
- ▶ Üblicherweise ist eine gegebene Fläche verfügbar für das Kollektorensystem, und daher wird angenommen dass die gesamte Länge aller Leitungen fixiert ist.
- ▶ Wenn  $n$  gleich lange Leitungen parallel verlegt werden, folgt wieder aus dem Ohmschen Gesetz dass

$$\Delta P = W_n F_n = w_i f_i, \quad i = 1, \dots, n$$

gilt, wobei  $w_i$  and  $f_i$  der Widerstand bzw. Flussrate der  $i$ ten Leitung sind,  $W_n$  und  $F_n$  für das gesamte Leitungssystem.

## Parallele Kollektoren

- ▶ Der Widerstand hängt linear von der Leitungslänge ab, und daher gilt

$$W_1 = nw_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

- ▶ Laut dem Kirchhoff'schen Gesetz gilt

$$F_n = f_1 + \dots + f_n$$

- ▶ Laut dem Ohmschen Gesetz

$$\frac{\Delta P}{W_n} = F_n = f_1 + \dots + f_n = \frac{\Delta P}{w_1} + \dots + \frac{\Delta P}{w_n}$$

und zusammen mit  $W_1 = nw_i, i = 1, \dots, n$ , folgt

$$\frac{1}{W_n} = \frac{1}{w_1} + \dots + \frac{1}{w_n} = \frac{n}{W_1/n}$$

oder

$$W_n = \frac{W_1}{n^2}, \quad F_n = \frac{\Delta P}{W_n} = n^2 \frac{\Delta P}{W_1} = n^2 F_1$$

- ▶ Daher für fixiertes  $\Delta P$  steigt die Flussrate quadratisch mit der Anzahl  $n$  der gleich langen parallelen Leitungen.
- ▶ Wie viele Leitungen können praktisch parallel verlegt werden?

# Einfaches Modell für ein Erdwärmesystem

Nun die Wärmeabgabe:

- ▶ Das einfachste Modell der Fussbodenheizung:
  - ▶ 1 Kompartiment für das Austeilersystem.
  - ▶ 1 Kompartiment für das Haussystem.

- ▶ Für das Austeiler- bzw. Haus-Kompartiment,

$$E_A = \rho_A c_A V_A T_A, \quad E_H = \rho_H c_H V_H T_H$$

- ▶ Für reine Diffusion über die Grenzfläche:

$$E'_A = \alpha_A^H S_A^H (T_H - T_A), \quad E'_H = \alpha_A^H S_A^H (T_A - T_H)$$

- ▶ Die Flussrate durch das Austeilersystem:  $F_A$

- ▶ Der Zufluss für das Austeilersystem hat die Temperatur  $T_S$  eines Wärmespeichers, der von der Wärmepumpe versorgt wird.

- ▶ Energieerhaltung:  $T_S > T_A(0) = T_H(0) = T_0$

$$\begin{cases} \rho_H c_H V_H T'_H = \alpha_A^H S_A^H (T_A - T_H) \\ \rho_A c_A V_A T'_A = \alpha_A^H S_A^H (T_H - T_A) + F_A (\rho_S c_S T_S - \rho_A c_A T_A) \end{cases}$$

- ▶ Wie mit der Wärmeaufnahme soll der Energietransport für Wärmeabgabe höher sein, wenn die Flussrate  $F_A$  höher ist.

# Wärmeabgabe

- ▶ Die Temperatur  $T_S$  des Wärmespeichers bleibt aber nicht konstant. Deswegen wird ein Kompartiment für den Wärmespeicher eingeführt:  $E_S = \rho_S c_S T_S$ .
- ▶ Das Kollektorensystem und das Austeilersystem werden nun durch die Einführung des neuen Kompartiments gekoppelt:  $E'_H + E'_A + E'_S + E'_K + E'_E = 0$ . (ohne  $Q$  und  $\alpha_H^L$ )
- ▶ Auch mit Lufttemperatur  $T_L$  und Sonnenstrahlung  $Q$  gelten  

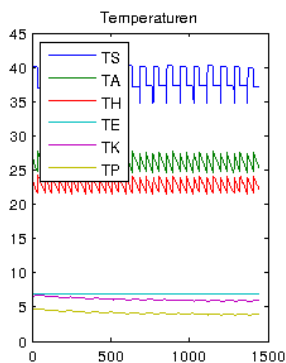
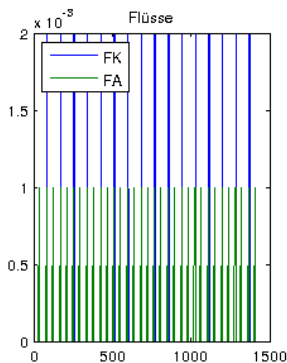
$$\rho_H c_H V_H T'_H = \alpha_H^L S_H^L (T_L - T_H), \quad \rho_E c_E V_E T'_E = Q$$
 ohne Heizung.  $T_S > T_A(0) = T_H(0) > T_K(0) = T_E(0) > T_L$
- ▶ Das Modell mit diesen Kopplungen ist:  $T_P = T_K - \phi(T_K)$

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_H c_H V_H T'_H = \alpha_A^H S_A^H (T_A - T_H) + \alpha_H^L S_H^L (T_L - T_H) \\ \rho_A c_A V_A T'_A = \alpha_A^H S_A^H (T_H - T_A) + F_A (\rho_S c_S T_S - \rho_A c_A T_A) \\ \rho_S c_S V_S T'_S = F_A (\rho_A c_A T_A - \rho_S c_S T_S) \\ \rho_K c_K V_K T'_K = \alpha_K^E S_K^E (T_E - T_K) + F_K (\rho_P c_P T_P - \rho_K c_K T_K) \\ \rho_E c_E V_E T'_E = \alpha_K^E S_K^E (T_K - T_E) + Q \end{array} \right.$$

**Hausaufgabe:** Entwickle  $F_K(t)$  und  $F_A(t)$  damit  $T_H \in [T_{\min}, T_{\max}]$ .

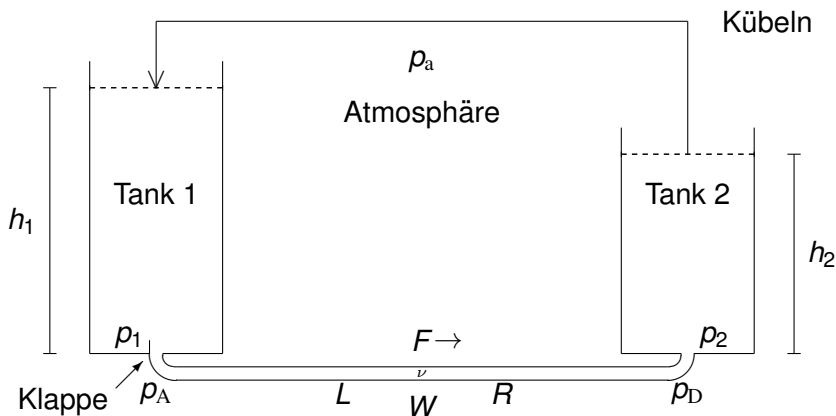
# Simulation des Erdwärmesystems

- ▶ Eine Simulation mit  $T_H \in [22\text{C}, 23\text{C}]$  und  $T_S \in [35\text{C}, 40\text{C}]$ :



- ▶ Siehe Matlab-Code. Größen durch realistische Geometrie.
  - ▶ Schlauchdurchmesser: 1cm Fußbodenheizung, 3cm Erdekollektoren. Flächen: 5.8m<sup>2</sup> Haus, 70.7m<sup>2</sup> Erde.
  - ▶ Abstände in spiralförmiger Verlegung: 20cm Fussbodenheizung, 60cm Erdekollektoren.

# Effekt der Luftblasen in Rohren



► Bernoulli:  $P + \rho gH + \frac{\rho}{2} V^2 = \text{Konstante}$ ,

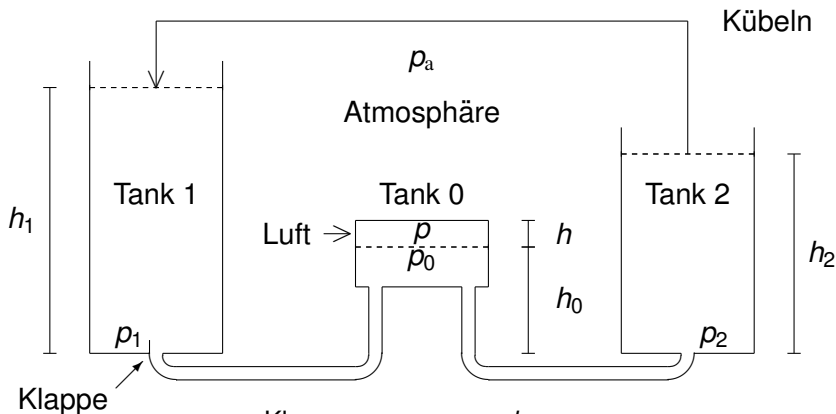
$$v = F/A, \quad A = \pi R^2, \quad p_{1,2} = p_a + \rho g h_{1,2}, \quad \frac{\rho}{2} v^2 + p_{A,D} = p_{1,2}.$$

► Poiseuille:  $p_A - p_D = W \cdot F$ ,  $W = 8\nu L / (\pi R^4)$

► Klappe auf,  $F$  nach rechts,  $h_1, h_2$  konstant durch Kübeln.

**Hausaufgabe:** Entwickle ein dynamisches Modell des Systems.

# Effekt der Luftblasen in Rohren



- ▶ Klappe zu,  $p_0 + \rho g h_0 = p_2$
- ▶ Bernoulli: ▶ Klappe auf,  $p_0 + \rho g h_0 = \frac{1}{2}(p_1 + p_2) > p_2$
- ▶ Ideales Gas:  $p = \rho_L \mathcal{R} T = p_0$  (z.B.  $h_2, p_2$  konstant)
- ▶ Strömung erhöht  $p_0 = p$ , reduziert Luftvolumen daher  $h$ .
- ▶ Wenn  $h_2$  konstant bleibt und  $h$  sinkt, sinken  $h_1$  (und  $p_1$ ) wegen Volumenerhaltung, und  $F = (p_1 - p_2)/W$  sinkt.

**Hausaufgabe:** Bestimme die Gleichgewicht-Druckverteilung.



# Rudern Dynamik

- ▶ Die Bootgeschwindigkeit soll bestimmt werden, wenn 8 Sportler das Boot rudern.

- ▶ Grundmodell: Das Newtonsche Gesetz  $F = m \cdot a$ ,

$$Mu' = T - D$$

wobei  $M$  = Masse des Boots,  $u$  = Bootgeschwindigkeit,  $T$  = Zug (Traction) und  $D$  = Widerstand (Drag).

- ▶ Bemerkung:  $\text{sign}(u') = \text{sign}(T - D)$ .

- ▶  $D \propto$  Grenzflächeninhalt  $S$ . Strömungstheorie:  $D \propto u^2$ .

$$D = bSu^2$$

- ▶  $T$ ? Arbeit = Kraft  $\times$  Weg =  $T \cdot (udt)$ ,

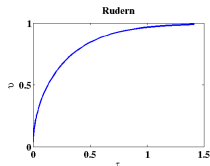
Leistung = Kraft  $\times$  Geschwindigkeit =  $T \cdot u$ .

- ▶ Angenommen: Leistung fixiert,  $P$  pro Sportler:  $8P = Tu$ .

- ▶ Mathematisches Modell,  $Mu' = 8P/u - bSu^2$ .

- ▶ Lösung:  $v := \frac{u}{v}$ ,  $v := 2 \left[ \frac{P}{bS} \right]^{\frac{1}{3}}$ ,  $\tau := \frac{bSvt}{M}$ ,

$$\ln \left[ \frac{v^2 + v + 1}{(v - 1)^2} \right] + \frac{\pi}{\sqrt{3}} - 2\sqrt{3} \tan^{-1} \left[ \frac{1 + 2v}{\sqrt{3}} \right] = 6\tau$$

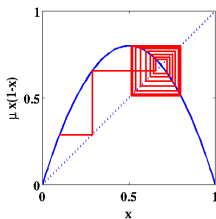
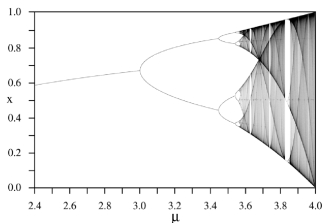


# Diskrete Modelle

- ▶ Beispiel: logistische Evolution,

$$x_{n+1} = \mu x_n(1 - x_n)$$

$x_n$  = Population nach der  $n$ ten Zeiteinheit oder nach dem  $n$ ten Übergang.



- ▶  $\mu \in [0, 1)$ , aussterben.
  - ▶  $\mu \in [1, 3)$ ,  $x_n \rightarrow (\mu - 1)/\mu$ .
  - ▶  $\mu \in [3, 1 + \sqrt{6})$ ,  $x_n \rightarrow \{x_{1,0}^*(\mu), x_{1,1}^*(\mu)\}$ .
  - ▶  $\mu \in [\mu_k, \mu_{k+1})$ ,  $x_n \rightarrow \{x_{k,j}^*(\mu)\}_{j=0}^{2^k-1}$  (Periodenverdoppelung).
  - ▶  $\mu \approx 3.56995$  und größer, Chaos.
- ▶ Hybrid: kontinuierlich in einem diskreten Modell,  
$$y(t_n) = A(x_n), \quad y' = g(y), \quad x_{n+1} = B(y(t_{n+1}))$$

# Lachs Dynamik

- ▶ Zustandsvariablen:
  - ▶  $x_n$  = Anzahl von  $10^8$  Lachsen (Erwachsene) am Ende des  $n$ ten Laichzyklus, auch zu Beginn des  $(n+1)$ ten.
  - ▶  $y(t)$  = Anzahl von  $10^8$  Larven zur Zeit  $t \in [t_n, t_{n+1}]$ , d.h. während des  $(n+1)$ ten Laichzyklus.
- ▶ Beziehung zwischen  $y(t_n)$  und  $x_n$ ?
  - ▶  $x_n \uparrow \Rightarrow$  Weibchen  $\uparrow \Rightarrow$  Eier  $\uparrow \Rightarrow$  Larven  $\uparrow$
  - ▶ Also einfach 
$$y(t_n) = \alpha x_n$$
- ▶ Beziehung zwischen  $y(t_n)$ , d.h.  $x_n$ , und  $y(t_{n+1})$ ?
  - ▶ Erwachsene fressen die Larven.
  - ▶  $x_n \uparrow \Rightarrow$  Anzahl der gefressenen Larven  $\uparrow$ .
  - ▶ Also einfach 
$$y' = -\beta x_n y, \quad y(t_{n+1}) = y(t_n) e^{-\beta x_n (t_{n+1} - t_n)} = \alpha x_n e^{-\beta x_n (t_{n+1} - t_n)}$$
- ▶ Beziehung zwischen  $y(t_{n+1})$  und  $x_{n+1}$ ?
  - ▶ Bruchteil  $\gamma$  von  $y(t_{n+1})$  überleben.
  - ▶ Bruchteil  $\delta$  von überlebenden  $x_n$ ? Pazifik:  $\delta = 0$ . Atlantik:  $\delta > 0$ . Nimm Pazifik, also  $\delta = 0$ .
  - ▶ Also einfach 
$$x_{n+1} = \gamma y(t_{n+1}) + \delta x_n$$

# Lachs Dynamik

- ▶ Alles zusammen

$$x_{n+1} = ax_n e^{-bx_n}$$

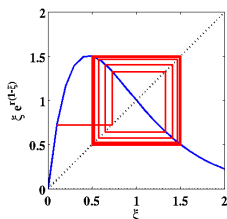
wobei  $a = \gamma\alpha$ ,  $b = \beta(t_{n+1} - t_n)$ .

- ▶ Weiter,

$$x_{n+1} = x_n e^{\ln a - bx_n} = x_n e^{\ln a [1 - \frac{b}{\ln a} x_n]}$$

- ▶ Dimensionslos,  $r = \ln a$ ,  $\xi_n = \frac{b}{r} x_n$ ,

$$\xi_{n+1} = \frac{b}{r} x_{n+1} = \frac{b}{r} x_n e^{r(1 - \frac{b}{r} x_n)} = \xi_n e^{r(1 - \xi_n)}$$



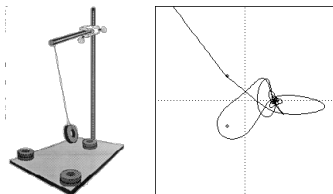
- ▶  $r \in (r_0, r_1)$ ,  $\xi_n \rightarrow \xi_{0,0}^*$ .
- ▶  $r \in (r_1, r_2)$ ,  $\xi_n \rightarrow \{\xi_{1,0}^*, \xi_{1,1}^*\}$ .
- ▶  $r \in (r_k, r_{k+1})$ ,  $\xi_n \rightarrow \{\xi_{k,j}^*\}_{j=0}^{2^k-1}$   
(Periodenverdoppelung).
- ▶  $r^* \approx 2.6924$ , Chaos.

**Def:** Ein dynamisches System ist chaotisch wenn:

- ▶  $\exists M > 0$  s.d. für jede Lösung  $x_1$  und  $\forall \epsilon > 0$ ,  $\exists$  Lösung  $x_2$  und Zeit  $t$  s.d.  $|x_1(0) - x_2(0)| < \epsilon$  obwohl  $|x_1(t) - x_2(t)| > M$ . (empfindliche Abhängigkeit von Anfangsbedingungen)
- ▶  $\forall x_0$ ,  $\forall \epsilon > 0$ ,  $\exists$  periodische Lösung  $x$  und Zeit  $t$  s.d.  $|x(t) - x_0| < \epsilon$ . (periodische Bahnen sind dicht)
- ▶  $\forall x_1, x_2$ ,  $\forall \epsilon > 0$ ,  $\exists$  Lösung  $x$  und Zeiten  $t_1, t_2$  s.d.  $|x(t_1) - x_1| < \epsilon$ ,  $|x(t_2) - x_2| < \epsilon$ . (topologisch mischend)
  
- ▶ Diskrete Systeme können in  $\mathbb{R}^1$  chaotisch sein, z.B. siehe das logistische und das Lachs Modell oben.
- ▶ Kontinuierliche Systeme nur ab  $\mathbb{R}^3$ , z.B. siehe die folgenden.

# Chaos

- ▶ Kontinuierliches chaotisches System: Pendel und Magneten

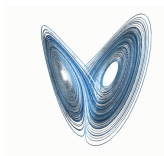


- ▶ Freiheitsgrade  $x_1(t), x_2(t)$ ,  
Position in  $\mathbb{R}^2$ ,  $v_1(t), v_2(t)$   
Geschwindigkeiten in  $\mathbb{R}^2$ .
- ▶ Zustand  
 $\langle x_1(t), x_2(t), v_1(t), v_2(t) \rangle \in \mathbb{R}^4$ .

- ▶ Kontinuierliches chaotisches System: Lorenz (Vereinfachte Konvektion / Strömung in der Atmosphäre)

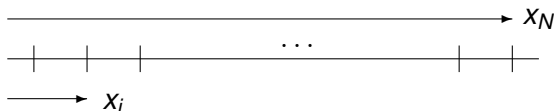
$$\begin{aligned}\dot{X} &= \sigma(Y - X) & \sigma &= \text{Prandtl \#} \\ \dot{Y} &= -XZ + \rho X - Y & \rho &= \text{Rayleigh \#} \\ \dot{Z} &= XZ - \beta Z & \sigma = 10, \beta = 8/3, \rho = 28 &\Rightarrow \text{Chaos}\end{aligned}$$

Seltsamer Attraktor



# Verkehr Dynamik

- ▶ Auto Positionen  $x_i(t)$ , Geschwindigkeiten  $x'_i(t)$ .



- ▶  $x_N(t)$  ist fixiert und stellt dar, unendlich viele vordere Fahrer im gleichen Zustand.
- ▶ Der  $i$ te Fahrer bremmt stärker wenn
  - ▶  $x_{i+1}(t) - x_i(t)$  kleiner. (Abstand vor mir kleiner)
  - ▶  $x'_i(t) - x'_{i+1}(t)$  größer. (Entschleunigung vor mir)
  - ▶ Zusammen,

$$\text{Bremsenkraft} = A \frac{x'_i - x'_{i+1}}{x_{i+1} - x_i}$$

- ▶ Newtonsches Gesetz  $ma = F$ , Reaktionszeit  $\tau$ ,

$$-Mx''_i(t + \tau) = A \frac{x'_i(t) - x'_{i+1}(t)}{x_{i+1}(t) - x_i(t)} = -A \frac{d}{dt} \ln[x_{i+1}(t) - x_i(t)]$$

Mit  $\lambda = A/M$ ,

$$x'_i(t + \tau) = \lambda \ln[x_{i+1}(t) - x_i(t)] + \alpha_i$$

# Masse-Feder-System

- ▶ Sei  $m$  die Masse und  $u$  ihre abwärtsgerichtete Auslenkung vom Ruhestand.
- ▶ Es gibt innere elastische Kraft der Feder  $f^{\text{elas}}$ , die gegen Auslenkungen vom Ruhestand wirkt. Mit

$$f^{\text{elas}} = -ku, \quad k > 0$$

wird diese durch eine lineare Abhängigkeit von  $u$  modelliert, wobei  $k$  die *Federkonstante* ist.

- ▶ Sei  $f$  eine äußere abwärtsgerichtete Kraft auf die Masse.
- ▶ Laut dem Newtonschen Gesetz kann die Bewegung durch

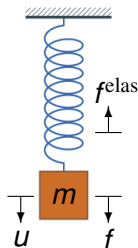
$$mu'' = -ku + f$$

modelliert werden, wobei  $u''$  die Beschleunigung und  $-ku + f$  die Summe der wirkenden Kräfte darstellen.

- ▶ Die Kräfte können auch bezüglich der Ableitung  $-P'(u)$  des folgenden zu minimierenden Potentials dargestellt werden,

$$P(u) = ku^2/2 - fu$$

wobei  $ku^2/2$  die elastische Energie der Feder und  $fu$  die gegenwirkende Arbeit der äußeren Kraft darstellen.





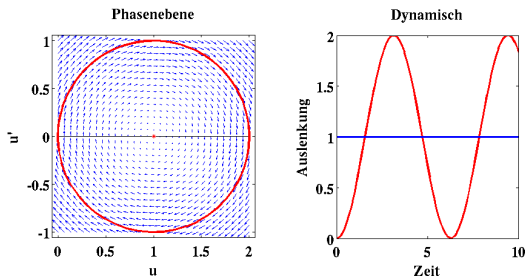
# Harmonische Schwingungen

- Die GDG  $mu'' = -P'(u)$  kann in erste Ordnung so umgeschrieben werden,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \underset{=:M}{=} \begin{bmatrix} u \\ u' \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k & 0 \end{bmatrix} \underset{=:K}{=} \begin{bmatrix} u \\ u' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ f \end{bmatrix}$$

Die Systemmatrix  $A = M^{-1}K$  erfüllt  $\sigma(A) = \{\pm i\sqrt{k/m}\}$ .

- Eine Simulation mit  $m = 1$ ,  $k = 1$  und  $f = 1$  zeigt:



- Die Bahn des Zustands im Phasenraum ist ein Kreis.
- Die Masse weist *harmonische Schwingungen* um den Ruhestand  $u^* = f/k = 1$  auf.

## Reibungskräfte

- ▶ Solche Bewegung ist nicht realistisch, weil es Reibungen gibt, die die Masse zum Ruhezustand bringen.
- ▶ Je schneller die Bewegung, desto höher die Reibung, d.h. eine Reibungskraft  $f^{\text{reib}}$  wirkt gegen  $u'$ .
- ▶ Diese wird durch eine lineare Abhängigkeit von  $u'$  modelliert,

$$f^{\text{reib}} = -cu', \quad c > 0$$

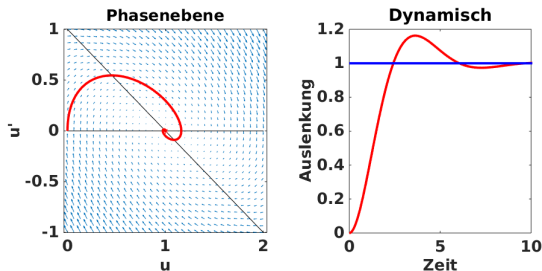
- ▶ Die GDG  $mu'' = -ku + f - cu'$  kann in erste Ordnung so umgeschrieben werden,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \underset{=:M}{=} \begin{bmatrix} u \\ u' \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k & -c \end{bmatrix} \underset{=:K}{=} \begin{bmatrix} u \\ u' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ f \end{bmatrix}$$

- ▶ Da die Eigenwerte der Systemmatrix  $A = M^{-1}K$  erfüllen,  
 $\lambda(m\lambda + c) + k = 0, \quad \lambda \in \{(-c \pm \sqrt{c^2 - 4k})/(2m)\}$   
gilt  $\max \Re\{\sigma(A)\} < 0$ , und das Gleichgewicht  $u^* = f/k$   
( $u' = 0$ ) ist lokal asymptotisch stabil.
- ▶ Wenn  $c^2 < 4k$  gilt, gibt es gedämpfte Schwingungen.  
Wenn  $c^2 > 4k$  gilt, kommt der Zustand monoton zum Ruhezustand.

# Gedämpfte Federschwingungen

- ▶ Eine Simulation mit  $m = 1$ ,  $k = 1$ ,  $f = 1$  und  $c = 1$  zeigt:



- ▶ Die Bahn des Zustands im Phasenraum ist eine Spirale.
- ▶ Auf den Geraden im Phasenraum ist entweder  $u$  oder  $u'$  Null,

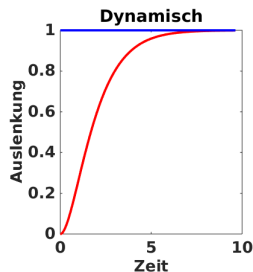
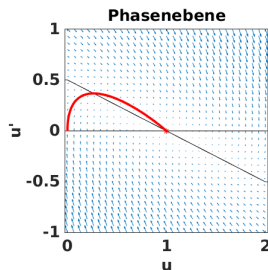
$$\begin{aligned} u' = 0 &\Leftrightarrow 0 = \begin{bmatrix} u \\ u' \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k/m & -c/m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ u' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ f/m \end{bmatrix} \\ u' = (f - ku)/c &\Leftrightarrow 0 = \end{aligned}$$

d.h. der Richtungsfeldvektor in einem Punkt dieser Geraden ist entweder waagerecht oder senkrecht.

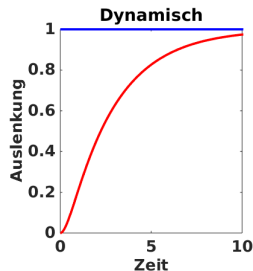
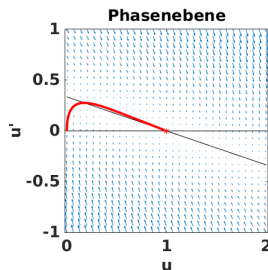
- ▶ Die Masse weist *gedämpfte Schwingungen* um den Ruhezustand  $u^* = f/k = 1$  auf. Zustand ist *untergedämpft*.

# Gedämpfte Federschwingungen

- ▶ Mit  $m = 1$ ,  $k = 1$ ,  $f = 1$  und  $c = 2$ , d.h.  $\sigma(A) = \{-c/(2m)\}$  ist der Zustand kritisch gedämpft:



- ▶ Mit  $m = 1$ ,  $k = 1$ ,  $f = 1$  und  $c = 3$ , d.h.  $\sigma(A) = \{(-c \pm \sqrt{c^2 - 4k})/(2m)\} \subset \mathbb{R}$  ist der Zustand übergedämpft:



# Gleichgewichte, Attraktoren, Langzeitverhalten

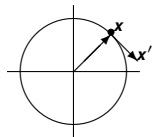
- ▶ Gleichgewicht  $\mathbf{x}^*$ :  $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{f}(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$ .
- ▶ Einfaches Beispiel:  $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$  ist ein Gleichgewicht.
- ▶ Explizites Beispiel:  $\mathbf{x} = \langle x, y \rangle^T$ ,  $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ ,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{Lösung:} \quad \begin{cases} x(t) = \alpha \cos(t) + \beta \sin(t) \\ y(t) = \beta \cos(t) - \alpha \sin(t) \end{cases}$$

Tangent zur Lösungskurve ist  $\mathbf{x}' = \langle x', y' \rangle^T$ , d.h. in diesem Beispiel gelten  $x' = y$ ,  $y' = -x$  und daher,  $\|\mathbf{x}\|_{\ell_p} = [\sum_{i=1}^N |x_i|^p]^{\frac{1}{p}}$

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\mathbf{x}(t)\|_{\ell_2}^2 = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \mathbf{x}(t) \cdot \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}' \cdot \mathbf{x} = \langle y, -x \rangle \cdot \langle x, y \rangle = 0.$$

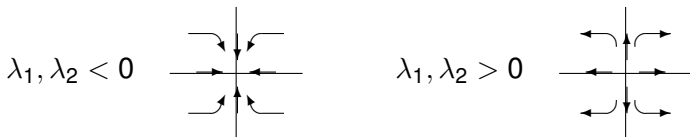
Das Gleichgewicht  $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$  ist *stabil*, weil bei einer Störung die Lösung nicht wegfährt:



- ▶ Eine Variante:  $\mathbf{B} = \mathbf{S}\mathbf{A}\mathbf{S}^{-1}$ ,  $\mathbf{x}' = \mathbf{B}\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$ .  
 $\mathbf{y} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y} \Rightarrow \frac{d}{dt} \|\mathbf{S}^{-1}\mathbf{x}\|_{\ell_2}^2 = \frac{d}{dt} \|\mathbf{y}\|_{\ell_2}^2 = 0.$

# Stabilität eines Gleichgewichts

- ▶ Beispiel:  $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{A} = \mathbf{S}\mathbf{\Lambda}\mathbf{S}^{-1}$ ,  $\mathbf{\Lambda} = \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2\}$ ,  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ .



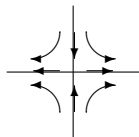
Für den Fall  $\lambda_1, \lambda_2 < 0$  ist das Gleichgewicht  $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$  *asymptotisch stabil*, weil bei einer Störung die Lösung wieder hineinfährt.

Für den Fall  $\lambda_1, \lambda_2 > 0$  ist das Gleichgewicht *instabil*.

- ▶ Beispiel:  $\mathbf{A} = \mathbf{S}\mathbf{\Lambda}\mathbf{S}^{-1}$  mit  $\mathbf{\Lambda} = \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2\}$  und  $\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$ , z.B.  $\lambda_1 = 1 = -\lambda_2$  und  $\mathbf{S} = \mathbf{I}$ .

Hier ist das Gleichgewicht  $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$  instabil, weil bei einer Störung die Lösung wegfahren *kann*.  
*Sattelpunkt:*

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = -\nabla P(\mathbf{x}), \quad P(x, y) = (y^2 - x^2)/2$$

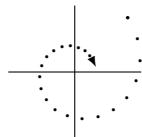


# Stabilität eines Gleichgewichts

- ▶ Beispiel:  $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{x} = \langle x, y \rangle^T$

$$A = \begin{bmatrix} -\epsilon & 1 \\ -1 & -\epsilon \end{bmatrix} \quad \text{Eigenwerte: } \begin{cases} 0 = \det(\lambda I - A) = \\ \lambda^2 + 2\epsilon\lambda + \epsilon^2 + 1 \\ \lambda_{1,2} = -\epsilon \pm i \end{cases}$$

$$\text{Lösung: } \begin{cases} x(t) = e^{-\epsilon t}[\alpha \cos(t) + \beta \sin(t)] \\ y(t) = e^{-\epsilon t}[\beta \cos(t) - \alpha \sin(t)] \end{cases}$$



- ▶ Im allgemeinen:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}' &= \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{f}(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0} \\ &= \mathbf{f}(\mathbf{x}^*)|_{=0} + \mathbf{f}'(\mathbf{x}^*)|_{=A}(\mathbf{x} - \mathbf{x}^*) + \mathbf{g}(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

$$\text{wobei } \mathbf{g}(\mathbf{x}) = o(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*\|). \quad \text{Für } t \rightarrow t_0, g(t) = \begin{cases} o(f(t)) \Leftrightarrow \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{g(t)}{f(t)} < \infty \\ o(f(t)) \Leftrightarrow \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{g(t)}{f(t)} = 0 \end{cases}$$

$$(\mathbf{x} - \mathbf{x}^*)' = \mathbf{x}' = A(\mathbf{x} - \mathbf{x}^*) + \mathbf{g}(\mathbf{x})$$

$\Leftrightarrow$  bestimmt die Stabilität von  $\mathbf{x}^*$

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*\|_{\ell_2}^2 = (\mathbf{x} - \mathbf{x}^*) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}^*)' \approx (\mathbf{x} - \mathbf{x}^*)^T A (\mathbf{x} - \mathbf{x}^*) \stackrel{?}{\leq} 0$$

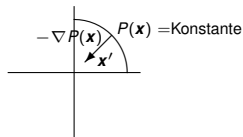
# Stabilität eines Gleichgewichts

- ▶ Sattelpunkt:  $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ ,  $A = \text{diag}\{1, -1\}$ ,  
 $A\mathbf{x} = -\nabla P(\mathbf{x})$ ,  $P(x, y) = (y^2 - x^2)/2$ .

- ▶ Im allgemeinen:  $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x}) = -\nabla P(\mathbf{x})$ ,  $\exists P$ ?  
Um ein *Potential*  $P$  für gegebenes  $\mathbf{f}$  finden zu können,  
muss gelten: ( $P$  ausreichend glatt)

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} = -\nabla^2 P = -\nabla^2 P^T = \frac{\partial \mathbf{f}^T}{\partial \mathbf{x}}$$

- ▶ Bedeutung des Potentials:  
Manchmal bewegt sich ein dynamisches  
System sodass ein physikalisches  
Potential minimiert wird.



- ▶ Beispiel:  $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ ,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} = A \neq A^T = \frac{\partial \mathbf{f}^T}{\partial \mathbf{x}}$$

- ▶ Eine Drehung entsteht, wenn  $\sigma(A)$  komplex ist.



## Stabilität eines Gleichgewichts

- ▶ Wenn  $A$  nicht notwendigerweise symmetrisch ist, aber  $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$  und  $A = S\Lambda S^{-1}$ ,  $\Lambda = \text{diag}\{\lambda_i\}$ , ist trotzdem  $S^{-T}S^{-1}A = S^{-T}S^{-1}S\Lambda S^{-1} = S^{-T}\Lambda S^{-1}$  symmetrisch!  
Also  $\exists P$  mit  $S^{-T}S^{-1}A\mathbf{x} = -\nabla P(\mathbf{x})$  oder  
$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x} = -SS^T\nabla P(\mathbf{x})$$

Dann gilt

$$\nabla P(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{x}' = -\nabla P(\mathbf{x})SS^T\nabla P(\mathbf{x}) = -\|S^T\nabla P(\mathbf{x})\|^2 \leq 0$$

und die Lösungsbahn erhöht  $P$  nicht.

**Hausaufgabe:** Zeige fürs Masse-Feder-System mit  $A = [0, 1; -1, -3]$ .

**Def:** Für  $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ , wobei gilt  $\mathbf{f}(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$ , ist  $F \in C^1(B(\mathbf{x}^*, \epsilon))$  eine *Lyapunov Funktion* wenn:

1.  $F$  hat ein einziges Minimum in  $\mathbf{x}^*$ ,
2.  $\nabla F(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}) \leq 0, \forall \mathbf{x} \in B(\mathbf{x}^*, \epsilon)$ .

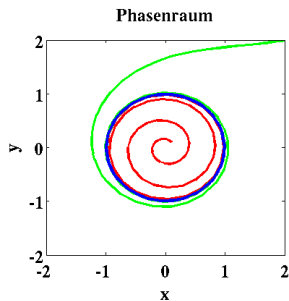
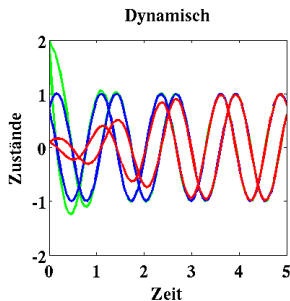
Wenn  $<$  (für  $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}^*$ ) gilt, ist  $F$  eine *strenge Lyapunov Funktion*.

- ▶ Ein lokal konvexes Potential ist eine Lyapunov Funktion.
- ▶ Eine Lyapunov Funktion ist fast ein Potential.

# Grenzyklen

- ▶ Explizites Beispiel eines stabilen Grenzyklus.

$$\begin{cases} x' = (1 - r^2)x - 5y \\ y' = (1 - r^2)y + 5x \end{cases} \quad r^2 = x^2 + y^2$$



$$xx' = (1 - r^2)x^2 - 5xy$$

$$yy' = (1 - r^2)y^2 + 5xy$$

---

$$rr' = xx' + yy' = (1 - r^2)r^2 \Rightarrow r' = r(1 - r^2)$$

$$\begin{cases} r \in (0, 1) \Rightarrow r' > 0 \\ r \in (1, \infty) \Rightarrow r' < 0 \end{cases} \Rightarrow r = 1 \text{ ist (asymptotisch) stabil.}$$

# Grenzzyklen

- Zerlegung in ein Potential plus eine Drehung:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} (1 - r^2)x \\ (1 - r^2)y \end{bmatrix} + A\mathbf{x}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & -5 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} 1 - 3x^2 - y^2 & -5 - 2xy \\ 5 - 2xy & 1 - x^2 - 3y^2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 - 2x^2 - r^2 & -2xy \\ -2xy & 1 - 2y^2 - r^2 \end{bmatrix} + A \end{aligned}$$

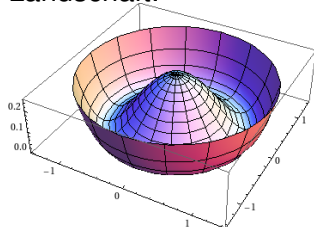
= symmetrisch + schief-symmetrisch

- Es gilt

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \underbrace{A\mathbf{x}}_{\text{Drehung}} - \underbrace{\nabla P(\mathbf{x})}_{\text{Potential}}$$

$$\text{mit } P(\mathbf{x}) = \frac{1}{4}(1 - x^2 - y^2)^2$$

Landschaft:



# Stabilität für Kontinuierliche Dynamische Systeme

**Def:** Für  $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ , wobei gilt  $\mathbf{f}(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$ , ist das Gleichgewicht  $\mathbf{x}^*$

- ▶ *global asymptotisch stabil* wenn  $\forall \mathbf{x}_0$  gilt

$$\mathbf{x}(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}^*,$$

- ▶ *lokal asymptotisch stabil* wenn  $\exists \delta > 0$  s.d.

$$|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}^*| \leq \delta \Rightarrow \mathbf{x}(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}^*,$$

- ▶ *lokal stabil* wenn  $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$  s.d.

$$|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}^*| \leq \delta \Rightarrow |\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^*| \leq \epsilon, \forall t \geq 0,$$

- ▶ *instabil* wenn nicht lokal stabil.

**Satz** (linearisierte Stabilität): Für  $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ , wobei gilt  $\mathbf{f}(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$ , sei  $J = \partial \mathbf{f} / \partial \mathbf{x}(\mathbf{x}^*)$  mit Spektrum  $\sigma(J)$  und  $\mu = \max \Re\{\sigma(J)\}$ . Das Gleichgewicht  $\mathbf{x}^*$

- ▶ ist lokal asymptotisch stabil wenn  $\mu < 0$ ,
- ▶ ist instabil wenn  $\mu > 0$ ,
- ▶ könnte stabil oder instabil sein wenn  $\mu = 0$ .

# Stabilität für Kontinuierliche Dynamische Systeme

- ▶ Beispiel: Schadstoff im See, Zufluss  $rK$ , Abfluss  $rS$ ,

$$VS' = r(K - S), \quad S(0) = S_0$$

Gleichgewicht:  $S^* = K$ . Stabil? Laut dem Satz,

$$S' = f(S), \quad f(S) = \frac{r}{V}(K - S), \quad f'(S) = -\frac{r}{V} < 0$$

Daher ist  $S^*$  **lokal** asymptotisch stabil. Lösung:

$$S(t) = K + (S_0 - K)e^{-rt/V}, \quad S(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} K, \quad \forall S_0$$

Daher ist  $S^*$  **global** asymptotisch stabil.

- ▶ Beispiel: Rudern Dynamik,  $Mu' = 8P/u - bSu^2$ ,

$$u' = f(u), \quad f(u) = \frac{bS}{Mu}(v^3 - u^3), \quad v^3 = \frac{8P}{bS}$$

Gleichgewicht:  $u^* = v$ . Stabil? Laut dem Satz,

$$f'(u) = -\frac{bS}{Mu^2}(v^3 + 2u^3), \quad f'(v) = -3\frac{bS}{M}v < 0$$

Daher ist  $u^*$  **lokal** asymptotisch stabil. Lösung:

$$\begin{aligned} & \ln \left[ \frac{v^2 + vu(x) + u(x)^2}{(v - u(x))^2} \right] - 2\sqrt{3} \tan^{-1} \left[ \frac{v + 2u(x)}{v\sqrt{3}} \right] \\ & - \ln \left[ \frac{v^2 + vu_0 + u_0^2}{(v - u_0)^2} \right] + 2\sqrt{3} \tan^{-1} \left[ \frac{v + 2u_0}{v\sqrt{3}} \right] = \frac{6bSv}{M}t \\ & t \rightarrow \infty \Rightarrow u \rightarrow v, \end{aligned}$$

Daher ist  $u^*$  **global** asymptotisch stabil.

# Stabilität für Kontinuierliche Dynamische Systeme

- ▶ Beispiel:  $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ ,

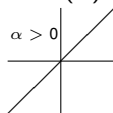
$$A = \begin{bmatrix} -\epsilon & 1 \\ -1 & -\epsilon \end{bmatrix}, \quad \sigma(A) = \{-\epsilon \pm i\}, \quad \mu = -\epsilon$$

- ▶  $\epsilon > 0 \Rightarrow \mathbf{x}^* = \mathbf{0}$  ist asymptotisch stabil.
- ▶  $\epsilon < 0 \Rightarrow \mathbf{x}^* = \mathbf{0}$  ist instabil.
- ▶  $\epsilon = 0$ ? Muss man direkt zeigen:

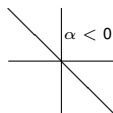
$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\mathbf{x}\|_{\ell_2}^2 = \mathbf{x} \cdot \mathbf{x}' = \mathbf{x}^T A \mathbf{x} = 0$$

$$\|\mathbf{x}(0)\|_{\ell_2} < \delta = \epsilon \Rightarrow \|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^*\|_{\ell_2} = \|\mathbf{x}(t)\|_{\ell_2} = \|\mathbf{x}(0)\|_{\ell_2} < \epsilon$$

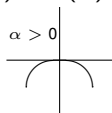
- ▶ Beispiel:  $f(x) = \alpha x$ ,  $x^* = 0$ ,  $\mu = f'(0) = \alpha$



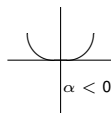
bergauf in  $x^* \Rightarrow$  instabil  
bergab in  $x^* \Rightarrow$  stabil



$$-p'(x) = f(x) \Rightarrow p(x) = -\alpha x^2 / 2$$



konkav in  $x^* \Rightarrow$  instabil  
konvex in  $x^* \Rightarrow$  stabil



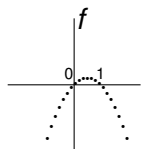
# Stabilität für Kontinuierliche Dynamische Systeme

- ▶ Beispiel:  $f(x) = x(1 - x)$ ,  $x^* \in \{0, 1\}$ ,  $f'(x) = 1 - 2x$

$$f'(0) = 1 > 0 \Rightarrow \text{instabil}$$

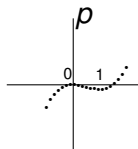
$$f'(1) = -1 < 0 \Rightarrow \text{asymptotisch stabil.}$$

$$-p'(x) = f(x) \Rightarrow p(x) = (2x - 3)x^2/6$$



$f$  bergauf,  $p$  konkav in 0  $\Rightarrow$  instabil

$f$  bergab,  $p$  konvex in 1  $\Rightarrow$  stabil



- ▶ Beispiel:  $f(x) = -x^2$ ,  $x^* = 0$ ,  $\mu = f'(0) = -2x|_{x=0} = 0$ .

$$x_0 > 0 \Rightarrow f(x_0) < 0 \Rightarrow x(t) \rightarrow 0$$

$$x_0 < 0 \Rightarrow f(x_0) < 0 \Rightarrow x(t) \rightarrow -\infty$$

$x^*$  ist instabil.

- ▶ Beispiel:  $f(x) = -x^3$ ,  $x^* = 0$ ,  $\mu = f'(0) = -3x^2|_{x=0} = 0$ .

$$x_0 > 0 \Rightarrow f(x_0) < 0 \Rightarrow x(t) \rightarrow 0$$

$$x_0 < 0 \Rightarrow f(x_0) > 0 \Rightarrow x(t) \rightarrow 0$$

$x^*$  ist asymptotisch stabil.

# Stabilität für Kontinuierliche Dynamische Systeme

- ▶ Beispiel:  $s'' + s = 0$ . In erste Ordnung:  $x = s, y = s'$ ,

$$x' = s' = y, \quad y' = s'' = -s = -x$$

$$\mathbf{x} = \langle x, y \rangle^T, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}, \quad \mathbf{x}^* = \mathbf{0}$$

$$\mu = \max \Re \sigma \left( \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}^*) \right) = \max \Re \sigma(A) = 0.$$

Oben direkt gezeigt:  $\mathbf{x}^*$  ist stabil.

- ▶ Beispiel:  $s^{(4)} + 2s^{(2)} + s = 0$ .  $\langle x, y, u, v \rangle = \langle s, s^{(1)}, s^{(2)}, s^{(3)} \rangle$ ,

$$x' = y, y' = u, u' = v, v' = -2u - x, \quad \mathbf{x} = \langle x, y \rangle^T$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}, \quad \mathbf{x}^* = \mathbf{0}$$

$$\mu = \max \Re \sigma \left( \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}^*) \right) = \max \Re \sigma(A) = \max \Re \{ \lambda : (\lambda^2 + 1)^2 = 0 \} = 0.$$

Allgemeine Lösung:  $s(t) = (\alpha + \beta t) \cos(t) + (\gamma + \delta t) \sin(t)$

$\beta, \delta \neq 0 \Rightarrow \mathbf{x}^*$  instabil.



# Stabilität für Kontinuierliche Dynamische Systeme

**Satz** (Gerschgorin): Für  $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^n$  gilt

$$\sigma(A) \subset \bigcup_{i=1}^n R_i \quad \text{wobei} \quad R_i = \left\{ z \in \mathbb{C} : |z - a_{ii}| \leq \sum_{i \neq j=1}^n |a_{ij}| \right\}$$

Weiters liegen genau  $k$  Eigenwerte in  $\bigcup_{j=1}^k R_j$  wenn diese Menge einen leeren Schnitt mit den anderen Scheiben hat.

► Beispiel:  $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}$  wobei

$$\{a_{ij}\} = \mathbf{A} = \text{tridiag}\{\alpha, \beta, \alpha\} \in \mathbb{R}^n$$

$$\mathbf{b} = \beta = -\langle 2, \dots, 2 \rangle^T \in \mathbb{R}^n, \quad \alpha = \langle 1, \dots, 1 \rangle^T \in \mathbb{R}^{n-1}$$

$\hat{x}_1 = \hat{x}_k - \hat{x}_{k-1} = \Delta x$  ► Für  $\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$  zeigt eine direkte Rechnung, dass  $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$  gilt.  
 $= \hat{x}_{k+1} - \hat{x}_k = -\hat{x}_n$  Daher gilt  $0 \notin \sigma(\mathbf{A})$ . Das einzige Gleichgewicht ist  $\mathbf{x}^* = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$ .  
 $\hat{x}_k = k\Delta x \xrightarrow{k=n} -\Delta \hat{x}$

► Da  $\mathbf{A}$  schwach diagonal dominant ist und  $a_{ii} < 0$  gilt, folgt aus dem Gerschgorin Satz dass  $\max \Re\{\sigma(\mathbf{A})\} < 0$  gilt.

► Daher für  $\mathbf{J} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}^*) = \mathbf{A}$  gilt  $\mu = \max \Re\{\sigma(\mathbf{J})\} < 0$ , und das Gleichgewicht  $\mathbf{x}^*$  ist lokal asymptotisch stabil.

Mit  $\lambda_{\max} = \max\{\sigma(\mathbf{A})\}$  und  $\theta(t) = \|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^*\|_{\ell_2}^2$  gilt zusätzlich

$$\frac{1}{2}\theta'(t) = (\mathbf{x} - \mathbf{x}^*)^T \mathbf{A}(\mathbf{x} - \mathbf{x}^*) \leq \lambda_{\max} \theta(t) \Rightarrow \theta(t) \leq \theta(0) e^{\lambda_{\max} t} \Rightarrow \mathbf{x}(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}^*$$

und daher ist  $\mathbf{x}^*$  global asymptotisch stabil.

# Stabilität für Kontinuierliche Dynamische Systeme

- ▶ Stabilität des Gleichgewichts für Räuber-Beute?

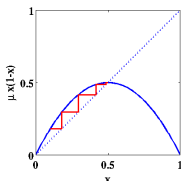
$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} (a_1 - b_1 y)x \\ (b_2 x - a_2)y \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x}^* = \begin{bmatrix} a_2/b_2 \\ a_1/b_1 \end{bmatrix}$$
$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} a_1 - b_1 y & -b_1 x \\ b_2 y & b_2 x - a_2 \end{bmatrix}$$
$$J = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}^*) = \begin{bmatrix} 0 & -b_1 a_2/b_2 \\ b_2 a_1/b_1 & 0 \end{bmatrix}$$
$$\sigma(J) = \{\lambda : \lambda^2 + a_1 a_2 = 0\}, \quad \mu = \max \Re \sigma(J) = 0.$$

**Satz:** Existiert für  $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ , wobei gilt  $\mathbf{f}(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$ , eine Lyapunov Funktion  $F$ , dann ist  $\mathbf{x}^*$  ein lokal stabiles Gleichgewicht. Wenn  $F$  streng ist, ist  $\mathbf{x}^*$  lokal asymptotisch stabil.

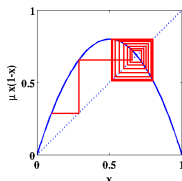
**Hausaufgabe:** Konstruiere eine Lyapunov Funktion, um die Stabilität des Gleichgewichts für das Räuber-Beute Modell zu bestimmen.

# Stabilität für Diskrete Dynamische Systeme

- Das logistische Modell:  $x_{n+1} = f(x_n)$ ,  $f(x) = \mu x(1-x)$

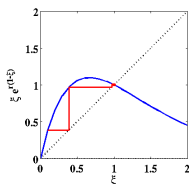


$$\mu = 2, \quad x^* = \frac{\mu-1}{\mu} = \frac{1}{2}$$
$$f'(x^*) = 0,$$

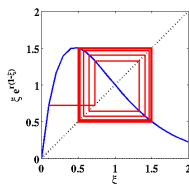


$$\mu = \frac{16}{5}, \quad x^* = \frac{\mu-1}{\mu} = \frac{11}{16}$$
$$f'(x^*) = -6/5$$

- Das Lachs-Modell:  $\xi_{n+1} = F(\xi_n)$ ,  $F(\xi) = \xi e^{r(1-\xi)}$



$$r = \frac{3}{2}, \quad \xi^* = 1$$
$$F'(\xi^*) = -1/2,$$



$$r = \frac{11}{5}, \quad \xi^* = 1$$
$$F'(\xi^*) = -6/5$$

# Stabilität für Diskrete Dynamische Systeme

**Def:** Für  $\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}^k)$ , wobei gilt  $\mathbf{x}^* = \mathbf{f}(\mathbf{x}^*)$ , ist das Gleichgewicht  $\mathbf{x}^*$

- ▶ *global asymptotisch stabil* wenn  $\forall \mathbf{x}^0$  gilt

$$\mathbf{x}^k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}^*,$$

- ▶ *lokal asymptotisch stabil* wenn  $\exists \delta > 0$  s.d.

$$|\mathbf{x}^0 - \mathbf{x}^*| \leq \delta \Rightarrow \mathbf{x}^k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}^*,$$

- ▶ *lokal stabil* wenn  $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$  s.d.

$$|\mathbf{x}^0 - \mathbf{x}^*| \leq \delta \Rightarrow |\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^*| \leq \epsilon, \forall k \geq 0,$$

- ▶ *instabil* wenn nicht lokal stabil.

**Satz** (linearisierte Stabilität): Für  $\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}^k)$ , wobei gilt  $\mathbf{x}^* = \mathbf{f}(\mathbf{x}^*)$ , sei  $J = \partial \mathbf{f} / \partial \mathbf{x}(\mathbf{x}^*)$  mit Spektralradius  $\rho(J)$ . Das Gleichgewicht  $\mathbf{x}^*$

- ▶ ist lokal asymptotisch stabil wenn  $\rho(J) < 1$ ,
- ▶ ist instabil wenn  $\rho(J) > 1$ ,
- ▶ könnte stabil oder instabil sein wenn  $\rho(J) = 1$ .

# Stabilität für Diskrete Dynamische Systeme

- Für das Lachs-Modell:

$$F(\xi) = \xi e^{r(1-\xi)}, \quad F'(\xi) = (1 - r\xi)e^{r(1-\xi)}$$

Mit  $\xi^* = 1$ ,

$$|F'(\xi^*)| = |1 - r| \begin{cases} < 1, & 0 < r < 2, & \text{asymptotisch stabil} \\ > 1, & r > 2, & \text{instabil.} \end{cases}$$

Für  $r = 0$  gilt  $F(\xi) = \xi$ , und  $\xi^*$  ist stabil:

$$|\xi_0 - 1| < \epsilon \Rightarrow |\xi_n - 1| = |\xi_0 - 1| < \epsilon.$$

Für  $r = 2$ ,

$$\exists \epsilon \text{ s.d. } -1 \leq F'(\xi) \leq 0, \quad \forall \xi \in [1 - \epsilon, 1 + \epsilon] \quad (\text{Warum?})$$

Wenn  $\xi \in [1 - \epsilon, 1]$ ,  $\exists \eta \in [1 - \epsilon, 1]$  s.d.

$$\begin{aligned} 0 &\geq 1 - F(\xi) = F(1) - F(\xi) = F'(\eta)(1 - \xi) \geq -(1 - \xi) \\ &\Rightarrow 1 = F(1) \leq F(\xi) \leq 2 - \xi \leq 2 - (1 - \epsilon) = 1 + \epsilon \end{aligned}$$

Wenn  $\xi \in [1, 1 + \epsilon]$ ,  $\exists \zeta \in [1, 1 + \epsilon]$  s.d.

$$\begin{aligned} 0 &\geq F(\xi) - 1 = F(\xi) - F(1) = F'(\zeta)(\xi - 1) \geq -(\xi - 1) \\ &\Rightarrow 1 = F(1) \geq F(\xi) \geq 2 - \xi \geq 2 - (1 + \epsilon) = 1 - \epsilon \end{aligned}$$

Daher gilt  $F([1 - \epsilon, 1 + \epsilon]) \subset [1 - \epsilon, 1 + \epsilon]$  und

$$|\xi_0 - 1| \leq \epsilon \Rightarrow |\xi_n - 1| \leq \epsilon$$

und  $\xi^*$  ist stabil.

# Stabilität für Diskrete Dynamische Systeme

## ▶ Experimente für das Lachs-Modell:

- ▶  $r = 1.609$ ,  $\xi_0 = 1.4311$ ,  $\xi_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 = \xi^*$ .
- ▶  $r = 2.306$ ,  $\xi_0 = 1$ ,  $\xi_n = 1$ ,  $\forall n$ . (aber instabil)
- ▶  $r = 2.3979$ ,  $\xi_0 = 1.4311$ ,  $\xi_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \{0.342658, 1.65734\}$ .
- ▶  $r = 2.70805$  ( $> 2.6924 = r^*$ ), Chaos.

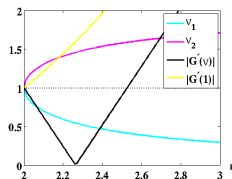
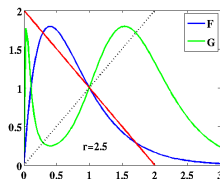
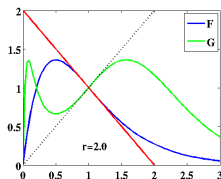
## ▶ Herleitung periodischer Grenzzyklen:

$$G(\xi) = F(F(\xi)) = \xi \exp[r(2 - \xi - \xi e^{r(1-\xi)})]$$

$$G'(\xi) = (1 - r\xi)(1 - r\xi e^{r(1-\xi)}) \exp[r(2 - \xi - \xi e^{r(1-\xi)})]$$

$$\xi = 1 \text{ oder } \xi = \nu \text{ wobei } \nu e^{r(1-\nu)} = 2 - \nu \Rightarrow G(\xi) = \xi$$

Genau 4 Lösungen für  $r > 2$ :  $0 < \nu_1 < 1 < \nu_2$ ,



Weiters:  $G'(\nu) = (1 - r\nu)(1 - r(2 - \nu))$  und

$$G'(1) = (1 - r)^2 > 1, \quad |G'(\nu_1)| = |G'(\nu_2)| < 1, \quad r \in (2, 2.5265)$$

## Stabilität einer Dynamischen Lösung

- ▶ Beispiel:  $x' = 1$ . Die Lösung  $\xi(t) = t$  erfüllt  $\xi(0) = 0$ . Sei  $x$  eine störende Lösung mit  $x(0) = \epsilon$ . Die Differenz  $\phi(t) = x(t) - \xi(t)$  erfüllt

$$\phi' = x' - \xi' = 0, \quad \phi(0) = \epsilon$$

oder  $\phi(t) = \epsilon$ . Es gilt  $|x(t) - \xi(t)| = |\phi(t)| \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \mathcal{O}(\epsilon)$ , und daher ist die Lösung  $\xi(t)$  stabil.

- ▶ Beispiel: Gegebene Lösung  $\xi(t) = \langle \cos(t), \sin(t) \rangle^T$  für

$$\mathbf{x}' = (1 - r^2)\mathbf{x} + \mathbf{A}\mathbf{x}, \quad r = \|\mathbf{x}\|_{\ell_2}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Sei  $\mathbf{x}(t)$  eine störende Lösung mit  $\|\mathbf{x}(0)\|_{\ell_2} = r_0 = 1 + \epsilon$ , wobei die Differenz  $\phi(t) = \mathbf{x}(t) - \xi(t)$  erfüllt  $\|\phi(0)\|_{\ell_2} = \epsilon$  und

$$(\phi \cdot \phi)' = 2(1 - r^2)\mathbf{x} \cdot \phi = (1 - r^2)(r^2 - 1 + \phi \cdot \phi)$$

oder mit  $\theta = \phi \cdot \phi$  und  $r' = (1 - r^2)r$ , (wobei  $r \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 1$ )

$$\theta' - (r'/r)\theta = -(1 - r^2)^2 \Rightarrow (\theta/r)' = -(1 - r^2)^2/r = (1 - r^{-2})r'$$

$$\theta \xleftarrow{t \rightarrow \infty} \frac{\theta}{r} = \frac{\epsilon^2}{r_0} + (r - r_0) + (r^{-1} - r_0^{-1}) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \frac{\epsilon^2}{r_0} - \frac{(1-r_0)^2}{r_0} = \mathcal{O}(\epsilon^2)$$

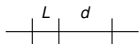
Es gilt  $\|\mathbf{x}(t) - \xi(t)\|_{\ell_2} = \|\phi(t)\|_{\ell_2} = \sqrt{\theta(t)} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \mathcal{O}(\epsilon)$ , und daher ist die Lösung  $\xi(t)$  stabil.

# Stabilität für Verkehr Dynamik

- Das Modell der Verkehr Dynamik:  $x_N$  gegeben,

$$x'_i(t + \tau) = \lambda \ln[x_{i+1}(t) - x_i(t)] + \alpha_i, \quad i = 1, \dots, N-1$$

- Idealisierter Zustand:



- Alle Autos haben die gleiche Länge  $L$ , den gleichen Abstand  $d$  und die gleiche Geschwindigkeit  $u$ .
- Die Verkehrsdichte  $\rho = 1/(d + L) = 1/[x_{i+1} - x_i]$  ist räumlich konstant und maximiert den Verkehrsfluss  $f(\rho) = \rho \cdot u(\rho)$ .

DG  $\Rightarrow \alpha_i = u - \lambda \ln(1/\rho) =: \alpha$ . Stabilität dieser Zustand?

- Modell der Geschwindigkeit:  $u = u(\rho)$ ,  $u'(\rho) \leq 0$ ,

$$u(\rho) = \begin{cases} u_{\max}, & 0 \leq \rho \leq \rho_c & (u_{\max} \text{ für } \rho \text{ klein}) \\ ?, & \rho_c \leq \rho \leq \rho_{\max} \\ 0, & \rho = \rho_{\max} & (\rho_{\max} \approx 1/L) \end{cases}$$

wobei  $u_{\max}$  = Geschwindigkeitsgrenze,  $\rho_c$  = kritische Dichte.

$$\text{DG} \Rightarrow u(\rho) = \lambda \ln(d + L) + \alpha = \lambda \ln(1/\rho) + \alpha$$

$$\rho = \rho_{\max} \Rightarrow u(\rho) = 0 \Rightarrow \alpha^* = \lambda^* \ln(\rho_{\max}). \text{ Mit der DG,}$$

$$u(\rho) = \lambda \ln(1/\rho) + \lambda \ln(\rho_{\max}) = \lambda \ln(\rho_{\max}/\rho)$$

$$\rho = \rho_c \Rightarrow u(\rho) = u_{\max} \Rightarrow \lambda^* = u_{\max} / \ln(\rho_{\max}/\rho_c). \text{ Mit der DG,}$$

$$u(\rho) = u_{\max} \ln(\rho_{\max}/\rho) / \ln(\rho_{\max}/\rho_c), \quad \rho_c \leq \rho \leq \rho_{\max}$$



# Stabilität für Verkehr Dynamik

- ▶ Verkehrsfluss  $f(\rho) = \rho u(\rho)$  wird maximiert in

$$\rho^* = \rho_{\max}/e.$$

Die entsprechende Geschwindigkeit ist:

$$u^* = u(\rho^*) = u_{\max}/\ln(\rho_{\max}/\rho_c)$$

- ▶ Der idealisierte Zustand ist explizit:

$$\xi_i(t) = u^*t + (i-1)/\rho^*, \quad i = 1, \dots, N$$

- ▶ Sei  $\{x_i\}_{i=1}^{N-1}$  eine störende Lösung des Systems,  $x_N(t) = \xi_N(t)$ ,

$$x_i''(t + \tau) = \lambda \frac{d}{dt} \ln[x_{i+1}(t) - x_i(t)], \quad i = 1, \dots, N-1$$

wobei  $\lambda = u^*$  und die Differenzen  $\phi_i(t) = x_i(t) - \xi_i(t)$  erfüllen  $|\phi_i([0, \tau])|, |\phi_i'(\tau)| = \mathcal{O}(\epsilon)$  und  $\phi_N = 0$ ,

$$\begin{aligned}\phi_i'(t + \tau) &= x_i'(t + \tau) - \xi_i'(t + \tau) = u^* \ln[x_{i+1}(t) - x_i(t)] + \alpha_i - u^* \\ &= u^* \ln[(\phi_{i+1}(t) + \xi_{i+1}(t)) - (\phi_i(t) + \xi_i(t))] + \alpha_i - u^* \\ &= u^* \ln[1/\rho^* + \phi_{i+1}(t) - \phi_i(t)] + \alpha_i - u^*\end{aligned}$$

Es folgt ( $t = 0$ ),  $\mathcal{O}(\epsilon) = u^* \ln[1/\rho^* + \mathcal{O}(\epsilon)] + \alpha_i - u^*$   
 $= u^* \ln[(\mathcal{O}(\epsilon) + 1)/\rho^*] + \alpha_i - u^* = \mathcal{O}(\epsilon) + \alpha_i - u^* \ln(e\rho^*)$

# Stabilität für Verkehr Dynamik

- ▶ Daher  $\alpha_i - u^* \ln(e\rho^*) = \mathcal{O}(\epsilon)$ , und die Nullstellen erfüllen

$$\phi_i^* = \sum_{j=i}^{N-1} (1/\rho^* - e^{1-\alpha_j/u^*}) = \mathcal{O}(\epsilon), \quad i = 1, \dots, N$$

Gilt  $\phi_i(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \phi_i^*$ ? Für  $\tau > 0$ , kein Werkzeug.

- ▶ Nimm an,  $\tau = 0$ ,  $N = 2$ .

$$\begin{aligned} \phi_1'(t) &= f(\phi_1(t)), & f(\phi) &= u^* \ln[1/\rho^* - \phi] + \alpha_1 - u^* \\ f'(\phi) &= -u^*/(1/\rho^* - \phi), & f'(\phi_1^*) &= -u^* e^{\alpha_1/u^* - 1} < 0 \end{aligned}$$

Daher für  $\epsilon$  klein genug gilt  $\phi_1(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \phi_1^*$  und

$$x_1(t) - \xi_1(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \mathcal{O}(\epsilon)$$

d.h. die Lösung  $\xi_1(t) = u^*t$  ist stabil.

**Hausaufgabe:** ( $\tau = 0$ ,  $N = 3$ ) Zeige für das System,  $\phi_3(t) = 0$ ,

$$\phi_2'(t) = u^* \ln[1/\rho^* - \phi_2(t)] + \alpha_2 - u^*$$

$$\phi_1'(t) = u^* \ln[1/\rho^* + \phi_2(t) - \phi_1(t)] + \alpha_1 - u^*$$

mit  $|\phi_i([0, \tau])|, |\phi_i'(\tau)| = \mathcal{O}(\epsilon)$  und  $\epsilon$  klein genug, es gelten

$$\phi_i(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \phi_i^* = \sum_{j=i}^2 (1/\rho^* - e^{1-\alpha_j/u^*}) = \mathcal{O}(\epsilon), \quad i \leq 3$$

und daher ist die Lösung  $\xi_i(t) = u^*t + (i-1)/\rho^*$ ,  $i \leq 3$  stabil.

## Stabilität für Verkehr Dynamik

- Für  $\tau > 0$  wird die Diskretisierung analysiert:

$$\Delta t = 1/M, \quad t = n/M, \quad \tau = \sigma/M$$

$$\Xi_i(n) = \xi_i(n/M) = u^* n/M + (i-1)/\rho^*$$

$$X_i(n) \approx x_i(n/M), \quad \Phi_i(n) = X_i(n) - \Xi_i(n) \approx \phi_i(n/M)$$

- Die Diskretisierung der  $x$ -Gleichung ist  $X_N(n) = \Xi_N(n)$ ,

$$M^2 \Delta_n^2 X_i(n) = u^* M \Delta_n \ln[X_{i+1}(n-\sigma) - X_i(n-\sigma)]$$

wobei  $i = 1, \dots, N-1$

$$\Delta_n X(n) = X(n+1) - X(n).$$

Analog zur Integration  $\exists \{\alpha_i\}_{i=1}^{N-1}$  s.d.

$$M \Delta_n X_i(n) = u^* \ln[X_{i+1}(n-\sigma) - X_i(n-\sigma)] + \alpha_i$$

$i = 1, \dots, N-1$

- Die Differenzen  $\Phi_i(n) = X_i(n) - \Xi_i(n)$  erfüllen

$$|\Phi_i(\{n\}_{n=0}^\sigma)|, |M \Delta_n \Phi_i(\sigma)| = \mathcal{O}(\epsilon)$$

(oder  $|\Phi_i(\{n\}_{n=0}^{\sigma+1})| = \mathcal{O}(\epsilon)$ ) und  $\Phi_N = 0$ ,

$$M \Delta_n \Phi_i(n) = M \Delta_n X_i(n) - M \Delta_n \Xi_i(n)$$

$$= u^* \ln[X_{i+1}(n-\sigma) - X_i(n-\sigma)] + \alpha_i - u^*$$

$$= u^* \ln[1/\rho^* + \Phi_{i+1}(n-\sigma) - \Phi_i(n-\sigma)] + \alpha_i - u^*$$

$i = 1, \dots, N-1$

# Stabilität für Verkehr Dynamik

- ▶ Es folgt ( $n = \sigma$ ),

$$\begin{aligned} \mathcal{O}(\epsilon) &= u^* \ln[1/\rho^* + \mathcal{O}(\epsilon)] + \alpha_i - u^* \\ &= u^* \ln[(\mathcal{O}(\epsilon) + 1)/\rho^*] + \alpha_i - u^* = \mathcal{O}(\epsilon) + \alpha_i - u^* \ln(e\rho^*) \end{aligned}$$

Daher  $\alpha_i - u^* \ln(e\rho^*) = \mathcal{O}(\epsilon)$  und  $1/\rho^* - e^{1-\alpha_i/u^*} = \mathcal{O}(\epsilon)$ .

- ▶ Nimm  $N = 2, \sigma = 1$ ,

$$\Phi_1(n+1) = \Phi_1(n) + \frac{u^*}{M} \ln[1/\rho^* - \Phi_1(n-1)] + \frac{\alpha_1 - u^*}{M}$$

Die Differenzengleichung beinhaltet Zustände  $\{\Phi_1(n-1), \Phi_1(n), \Phi_1(n+1)\}$ . Fixpunkt-Iteration?

- ▶ Mit  $\Psi(n+1) =$

$$\begin{bmatrix} \Phi_1(n) \\ \Phi_1(n+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_1(n) \\ \Phi_1(n) + \frac{u^*}{M} \ln[1/\rho^* - \Phi_1(n-1)] + \frac{\alpha_1 - u^*}{M} \end{bmatrix}$$

gibt es die Fixpunkt-Iteration  $\Psi_{n+1} = F(\Psi_n)$ , wobei

$$\Psi = \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{bmatrix}, \quad F(\Psi) = \begin{bmatrix} \psi_2 \\ \psi_2 + \frac{u^*}{M} \ln[1/\rho^* - \psi_1] + \frac{\alpha_1 - u^*}{M} \end{bmatrix}$$

und in dem Fixpunkt  $\Psi^* = (1/\rho^* - e^{1-\alpha_1/u^*}) \langle 1, 1 \rangle^T (= \mathcal{O}(\epsilon))$

$$\frac{\partial F}{\partial \Psi} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{-u^*/M}{1/\rho^* - \psi_1} & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\Psi = \Psi^*} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\theta & 1 \end{bmatrix}, \quad \theta = \frac{u^*}{M} e^{\alpha_1/u^* - 1}$$

# Stabilität für Verkehr Dynamik

- Das Spektrum  $\sigma(J)$  mit  $J = \partial F / \partial \Psi(\Psi^*)$  ist:

$$\sigma(J) = \{\lambda_{1,2}\} = \left\{ \frac{1}{2} [1 \pm \sqrt{1 - 4\theta}] \right\}$$

Für  $0 < \theta \leq \frac{1}{4}$  gelten

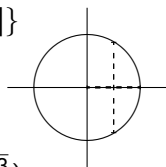
$$\lambda_1, \lambda_2 \in (0, 1)$$

Für  $\frac{1}{4} \leq \theta < 1$  gelten

$$(\lambda_1 - \frac{1}{2})/i, (\lambda_2 - \frac{1}{2})/i \in (-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$$

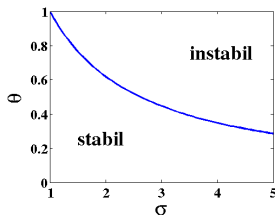
Für  $\theta \in (0, 1)$  und  $\epsilon$  klein genug gelten  $\Psi_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \Psi^* = \mathcal{O}(\epsilon)$   
und

$$X_2(n) - \Xi_2(n) = \Phi_2(n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathcal{O}(\epsilon)$$



**Hausaufgabe:** Leite eine Stabilitätsbedingung für den Fall  $N = 2$  und  $\sigma = 2$  explizit her.

- Mit  $\theta$  oben,  $N = 2$  und  $\sigma \in \mathbb{N}$  gilt  $\det[-\lambda I + J] = (-1)^\sigma [\lambda^\sigma (1 - \lambda) - \theta]$ .  
Lösung der Gleichung  $\lambda^\sigma (1 - \lambda) = \theta$   
mit  $\lambda = e^{it}$  ist  
 $(\sigma + \frac{1}{2})t = \pm \frac{\pi}{2}, \quad \theta = 2 \sin\left(\frac{\pi}{2(2\sigma+1)}\right)$



# Simulationen

- ▶ Idealisierter Zustand:

$$\rho_{\max} = 1$$

$$\rho_c = \frac{1}{10}$$

$$u_{\max} = 1$$

- ▶ Reaktionszeit

$$\tau = 0$$

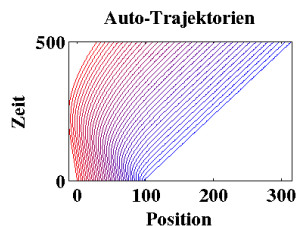
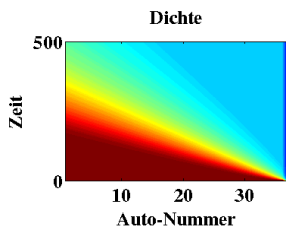
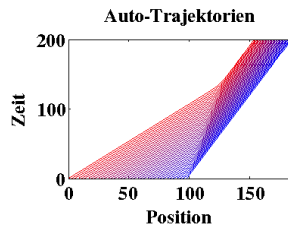
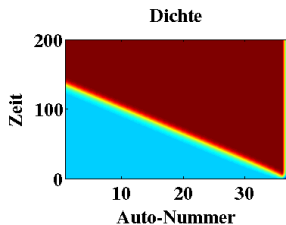
- ▶ Störungen:

Mit  $\alpha = \alpha^* + \frac{1}{2}$

entsteht ein Entschleunigungsschock.

Mit  $\alpha = \alpha^* - \frac{1}{2}$

entsteht eine Verdünnungswelle.



# Simulationen

- ▶ Idealisierter Zustand:

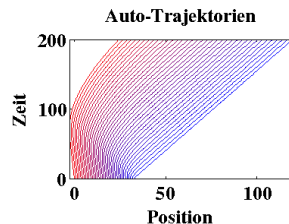
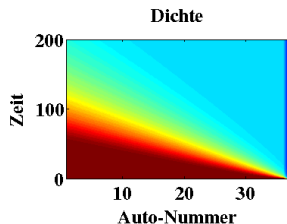
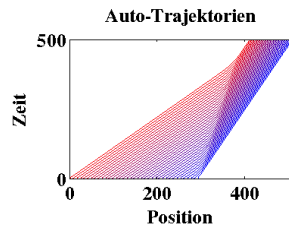
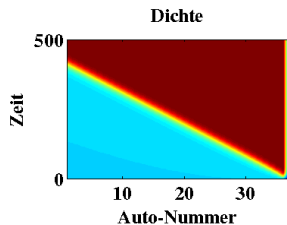
$$\rho_{\max} = 1$$

$$\rho_c = \frac{1}{10}$$

$$u_{\max} = 1$$

- ▶ Reaktionszeit  
 $\tau = 0$

- ▶ Störungen:  
Mit  $x_i(0) = 3\xi_i(0)$   
entsteht ein  
Entschleunigungsschock.  
Mit  $x_i(0) = \xi_i(0)/3$   
entsteht eine  
Verdünnungswelle.



# Simulationen

- ▶ Idealisierter Zustand:

$$\rho_{\max} = 1$$

$$\rho_c = \frac{1}{10}$$

$$u_{\max} = 1$$

- ▶ Zufällige Störungen

$$x_i(0) = \xi_i(0) + \frac{u}{5\rho^*}$$

$$\alpha = \alpha^* + \frac{u\lambda^*}{5}$$

$$(u \sim N(0, 1))$$

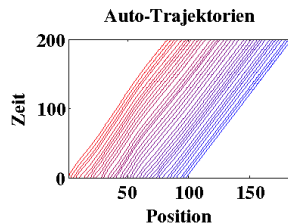
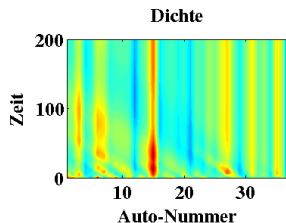
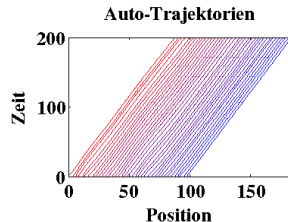
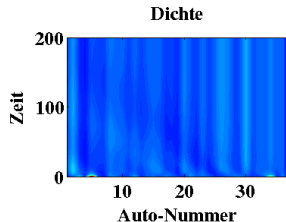
- ▶ Reaktionszeiten

$$\tau = 0$$

bzw.

$$\tau = 2$$

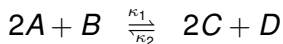
- ▶ Bei noch höherer Reaktionszeit finden Kollisionen statt.





# Weitere Bifurkationen und Grenzzyklen

- ▶ Beispiel: chemische Reaktion,



$$\kappa_i = \kappa_i(T), \quad i = 1, 2$$

$$\begin{aligned} x' &= \kappa_1(a - 2x)^2(b - x) - \kappa_2(c + 2x)^2(d + x) \\ &= \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 \end{aligned}$$

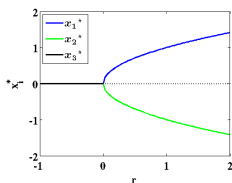
- ▶ Für  $\alpha_0 = 0$ ,  $\alpha_1 = r$ ,  $\alpha_2 = 0$ ,  $\alpha_3 = -1$ ,

$$x' = f(x), \quad f(x) = x(r - x^2), \quad f'(x) = r - 3x^2$$

Gleichgewichte:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1^* = \sqrt{r}, \quad f'(\sqrt{r}) = -2r < 0, \quad \text{asymptotisch stabil} \\ x_2^* = -\sqrt{r}, \quad f'(-\sqrt{r}) = -2r < 0, \quad \text{dito} \\ x_3^* = 0, \quad f'(0) = r \begin{cases} r < 0, & \text{dito} \\ r = 0, & \text{dito} \\ r > 0, & \text{instabil} \end{cases} \end{array} \right.$$

Bifurkationsdiagramm der Gleichgewichte:

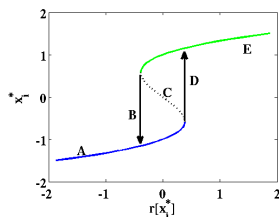


# Weitere Bifurkationen und Grenzzyklen

► Für  $\alpha_0 = r$ ,  $\alpha_1 = 1$ ,  $\alpha_2 = 0$ ,  $\alpha_3 = -1$ ,  $x' = f(x)$

$$f(x) = r + x(1 - x^2), \quad f'(x) = 1 - 3x^2 > 0, \quad -\frac{1}{\sqrt{3}} < x < \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\text{Gleichgewichte: } r = x_i^*(r)[x_i^*(r)^2 - 1], \quad -\frac{1}{\sqrt{3}} < x_2^*(r) < \frac{1}{\sqrt{3}}$$



$$\text{A: } r < -\frac{2}{3\sqrt{3}} \Rightarrow x_1^*$$

$$\text{B: } r = -\frac{2}{3\sqrt{3}} \Rightarrow x_1^* < x_2^* = x_3^*$$

$$\text{C: } -\frac{2}{3\sqrt{3}} < r < \frac{2}{3\sqrt{3}} \Rightarrow x_1^* < x_2^* < x_3^*$$

$$\text{D: } r = \frac{2}{3\sqrt{3}} \Rightarrow x_1^* = x_2^* < x_3^*$$

$$\text{E: } r > \frac{2}{3\sqrt{3}} \Rightarrow x_3^*$$

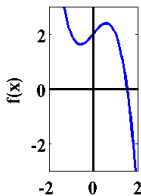
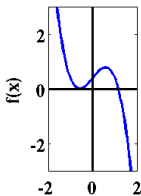
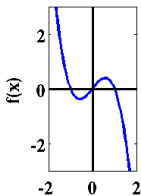
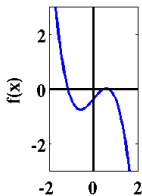
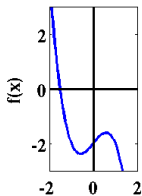
A

B

C

D

D



# Weitere Bifurkationen und Grenzzyklen

- ▶ Das erste Räuber-Beute Modell,

$$x' = (a_1 - b_1 y)x$$

$$y' = (b_2 x - a_2)y$$

- ▶ Das zweite Räuber-Beute Modell,

$$x' = a_1(1 - \epsilon x) - b_1 xy$$

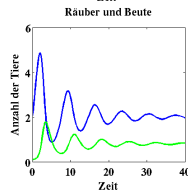
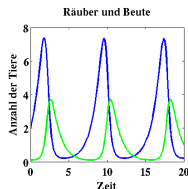
$$y' = (b_2 x - a_2)y$$

- ▶ Das dritte Räuber-Beute Modell,

$$x' = a_1 x \left(1 - \frac{x}{K}\right) - \frac{b_1 xy}{1 + c_1 x}$$

$$y' = a_2 y \left(1 - \frac{y}{b_2 x}\right)$$

Die anderen zwei Modelle sind nicht strukturell stabil, dieses schon. Beute-Kapazität  $K$ , Grenze  $b_1/c_1$  für den Räubereffekt, Räuber-Kapazität  $b_2 x$ .



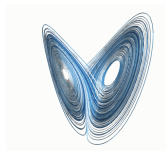
**Hausaufgabe:** Implementiere das dritte Modell und zeige einen stabilen Grenzzyklus für gewisse Parameter auf.

# Seltsame Attraktoren für chaotische Systeme

- ▶ Beispiel: Lorenz (Vereinfachte Konvektion / Strömung in der Atmosphäre)

$$\begin{aligned}\dot{X} &= \sigma(Y - X) & \sigma &= \text{Prandtl \#} \\ \dot{Y} &= -XZ + \rho X - Y & \rho &= \text{Rayleigh \#} \\ \dot{Z} &= XZ - \beta Z & \sigma = 10, \beta = 8/3, \rho = 28 &\Rightarrow \text{Chaos}\end{aligned}$$

Seltsamer Attraktor,  
Dimension  $\approx 2.06 \pm 0.01$



**Def:** Sei  $E$  eine Teilmenge von  $\mathbb{R}^n$  mit Durchmesser  $L = \sup\{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_{\ell_2} : \mathbf{x}, \mathbf{y} \in E\}$  und  $N(\ell)$  die Mindestanzahl von Mengen mit Durchmesser  $\ell$ , die nötig sind, um  $E$  zu überdecken. Dann ist die Dimension von  $E$  definiert durch

$$D(E) = \lim_{\ell \downarrow 0} \frac{\ln(N(\ell))}{\ln(L/\ell)}$$

**Hausaufgabe:** Zeige, die Cantormenge hat Dimension  $\ln(2)/\ln(3)$ .

# Vorteil von Doppelverglasung

- ▶ Wärmefluss:

früher:  $\rho, c, \lambda$

Gesetz vom Fourier:

$$\mathbf{F} = -\lambda \nabla T$$

Wärme fließt von höheren nach niedrigeren Temperaturen.

Energieerhaltung in einem Gebiet  $D \subset \Omega$ ,

$$D_t \int_D E/V d\mathbf{x} + \int_{\partial D} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}} d\mathbf{x} = 0$$

oder

$$\int_D \rho c \partial_t T d\mathbf{x} = \int_{\partial D} \lambda \nabla T \cdot \hat{\mathbf{n}} d\mathbf{x} = \int_D \nabla \cdot (\lambda \nabla T) d\mathbf{x}$$

Wenn diese Gleichung  $\forall D \subset \Omega$  gilt, folgt

$$\rho c \partial_t T = \nabla \cdot (\lambda \nabla T), \quad \Omega$$

Für  $\Omega \subset \mathbb{R}^1$ ,

$$\rho c T_t = [\lambda T_x]_x, \quad \Omega$$

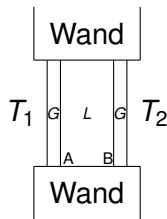
Fließgleichgewicht:  $F = -\lambda T_x = \text{Konstante}$ .

- ▶ Für die 3 Fensterschicht im Fließgleichgewicht:

$$F = -\lambda_G \frac{T_A - T_1}{G} = -\lambda_L \frac{T_B - T_A}{L} = -\lambda_G \frac{T_2 - T_B}{G}$$

Lösung:

$$T_1 - T_A = FG/\lambda_G = T_B - T_2 \quad \Rightarrow \quad T_{A,B} = T_{1,2} \mp FG/\lambda_G$$



# Vorteil von Doppelverglasung

- ▶ Lösung:

$$T_B - T_A = (T_2 + FG/\lambda_G) - (T_1 - FG/\lambda_G) = T_2 - T_1 + 2FG/\lambda_G$$

und

$$-F = \frac{\lambda_L}{L} \left[ (T_2 - T_1) + \frac{2FG}{\lambda_G} \right] = \frac{\lambda_L}{L} (T_2 - T_1) + \frac{2F}{\rho}, \quad \rho = \frac{\lambda_G L}{\lambda_L G}$$

oder mit  $F(-1 - 2/\rho) = (\lambda_L/L)(T_2 - T_1)$ ,

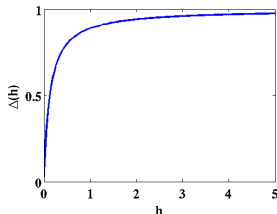
$$F = \frac{\lambda_L}{L} \frac{T_1 - T_2}{1 + 2/\rho} = \frac{\lambda_G}{G} \frac{T_1 - T_2}{\rho + 2}$$

- ▶ Mit  $L = 0$  folgen  $\rho = 0$  und  $F_0 = \frac{\lambda_G}{2G}(T_1 - T_2)$ .
- ▶ Relative Verminderung des Energieverlustes:

$$\Delta = \frac{F_0 - F}{F_0} = \frac{\rho}{\rho + 2}, \quad \Delta(h) \approx \frac{h}{h + 1/8}$$

wobei  $h = \frac{L}{G}$  und  $\frac{\lambda_G}{\lambda_L} \approx 16 \Rightarrow \rho \approx 16h$ .

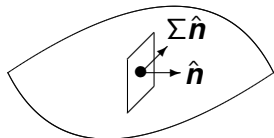
- ▶ Nach  $h > 4$  zahlt es sich nicht mehr aus.
- ▶ Innenluft muss still und dicht sein!



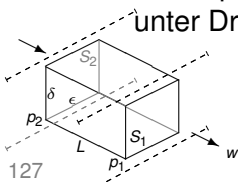
# Einführung in die Strömungsmechanik

## ▶ Euler-Cauchy Spannungsprinzip:

- ▶ Spannungen werden in einem Material verteilt.
- ▶ Für einen gegebenen Punkt  $\bullet$  sei  $\hat{n}$  der Normaleinheitsvektor für eine gegebene Ebene durch den Punkt.
- ▶ Das Material auf einer Seite der Ebene übt eine vektorielle Kraft pro Flächeneinheit auf das Material auf der anderen Seite aus.
- ▶ Es gibt eine ortsabhängige Matrix  $\Sigma$  (*Spannungstensor*), wobei  $\Sigma \hat{n}$  diese wirkende Kraft darstellt.
- ▶ Modell für eine Flüssigkeit:  $\Sigma = T - pI$ , wobei  $T$  Scherkraft darstellt und  $p$  der Druck ist.



- ▶ Modellproblem: Zwischen 2 Platten strömt eine Flüssigkeit unter Druck  $p_2$  links und Druck  $p_1$  rechts, wobei  $p_2 > p_1$ .



Kräftebilanz fürs Kontrollvolumen:

$$-\int_{S_2} \Sigma \hat{\mathbf{e}}_z + \int_{S_1} \Sigma \hat{\mathbf{e}}_z + \int_0^L \int_{\partial S} \Sigma \hat{\mathbf{n}} = 0 \quad (S \parallel S_i)$$

## Einführung in die Strömungsmechanik

- ▶ Sei  $(x, y) = (0, 0)$  im Zentrum des Kontrollvolumens.

- ▶ Mit  $\Sigma = T - pI$ ,

$$0 = \int_{S_2} p_2 \hat{\mathbf{e}}_z - \int_{S_1} p_1 \hat{\mathbf{e}}_z - \int_0^L \left[ \int_{-\frac{\epsilon}{2}}^{+\frac{\epsilon}{2}} p(\hat{\mathbf{e}}_y - \hat{\mathbf{e}}_y) + \int_{-\frac{\delta}{2}}^{+\frac{\delta}{2}} p(\hat{\mathbf{e}}_x - \hat{\mathbf{e}}_x) \right] + \int_0^L \left\{ \int_{-\frac{\epsilon}{2}}^{+\frac{\epsilon}{2}} \left[ T^{(+\frac{\delta}{2})}(\hat{\mathbf{e}}_y) + T^{(-\frac{\delta}{2})}(-\hat{\mathbf{e}}_y) \right] + \int_{-\frac{\delta}{2}}^{+\frac{\delta}{2}} \left[ T^{(+\frac{\epsilon}{2})}(\hat{\mathbf{e}}_x) + T^{(-\frac{\epsilon}{2})}(-\hat{\mathbf{e}}_x) \right] \right\}$$

- ▶ Es gilt  $T \hat{\mathbf{e}}_x = 0!$  (Entferne Material links oder rechts!) Dann,

$$\hat{\mathbf{e}}_z(p_2 - p_1)\epsilon\delta + \epsilon L(T^{(+\frac{\delta}{2})} - T^{(-\frac{\delta}{2})})\hat{\mathbf{e}}_y = 0 \quad \Rightarrow \quad L\partial_y T \hat{\mathbf{e}}_y = (p_1 - p_2)\hat{\mathbf{e}}_z$$

- ▶ Mit  $T(x, y)(\hat{\mathbf{e}}_y) = T(x, -y)(-\hat{\mathbf{e}}_y) = -T(x, -y)(\hat{\mathbf{e}}_y)$  folgt

$$T \hat{\mathbf{e}}_y = \hat{\mathbf{e}}_z(p_1 - p_2)y/L$$

- ▶ Messungen zeigen, die Geschwindigkeit  $w$  hat ein quadratisches Profil,  $w = c(1 - y^2)$ , Platten in  $y = \pm 1$ .
- ▶ Das Modell mit  $\nu =$  Viskosität,

$$T \hat{\mathbf{e}}_y = \nu w_y \hat{\mathbf{e}}_z \quad \Rightarrow \quad w = (1 - y^2)(p_2 - p_1)/(2L\nu)$$

- ▶ Im allgemeinen  $T = \nu(\nabla \mathbf{w} + \nabla \mathbf{w}^T)$ .

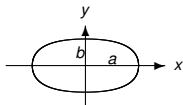


# Vorteil von kreisförmigen Rohren

- ▶ Schnittfläche eines Rohrs:

$$E = \{(x, y) : x^2/a^2 + y^2/b^2 < 1\}$$

$w(x, y)$  = Geschwindigkeit,  $w = 0, \partial E$  wegen Reibung



- ▶ Mit  $\Sigma = T - pl$ ,  $\mathbf{w} = \langle 0, 0, w \rangle$ ,  $T\hat{\mathbf{e}}_x = \nu w_x \hat{\mathbf{e}}_z$ ,  $T\hat{\mathbf{e}}_y = \nu w_y \hat{\mathbf{e}}_z$ .
- ▶ Kräftebilanz,

$$\hat{\mathbf{e}}_z \left\{ \int_{S_2} p_2 - \int_{S_1} p_1 + \int_{\Gamma} \nu \nabla w \cdot \hat{\mathbf{n}} \right\} = \mathbf{0}$$

$$\int_{\Gamma} \nu \nabla w \cdot \hat{\mathbf{n}} = L \int_{\partial S} \nu \nabla w \cdot \hat{\mathbf{n}} = L \int_S \nabla \cdot (\nu \nabla w)$$

- ▶ Gebiet beliebig,  $\Delta p = p_2 - p_1$  im ganzen Rohr,  
 $-\Delta p = L \nabla \cdot (\nu \nabla w)$  im  $E$ ,  $w = 0$  am  $\partial E$

Lösung:

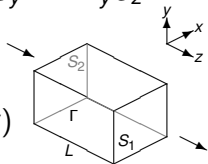
$$w(x, y) = \frac{\Delta p}{2\nu L} \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} \left[ 1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right]$$

- ▶ Volumenfluss:

$$Q = \int_E w d\mathbf{x} = \frac{\pi a^3 b^3 \Delta p}{4\mu L (a^2 + b^2)}, \quad a = b = r \Rightarrow Q = Q_0, \quad \frac{Q_0 - Q}{Q_0} = \frac{(a - b)^2}{a^2 + b^2}$$

- ▶ Weniger Volumenfluss wenn  $a \neq b$ .

↙ Poiseuille!



# Optimierung einer Fischfangflotte

- ▶ Wie viele Boote einer Fischfangflotte sollen im Betrieb sein?
- ▶ Größen:

$x(t)$  = Population der Fische zur Zeit  $t$

$u(t)$  = Anzahl der Boote im Betrieb zur Zeit  $t$

$w$  = Gehalt / Angestellten in einem Boot / Zeit

$c_B$  = Fixkosten / Boot

$n$  = Anzahl der Angestellten / Boot

$p$  = Einheitspreis für Fisch

$h(t)$  = Anzahl der gefangenen Fische / Zeit  
(hängt von  $u$  und  $x$  ab)

$ph(t)$  = Umsatz / Zeit

$c$  = Kosten / Boot

$cu(t)$  =  $c_B u(t) + wnu(t)$ , Gesamtkosten / Zeit

$P(t)$  =  $ph(t) - cu(t)$ , Profit / Zeit

$G(t)$  = Geld zur Zeit  $t$

$\delta(t)$  =  $G'/G$ , Zinsensrate (Konstante)

## Zielfunktion der Fischfangflotte

- ▶ Der Firmenchef hat  $G(t)$  zur Zeit  $t$ , weil  $G(0)$  in das eigene Geschäft investiert worden ist.
- ▶ Wenn  $G(0)$  auf eine Bank mit Zinsrate  $\delta$  investiert worden wäre, wäre das Geld zu  $G(0)e^{\delta t}$  gewachsen. Besser?
- ▶ Der *gegenwärtige Wert*  $G_0(t)$  vom zukünftigen Geld  $G(t)$  ist  $G_0(t) = G(t)e^{-\delta t}$ .
- ▶ Sei  $G(t)$  der Gesamtprofit,  $G(t) = \int_0^t P(s)ds$ .

**Hausaufgabe:** Zeige  $\delta \int_0^\infty G_0(t)dt = \int_0^\infty e^{-\delta t} P(t)dt$ .

- ▶ Zielfunktion der optimalen Steuerung: Die Summe

$$\int_0^\infty G_0(t)dt$$

aller gegenwärtigen Werte der zukünftigen Gesamtprofite soll maximiert werden.

- ▶ Mit  $P(t) = ph(t) - cu(t)$  soll maximiert werden,

$$J(u) = \int_0^\infty e^{-\delta t} [ph(t) - cu(t)] dt$$

## Nebenbedingungen für die Zielfunktion

- ▶ Raubmodell:

Anzahl der gefangenen Fische / Zeit  $\propto$   
Anzahl der Boote im Betrieb zur Zeit  $t \times$   
Population der Fische zur Zeit  $t$ , d.h.

$$h(t) = qu(t)x(t)$$

- ▶ Fisch-Dynamik: logistisch mit Raubeffekt,

$$x' = Rx(1 - x/K) - h(t)$$

- ▶ Die Zielfunktion soll unter diesen Nebenbedingungen maximiert werden.

- ▶ Angenommen:  $x(0) \ll K$ , d.h.  $x(0) = K/N$ ,  $N$  groß.

- ▶ Steuerungsstrategie:

$$u(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq s \\ U, & s < t < \infty \end{cases} \quad \text{wobei} \quad x(s) = \lim_{t \rightarrow \infty} x(t)$$

**Hausaufgabe:** Zeige mit diesem  $u$ ,

$$x(t) = \begin{cases} K/[1 + (N - 1)e^{-Rt}], & 0 \leq t \leq s \\ K(1 - qU/R), & s < t < \infty \end{cases}$$

## Vereinfachung der Zielfunktion

- ▶ Mit Stetigkeit,  $x(s^+) = x(s^+)$ , gilt

$$\frac{1}{1 + (N-1)e^{-Rs}} = 1 - \frac{qU}{R} = \frac{x(s)}{K} > 0$$

- ▶ Nach  $s$  auflösen,

$$s(U) = \frac{1}{R} \ln \left\{ (N-1) \left( \frac{R}{qU} - 1 \right) \right\}$$

- ▶ In  $J$  einstellen,

$$\begin{aligned} J(U) &= \int_0^{s(U)} e^{-\delta t} [pq0K/[1 + (N-1)e^{-Rt}] - c0] dt \\ &+ \int_{s(U)}^{\infty} e^{-\delta t} [pqUK(1 - qU/R) - cU] dt \\ &= \frac{e^{-\delta t}}{-\delta} pqUK \left[ 1 - \frac{qU}{R} - \frac{c}{pqK} \right] \Big|_{s(U)}^{\infty} \\ &= \frac{pqKU}{\delta} e^{-\delta s(U)} \left[ 1 - \frac{qU}{R} - \frac{c}{pqK} \right] =: f(U) \end{aligned}$$

- ▶  $f(U)$  soll bezüglich  $U$  maximiert werden.

# Lösung des Optimierungsproblems

- ▶ Angenommen ist das Geschäft profitabel,

$$P_\infty = ph_\infty - cu_\infty = pqU \left(1 - \frac{qU}{R}\right) K - cU = pqKU \left[1 - \frac{qU}{R} - \frac{c}{pqK}\right] > 0$$

**Hausaufgabe:** Zeige, über  $[0, \frac{R}{q}(1 - \frac{c}{pqK})]$  gilt  $f = f_{\max}$  in

$$U^* = \frac{R}{4q} \left[ 3 - \frac{c}{pqK} + \frac{\delta}{R} - \sqrt{\left(1 + \frac{c}{pqK} - \frac{\delta}{R}\right)^2 + \frac{8\delta}{R} \frac{c}{pqK}} \right]$$

und daher ist die optimale Schaltzeit  $s^* = s(U^*)$ .

- ▶ Allgemeinere Formulierung: max über  $0 \leq u(t) \leq U_{\max}$ ,

$$J(u) = \int_0^\infty e^{-\delta t} [pqu(t)x(t) - cu(t)] dt$$

unter der Nebenbedingung

$$x' = Rx(1 - x/K) - qux, \quad x(0) = x_0$$

Mit  $x_0 = K/N$ ,  $U^*$  oben und  $x(s^*) := U^*$  die Lösung ist

$$u(t) = \begin{cases} U_N, & 0 \leq t \leq s^* \\ U^*, & s^* < t < \infty \end{cases} \quad U_N = \begin{cases} 0, & N > (1 - qU^*/R)^{-1} \\ U_{\max}, & N < (1 - qU^*/R)^{-1} \end{cases}$$

# Einführung in die Spieltheorie

- ▶ Das Konzept, mit statischem *a priori* Blickwinkel
  - ▶ Es gibt mindestens 2 *Spieler*.
  - ▶ Spieler haben *Strategien*.
  - ▶ Strategien bestimmen das *Ergebnis*.
  - ▶ Jedes Ergebnis hat eine *Auszahlung* für jeden Spieler.

- ▶ Beispiel:

		Jörgs Strategien	
		<i>a</i>	<i>b</i>
Inges	$\alpha$	(2,-2)	(-3,3)
Strategien	$\beta$	(0,0)	(3,-3)

Auszahlungen:  $(A,B)$ ,  $A$  = Inges Gewinn,  $B$  = Jörgs Gewinn

- ▶ Ein Null-Summen-Spiel erfüllt:

$$\text{Inge-Gewinn} + \text{Jörg-Gewinn} = 0.$$

- ▶ Bewegungsdiagramm zeigt Anreize zur Strategieänderungen:

		Jörgs Strategien	
		<i>a</i>	<i>b</i>
Inges	$\alpha$	→	↓
Strategien	$\beta$	↑	←

# Konzept eines Spiels

- ▶ Dieses ist ein nicht-Null-Summen-Spiel:

		Jörgs Strategien				Jörgs Strategien	
		<i>a</i>	<i>b</i>			<i>a</i>	<i>b</i>
Inges Strategien	$\alpha$	(0,0)	(-2,1)	Inges Strategien	$\alpha$		
	$\beta$	(1,-2)	(-1,-1)		$\beta$		

- ▶ Dieses Spiel heißt *Gefangenendilemma*. Jeder Spieler hat einen Anreiz zum *Gleichgewicht* mit Strategien  $\beta b$ .

**Def:** Ein Ergebnis ist ein *Gleichgewicht*, wenn kein Spieler einen Anreiz hat, eine andere Strategie auszuwählen, während die Strategie des Gegners an der Stelle fixiert bleibt.

**Def:** Der *Wert eines Spiels* für ein Spieler ist seine Auszahlung im Gleichgewicht.

<i>(a priori</i> Blinkwinkel)	▶ Gemischte Strategien:		$\alpha p + \beta(1 - p)$	$aq + b(1 - q)$
			Inges Strategien	Jörgs Strategien
	$\alpha$	$\beta$	<i>a</i>	<i>b</i>
Wahrscheinlichkeiten:	$p$	$1 - p$	$q$	$1 - q$



## Gemischte Strategien

- ▶ Auszahlungen sind Erwartungswerte:

			Jörgs Strategien		Inges Auszahlung:
			$q$	$1 - q$	
			$a$	$b$	
Inges Strategien	$p$	$\alpha$	(2,-2)	(-3,3)	$5q - 3$
	$1 - p$	$\beta$	(0,0)	(3,-3)	$3 - 3q$
Jörgs Auszahlung:			$-2p$	$6p - 3$	

- ▶ Mit  $q^* = 3/4$  vermeidet Jörg, dass Inge seine gemischte Strategie ausnutzt:  $5q^* - 3 = 3 - 3q^* =$  Inges Wert.
- ▶ Mit  $p^* = 3/8$  vermeidet Inge, dass Jörg seine gemischte Strategie ausnutzt:  $-2p^* = 6p^* - 3 =$  Jörgs Wert.
- ▶ Wie entscheidet man, was die Auszahlung oder Gewinn oder *Utilität* eines Ergebnisses ist?
  - ▶ Die meisten Resultaten sind so hergeleitet worden, dass sie von positiven linearen Transformationen der Utilität unabhängig sind.
  - ▶ Beispiel: Das Bewegungsdiagramm für Gefangenendilemma bleibt so, wenn die (Inge,Jörg) Auszahlungen  $(I, J)$  durch  $\tilde{I} = x + yI, y > 0$ , und  $\tilde{J} = u + vJ, v > 0$ , transformiert werden.

# Umweltpolitik

- ▶ Länder X und Y entscheiden, ob sie Verschmutzung reduzieren oder nicht.
  - ▶ Kosten für Reduzieren: 7 Einheiten
  - ▶ Gewinn von Reduzieren: 5 Einheiten für beide genießbar

- ▶ Darstellung des Spiels:

X:	Y:	verschmutzen	reduzieren
verschmutzen		↑ (0,0) ←	(5,-2) ↑
reduzieren		(-2,5) ←	(3,3) ↑

- ▶ Struktur wie Gefangenendilemma: Gleichgewicht in (0,0).
- ▶ Nun mit Kosten wenn beide nichts tun: 4 Einheiten

X:	Y:	verschmutzen	reduzieren
verschmutzen		↓ (-4,-4) →	(5,-2) ↑
reduzieren		(-2,5) ←	(3,3) ↑

- ▶ Struktur wie Angsthasenspiel: X schwenkt ab (-2,5) oder fährt geradeaus (5,-2).
- ▶ Wer bedroht oder den ersten Zug hat, kann das Gleichgewicht bestimmen.

# Umweltpolitik

- ▶ Länder X und Y entscheiden, ob sie zu einem Allgemeinwohl beitragen.
  - ▶ Kosten eines Beitrags: 8 Einheiten
  - ▶ Gewinn: 12 Einheiten für beide, nur wenn beide beitragen.
- ▶ Darstellung des Spiels:

X:	Y:	beitragen	nicht
beitragen		(4,4) ←	(-8,0) ↓
nicht		(0,-8) ↑	(0,0) →

- ▶ Struktur wie Koordinationsspiel (*stag hunt*): beide kooperieren (4,4) oder beide überlaufen (0,0).
- ▶ Kooperative Lösung entsteht durch Wiederholung des Spiels.
- ▶ Kontinuum von Strategien, z.B. wie *viel* will man beitragen?
  - ▶  $N$  Länder spielen. Land  $i$  trägt  $z_i$  bei. Gesamtbeitrag ist
$$Z = \sum_{i=1}^N z_i.$$
  - ▶ Land  $i$  hat Gewinn  $B_i(Z)$  und Kosten  $C_i(z_i)$ .
  - ▶ Zu maximieren ist:  $B_i(Z) - C_i(z_i)$ .

## Spiel gegen Natur: Entscheidungstheorie

- ▶ Inge entscheidet, zur Zentralbibliothek oder zur Zweigbibliothek für ein gesuchtes Buch? Seien:

- $k$  = Kosten zur Zweigbibliothek zu gehen
- $\theta k$  = Kosten zur Zentralbibliothek zu gehen ( $\theta > 1$ )
- $q$  = Wahrscheinlichkeit, Buch in der Zweigbibliothek
- $\alpha$  = Strategie: zuerst zur Zweigbibliothek
- $\beta$  = Strategie: sofort zur Zentralbibliothek
- $a$  = Zustand der Natur: Buch in der Zweigbibliothek
- $b$  = Zustand der Natur: Buch nur in der Zentralbibliothek

- ▶ Spiel gegen Natur sieht so aus:

		Strategien der Natur		Inges Kosten:
		$a$	$b$	
Inges Strategien	$\alpha$	$k$	$(1 + \theta)k$	$E(\alpha) = qk + (1 - q)(1 + \theta)k$
	$\beta$	$\theta k$	$\theta k$	$E(\beta) = q\theta k + (1 - q)\theta k$
Wahrscheinlichkeiten:		$q$	$1 - q$	

- ▶ Zuerst zur Zweigbibliothek, wenn  $1/\theta < q$ , d.h.

$$E(\alpha) = qk + (1 - q)(1 + \theta)k < q\theta k + (1 - q)\theta k = E(\beta)$$

# Nash Gleichgewicht

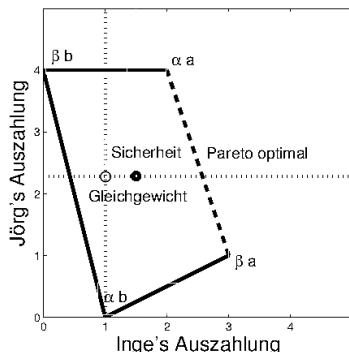
- ▶ Ein nicht Null-Summen-Spiel,

			Jörgs Strategien		Inges Auszahlung:
			$q$	$1 - q$	
			$a$	$b$	
Inges Strategien	$p$	$\alpha$	(2,4) ←	(1,0)	$1 + q$
	$1 - p$	$\beta$	(3,1) ↓	(0,4) ↑	$3q$
Jörgs Auszahlung:			$1 + 3p$	$4 - 4p$	

- ▶ Kein reines Gleichgewicht, Spieler suchen gemischte Strategien.
- ▶ Mit  $q^* = 1/2$  vermeidet Jörg, dass Inge seine gemischte Strategie ausnutzt:  $1 + q^* = 3q^* = 3/2 =$  Inges Wert.
- ▶ Mit  $p^* = 3/7$  vermeidet Inge, dass Jörg seine gemischte Strategie ausnutzt:  $1 + 3p^* = 4 - 4p^* = 16/7 =$  Jörgs Wert.
- ▶ Wenn ein Spieler so bleibt, gewinnt der andere durch eine unterschiedliche Strategie nicht.
- ▶ **Satz (Nash):** Jedes 2-Personen Spiel hat ein Gleichgewicht!

# Pareto Optimalität

- ▶ Ein Ergebnis ist nicht *Pareto optimal*, wenn es ein anderes Ergebnis gibt, bei dem mindestens ein Spieler eine höhere Auszahlung bekommt und kein Spieler eine niedrigere Auszahlung bekommt. Ansonsten ist ein Ergebnis *Pareto optimal*.
- ▶ Auszahlungen des letzten Spiels:



- ▶ Soll Inge  $\beta$  spielen? Soll Jörg  $a$  spielen?

# Sicherheitsstrategien

- Nun betrachten die Spieler nur den eigenen Gewinn:

			Jörgs Strategien		Jörgs Auszahlung:
			$q$	$1 - q$	
			$a$	$b$	
Inges Strategien	$p$	$\alpha$	(2,4) ←	(1,0)	$4q$
	$1 - p$	$\beta$	(3,1) →	(0,4)	$4 - 3q$
Inges Auszahlung:			$3 - p$	$p$	

- Die Spieler wollen den minimalen Gewinn maximieren. Eine solche Strategie ist die *Sicherheitsstrategie*.
- Mit  $\tilde{p} = 3/2$  gleicht Inge ihre Gewinne aus:  $3 - \tilde{p} = \tilde{p} = 3/2$ , aber  $p \in [0, 1]$ ! Sie wählt  $\hat{p} = 1$ , um ihren minimalen Gewinn zu maximieren,  $\max_{0 \leq p \leq 1} \min\{3 - p, p\} = 1$ .
- Mit  $\hat{q} = 4/7$  gleicht Jörg seine Gewinne aus:  $4\hat{q} = 4 - 3\hat{q} = 16/7$ .
- Die Sicherheitsstrategien liegen in der Kreuzung der gestrichelten Linien in der obigen Grafik.

## Gefangenendilemma

- ▶ Inge und Jörg begehen ein Verbrechen und werden gefangen.
- ▶ Bei der Polizei haben sie folgende Auszahlungen, wobei  $T > R > U > S$ ,  $R > (S + T)/2$ .

		Jörgs Strategien	
		kooperieren	überlaufen
Inges Strategien	kooperieren	$(R, R)$	$(S, T)$
	überlaufen	$(T, S)$	$(U, U)$

- ▶ Wenn kein Spieler gesteht, sind die beiden frei und bekommen die Belohnung  $R$ . z.B. Freiheit
- ▶ Der Spieler der gesteht, während der andere nicht, bekommt eine Belohnung  $T$ . z.B. Immunität  
Der andere eine schwere Strafe  $S$ . z.B. kürzer vs. länger
- ▶ Wenn beide gestehen, bekommen sie eine leichte Strafe  $U$ .
- ▶ Viele Spiele haben diese Struktur, z.B.
  - ▶ 2 Geschäfte im Preiskrieg
  - ▶ 2 Länder im Bewaffnungskrieg



## Gefangenendilemma

- ▶ Ein anderes Ergebnis durch wiederholtes Spielen?
- ▶ Sei  $p$  die Wahrscheinlichkeit, dass das Spiel wiederholt wird. Mit Wahrscheinlichkeit  $p^n$  wird es  $n$ -Mal wiederholt.
- ▶ Der Gewinn durch ununterbrochenes Kooperieren ist:

$$R + pR + p^2R + \dots = R \sum_{n=0}^{\infty} p^n = \frac{R}{1-p}$$

- ▶ Der Gewinn durch Überlaufen beim  $(m+1)$ ten Zug ist:

$$R \sum_{n=0}^{m-1} p^n + Tp^m + U \sum_{n=m+1}^{\infty} p^n = R \frac{1-p^m}{1-p} + Tp^m + U \frac{p^{m+1}}{1-p}$$

- ▶ Wenn gilt  $p > (T-R)/(T-U)$ , d.h.  $m$  unabhängig!

$$R \frac{1-p^m}{1-p} + Tp^m + U \frac{p^{m+1}}{1-p} < \frac{R}{1-p}$$

dann zahlt es sich aus, ununterbrochen zu kooperieren!

## Evolutionär Stabile Strategien

- ▶ Interaktion zwischen Individuen wird so modelliert:

		Spezies Strategien	
		Falke	Taube
Spezies Strategien	Falke	(-25,-25)	(50,0)
	Taube	(0,50)	(15,15)

- ▶ Auf dem Spiel stehen angenommen 50 Fitneßpunkte.
- ▶ Wenn 2 Falken sich begegnen, kämpfen sie. Der Gewinner kriegt 50 Fitneßpunkte und der Verlierer kriegt  $-100$ . Durchschnittlich kriegt ein Falke  $(50 - 100)/2 = -25$ .
- ▶ Wenn ein Falke und eine Taube sich begegnen, siegt der Falke immer.
- ▶ Wenn 2 Tauben sich begegnen, posieren sie. Eine nimmt die Punkte nach Verzögerung. Wegen der Verzögerung verlieren beide 10 Punkte. Also kriegt der Gewinner 40 Fitneßpunkte und der Verlierer kriegt  $-10$ . Durchschnittlich kriegt eine Taube  $(40 - 10)/2 = 15$ .

# Evolutionär Stabile Strategien

- ▶ Population von Tauben vorteilhaft?
  - ▶ Ein paar Falken (durch Mutation) dringen ein (mit einem Gewinn von 50 statt 15), und sie vermehren sich.
- ▶ Population von Falken vorteilhaft?
  - ▶ Ein paar Tauben dringen (durch Mutation) ein (mit einem Gewinn von 0 statt -25), und sie vermehren sich.
- ▶ Kann eine gemischte Population vorteilhaft sein?
  - ▶ Sei  $q$  der Bruchteil von Falken.
  - ▶ Folgendes Spiel zwischen einem Individuum der Spezies und einem möglichen Eindringling findet statt.

		Spezies Strategien		Eindringlinge Auszahlung:
		$q$ Falke	$1 - q$ Tauben	
Eindringlinge Strategien	Falke	$(-25, -25)$	$(50, 0)$	$-25q + 50(1 - q)$
	Tauben	$(0, 50)$	$(15, 15)$	$0q + 15(1 - q)$

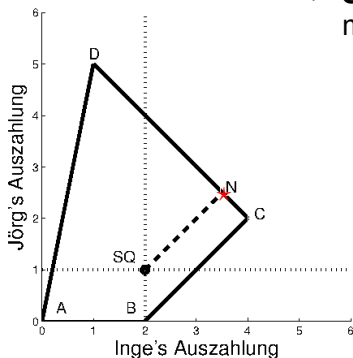
- ▶ Mit  $q^* = 7/12$  kann ein Eindringling die gemischte Strategie nicht ausnutzen,  $-25q^* + 50(1 - q^*) = 15(1 - q^*)$ .
- ▶ Die Strategie mit  $q^*$  ist *evolutionär stabil*.

# Nash Verhandlungsschema

- ▶ Inge und Jörg möchten verhandeln.
- ▶ Sie überlegen folgende Ergebnisse,

$$A = (0, 0), \quad B = (2, 0), \quad C = (4, 2), \quad D = (1, 5),$$

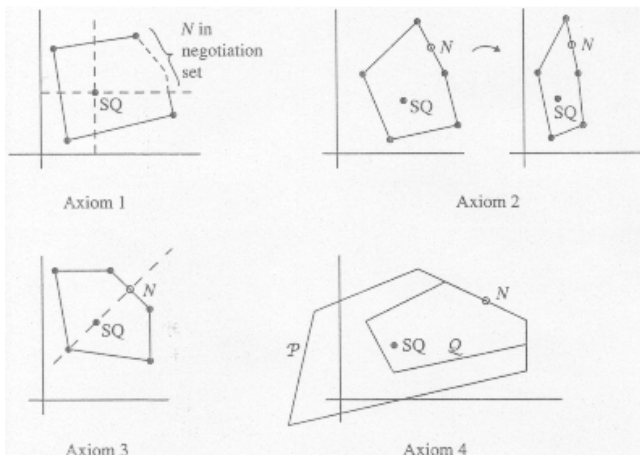
- ▶ Es wird vereinbart,  $SQ = (2, 1)$  (Status Quo) wird ausgeführt, falls es keine Einigung gibt.
- ▶ Die Ergebnisse bilden ein Polygon  $\mathcal{P}$ :



- ▶ **Satz (Nash):**  $\exists! N$  eine Verhandlungsstelle mit folgenden Eigenschaften:

- ▶  $N$  soll Pareto optimal und sicher sein.
- ▶  $N$  soll dasselbe sein, wenn die Utilitäten positiv linear transformiert werden.
- ▶ Wenn das Polygon  $\mathcal{P}$  symmetrisch bezüglich der Gerade  $IA=JA$  ist, soll das Ergebnis auf dieser Gerade liegen.
- ▶ Sei  $Q$  ein Polygon, das  $SQ$  und  $N$  enthält, während  $Q$  in  $\mathcal{P}$  liegt. Dann soll  $N$  die Verhandlungsstelle in  $Q$  sein.
- ▶ Grafische Darstellung der Axien:

# Nash Verhandlungsschema



- $N$  wird so berechnet: Wenn  $SQ = (x_0, y_0)$  so gegeben ist, folgt  $N = (x^*, y^*)$  wobei  $(x^* - x_0)(y^* - y_0) = \max$  in  $\{(x, y) \text{ in } P : x \geq x_0, y \geq y_0\}$ .

# Nash Verhandlungsschema

- ▶ Beispiel: Seien

$$A = (0, 0), \quad B = (2, 0), \quad C = (4, 2), \quad D = (1, 5), \quad SQ = (2, 1).$$

- ▶ Der Geradenabschnitt  $DC$  ist explizit so gegeben:

$$y = 6 - x, \quad 2 \leq x \leq 4$$

- ▶ Auf  $DC$  wird  $(x - 2)(y - 1)$  maximiert, wenn maximiert wird

$$(x - 2)(y - 1) = (x - 2)((6 - x) - 1) = -x^2 + 7x - 10 = f(x)$$

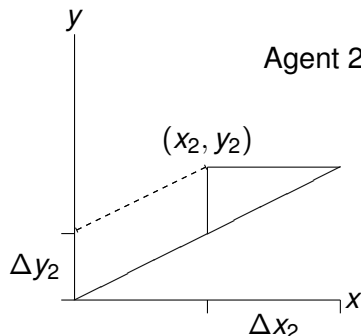
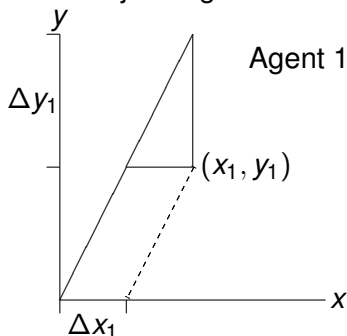
- ▶ Mit  $f'(x) = -2x + 7$  und  $f''(x) = -2$  folgt, dass  $f$  ein Maximum in  $x^* = 7/2$  hat.
- ▶ Da  $2 \leq x^* \leq 4$  gilt, liegt  $(x^*, y^*)$  in  $DC$ , wobei  $y^* = 6 - x^* = 5/2$ .
- ▶ Daher wird  $(x - 2)(y - 1)$  in der Verhandlungsstelle  $N = (7/2, 5/2)$  maximiert.

## Nash Verhandlungsschema

- ▶ Angenommen gibt es eine Population von *Agenten*, und jeder verbraucht Ressourcen  $x$  und  $y$ .
- ▶ Sobald der eigene Vorrat einer Ressource aus ist, stirbt der Agent.
- ▶ Die Agenten suchen und tauschen Ressourcen.
- ▶ Zwei Agenten treffen sich und bestimmen einen Tausch nach dem Nash Verhandlungsschema.
- ▶ Seien  $a_i$  und  $b_i$  die Verbrauchsrate für die Ressourcen  $x$  und  $y$  für den  $i$ ten Agenten,  $i = 1, 2$ .
- ▶ Wenn  $x_i$  und  $y_i$  zur Zeit  $t = 0$  vorhanden sind, gelten
$$x = x_i - a_i t, \quad y = y_i - b_i t$$
für den  $i$ ten Agenten, wenn kein Tausch stattfindet.
- ▶ Der  $i$ te Agent stirbt in der frühesten Zeit  $t$ , die erfüllt
$$0 = x_i - a_i t, \quad \text{oder} \quad 0 = y_i - b_i t$$
- ▶ Die natürliche Utilität ist Lebenszeit,
$$u_i = \min\{x_i/a_i, y_i/b_i\}$$

# Nash Verhandlungsschema

- Die gestrichelten Geraden mit Steigungen  $dy/dx = y'/x' = s_i = b_i/a_i$  sind die jeweiligen Bahnen ohne Tauschen:



- Ohne Tauschen sterben die Agenten mit Überschüssen,  $\Delta x_1 = x_1 - y_1/s_1$  bzw.  $\Delta y_2 = y_2 - s_2 x_2$ .
- Wenn sie zusätzliche Vorräte  $\Delta y_1 = s_1 x_1 - y_1$  bzw.  $\Delta x_2 = y_2/s_2 - x_2$  hätten, wären die Lebenszeiten verlängert, und beide Ressourcen wären gleichzeitig erschöpft.



# Nash Verhandlungsschema

- ▶ In der obigen Konfiguration haben Agenten 1 und 2 Ressourcen  $x$  bzw.  $y$  dem anderen anzubieten.
- ▶ Was ist ein fairer Tausch?  $SQ$  = nichts tauschen.
- ▶ Die Utilitäten können so grafisch dargestellt werden:

- ▶ Rechtes Dreieck:

Agent 1 hat  $\Delta x_1$ ,  
will  $\Delta y_1$ .

- ▶ Linkes Dreieck:

Agent 2 hat  $\Delta y_2$ ,  
will  $\Delta x_2$ .

- ▶ Spiel findet im

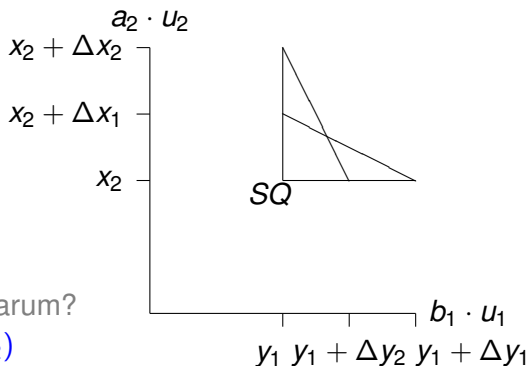
**Durchschnitt S**

der Dreiecke statt. Warum?

- ▶  $(b_1 u_1 - y_1)(a_2 u_2 - x_2)$

soll in  $S$  maximiert werden.

- ▶ Je nach Parametern befindet sich die Lösung im Mittelpunkt einer Hypotenuse oder in der Kreuzung zwischen diesen.



# Stochastische Prozesse

- ▶ Die autonomen deterministischen Modelle haben die Eigenschaft gehabt,

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x}(t+s) = \ell(t; \mathbf{x}(s))$$

dass die Lösungsformel  $\ell$  unabhängig von  $s$  gilt.

- ▶ In Wahrscheinlichkeitstheorie gibt es analog die *Markov*-Eigenschaft, wobei die bedingte Wahrscheinlichkeit

$$P(X(t+s) = j \mid X(s) = i)$$

von  $s$  nicht abhängt. Hier ist  $X(t)$  eine Zufallsvariable und  $\{X(t)\}_{t \geq 0}$  ist ein *stochastischer Prozess*.

- ▶ Insbesondere gilt

$$P(X(t+s) = j \mid X(s) = i) = P(X(t) = j \mid X(0) = i)$$

- ▶ Analog zum Modell  $x' = \text{Geburtsrate} - \text{Todesrate}$  oder

$$x(t+dt) - x(t) = \underbrace{b(x)dt + o(dt)}_{\text{Geburte in } [t, t+dt]} - \underbrace{d(x)dt + o(dt)}_{\text{Todesfälle in } [t, t+dt]}$$

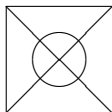
gibt es probabilistisch,

$$\begin{aligned} P(X(t+dt) = i+1 \mid X(t) = i) &= b_i dt + o(dt) && \text{(beschränkte} \\ P(X(t+dt) = i-1 \mid X(t) = i) &= d_i dt + o(dt) && \text{Übergänge)} \\ P(X(t+dt) = i \mid X(t) = i) &= 1 - \oplus - \ominus = 1 - b_i dt - d_i dt + o(dt) \end{aligned}$$

# Markovsche Eigenschaft und Bayessche Regel

- Sei  $p_i(t) = P(X(t) = i)$ . Wenn die möglichen Zustände  $X(t) \in \{0, 1, \dots, N\}$  sind, dann gilt

$$\begin{aligned}
 & p_i(t + dt) \\
 &= P(X(t + dt) = i) \\
 &= \sum_{j=0}^N P(X(t + dt) = i \mid X(t) = j) \cdot P(X(t) = j) && \text{(Bayes)} \\
 &= \sum_{j=0}^N P(X(dt) = i \mid X(0) = j) \cdot p_j(t) && \text{(Markov)} \\
 &= \sum_{|i-j| \leq 1} P(X(dt) = i \mid X(0) = j) \cdot p_j(t) + o(dt) && \text{(Übergänge)} \\
 &= \underbrace{b_{i-1} dt}_{i \geq 1} p_{i-1}(t) + (1 - \underbrace{b_i dt}_{i \leq N-1} - \underbrace{d_i dt}_{i \geq 1}) p_i(t) + \underbrace{d_{i+1} dt}_{i \leq N-1} p_{i+1}(t) + o(dt)
 \end{aligned}$$



(Bayes)

(Markov)

(Übergänge)

- Es folgt für  $1 \leq i \leq N$ ,

$$p'_i(t) \stackrel{0 \leftarrow dt}{\leftarrow} \frac{p_i(t + dt) - p_i(t)}{dt} = \underbrace{b_{i-1}}_{i \geq 1} p_{i-1}(t) - (\underbrace{b_i}_{i \leq N-1} + \underbrace{d_i}_{i \geq 1}) p_i(t) + \underbrace{d_{i+1}}_{i \leq N-1} p_{i+1}(t)$$

oder

$$\mathbf{p}' = \mathbf{A} \mathbf{p}, \quad \mathbf{A} = \text{tridiag} \left\{ \underbrace{b_{i-1}}_{i \geq 1}, -(\underbrace{b_i}_{i \leq N-1} + \underbrace{d_i}_{i \geq 1}), \underbrace{d_{i+1}}_{i \leq N-1} \right\} \in \mathbb{R}^{(N+1) \times (N+1)}$$

# Populationsdynamik

- ▶ Beispiel: Population ist 1 Individuum,  $N = 1$ .

$$\begin{aligned}0 &= P(X(dt) = 1 \mid X(0) = 0) = b_0 dt + o(dt) \Rightarrow b_0 = 0 \\ P(X(dt) = 0 \mid X(0) = 1) &= d_1 dt + o(dt)\end{aligned}$$

Das System der GDG  $\mathbf{p}' = \mathbf{A}\mathbf{p}$  ist

$$\begin{aligned}p_0' &= -b_0|_{=0}p_0 + d_1p_1 && \text{mit Lösung,} \\ p_1' &= -b_0|_{=0}p_0 - d_1p_1 && \Rightarrow p_1(t) = e^{-d_1 t}p_1(0) \\ p_0(t) + p_1(t) &= 1 && \Rightarrow p_0(t) = 1 - e^{-d_1 t}p_1(0)\end{aligned}$$

- ▶ Beispiel: Population besteht aus  $N$  Männern.

$$\begin{aligned}0 &= P(X(dt) = i + 1 \mid X(0) = i) = b_i dt + o(dt) \Rightarrow b_i = 0 \\ P(X(dt) = i - 1 \mid X(0) = i) &= d_i dt + o(dt) \quad d_i = D\end{aligned}$$

Für das System der GDG  $\mathbf{p}' = \mathbf{A}\mathbf{p}$  gilt

$$\mathbf{A} = \text{tridiag}\{0, -d_i\delta_{i>0}, d_{i+1}\} = \text{tridiag}\{0, -D\delta_{i>0}, D\}$$

# Todesprozess

Lösung des Systems,

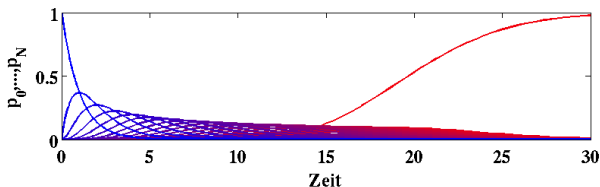
$$\begin{aligned}p'_N &= -Dp_N \Rightarrow p_N(t) = e^{-Dt} p_N(0) \\p'_{N-1} &= -Dp_{N-1} + Dp_N = -Dp_{N-1} + De^{-Dt} p_N(0) \\&\Rightarrow (e^{Dt} p_{N-1})' = Dp_N(0) \quad | \quad \int_0^t dt \\&\Rightarrow e^{Dt} p_{N-1}(t) - p_{N-1}(0) = p_N(0)Dt \\&\Rightarrow p_{N-1}(t) = e^{-Dt} [p_{N-1}(0) + p_N(0)Dt] \\p'_{N-2} &= -Dp_{N-2} + Dp_{N-1} = -Dp_{N-2} + De^{-Dt} [p_{N-1}(0) + p_N(0)Dt] \\&\Rightarrow (e^{Dt} p_{N-2})' = D[p_{N-1}(0) + p_N(0)Dt] \quad \dots \\&\Rightarrow p_{N-2}(t) = e^{-Dt} [p_{N-2}(0) + p_{N-1}(0)Dt + p_N(0)\frac{1}{2}(Dt)^2]\end{aligned}$$

usw.

$$p_i(t) = e^{-Dt} \sum_{j=i}^N p_j(0) \frac{(Dt)^{j-i}}{(j-i)!}, \quad 1 \leq i \leq N, \quad p_0(t) = 1 - \sum_{i=1}^N p_i(t)$$

Todesprozess,  $N=20$ ,  $p_N$  blau,  $p_0$  rot

Mit Anfangsbedingungen  
 $p_i(0) = \delta_{i,N}$ :



# Todesprozess

- Bestätigung dass die Formel  $p_0(t) = 1 - \sum_{i=1}^N p_i(t)$  passt:

$$\begin{aligned} p_0' &= -\sum_{i=1}^N p_i' &= D \sum_{i=1}^N p_i - D \sum_{i=1}^{N-1} p_{i+1} \\ &= D \sum_{i=1}^N p_i - D \sum_{i=2}^N p_i &= D p_1 \checkmark \end{aligned}$$

- Der Erwartungswert  $E[X(t)]$  erfüllt

$$\begin{aligned} E[X(t)] &= \sum_{n=0}^N n p_n(t) \quad \Rightarrow \\ E[X(t)]' &= \sum_{n=0}^N n p_n'(t) \\ &= -D \sum_{n=1}^N n p_n(t) + D \sum_{n=0}^{N-1} n p_{n+1}(t) \\ &= -D \sum_{n=1}^N n p_n(t) + D \sum_{n=1}^N (n-1) p_n(t) \\ &= -D \sum_{n=1}^N p_n(t) = -D[1 - p_0(t)] \end{aligned}$$

Während  $p_0(t)$  klein ist, gilt

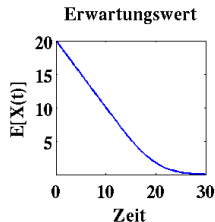
$$E[X(t)]' \approx -D$$

oder

$$E[X(t)] \approx E[X(0)] - Dt$$

Schliesslich gilt

$$E[X(t)] \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0.$$



# Geburtsprozess

- ▶ Beispiel: Ein Entdeckungsprozess.

- ▶  $X(t)$  = Anzahl der Entdeckungen bis zur Zeit  $t$ .
- ▶  $X(t) \in \{0, \dots, N\}$
- ▶ Es gelten

$$\begin{aligned}P(X(dt) = i + 1 \mid X(0) = i) &= b_i dt + o(dt) \quad b_i = B \\0 = P(X(dt) = i - 1 \mid X(0) = i) &= d_i dt + o(dt) \Rightarrow d_i = 0\end{aligned}$$

Für das System der GDG  $\mathbf{p}' = \mathbf{A}\mathbf{p}$  gilt

$$A = \text{tridiag}\{b_i, -b_i\delta_{i < N}, 0\} = \text{tridiag}\{B, -B\delta_{i < N}, 0\}$$

- ▶ Analog zum Todesprozess,

$$p_0' = -Bp_0 \Rightarrow p_0(t) = e^{-Bt} p_0(0)$$

$$p_1' = Bp_0 - Bp_1 \quad \dots \quad p_1(t) = e^{-Bt} [p_1(0) + p_0(0)Bt]$$

$$p_2' = Bp_1 - Bp_2 \quad \dots \quad p_2(t) = e^{-Bt} [p_2(0) + p_1(0)Bt + p_0(0)\frac{1}{2}(Bt)^2]$$

usw.

$$p_i(t) = e^{-Bt} \sum_{j=0}^i p_j(0) \frac{(Bt)^{i-j}}{(i-j)!}, \quad 0 \leq i \leq N-1, \quad p_N(t) = 1 - \sum_{i=0}^{N-1} p_i(t)$$

# Poissonsche Verteilung

- ▶ Nun werden unendlich viele Zustände für einen Geburtsprozess erlaubt, d.h.  $N \rightarrow \infty$ .
- ▶ Geburtsprozess: Schätze werden entdeckt und nicht vergessen, also gibt es keinen gleichzeitigen Todesprozess.
- ▶ Seien
  - ▶  $X(t)$  = Anzahl der entdeckten Schätze zur Zeit  $t$ .
  - ▶  $A(t)$  = Anzahl der Schätze, die im Zeitintervall  $[0, t]$  entdeckt werden.
- ▶ Es gelten

$$\begin{aligned}P(X(dt) = i + 1 \mid X(0) = i) &= b_i dt + o(dt) \quad b_i = B \\0 = P(X(dt) = i - 1 \mid X(0) = i) &= d_i dt + o(dt) \Rightarrow d_i = 0 \\P(A(t) = k) &= P(X(t) = k \mid X(0) = 0)\end{aligned}$$

- ▶ Für  $A(t)$  sind die Anfangsbedingungen für  $p_n(t)$  gegeben durch  $p_n(0) = \delta_{n,0}$ , und es folgt die *Poissonsche Verteilung*

$$P(A(t) = k) = e^{-Bt} \sum_{j=0}^k p_j(0) \frac{(Bt)^{k-j}}{(k-j)!} = e^{-Bt} \frac{(Bt)^k}{k!}$$



# Poissonsche Verteilung

- ▶ Der Erwartungswert ist

$$E[A(t)] = \sum_{n=0}^{\infty} np_n(t) = e^{-Bt} \sum_{n=0}^{\infty} n \frac{(Bt)^n}{n!} = (Bt)e^{-Bt} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(Bt)^{n-1}}{(n-1)!} = Bt$$

- ▶ Sei  $G$  = Zeit bis zur nächsten Entdeckung. Es gilt für  $t > 0$

$$\begin{aligned} \forall i \quad P(G > t) &= P(X(t+s) = i \mid X(s) = i) \\ &= P(X(t+s) = 0 \mid X(s) = 0) \\ \forall s &= P(X(t) = 0 \mid X(0) = 0) \\ \text{(mit Anfangsbedingungen)} &= p_0(t) = e^{-Bt} \end{aligned}$$

- ▶ Sei  $g$  die Wahrscheinlichkeitsdichte für  $G$ , d.h.

$$P(G \in M) = \int_M g(s) ds$$

Mit der obigen Formel folgt die *Exponentielle Verteilung*

$$e^{-Bt} = P(G > t) = \int_t^{\infty} g(s) ds \quad (t > 0)$$

d.h.  $g(t) = Be^{-Bt}$  für  $t \geq 0$  und  $g(t) = 0$  für  $t < 0$ .

- ▶ Der Erwartungswert ist

$$E[G] = \int_0^{\infty} sg(s) ds = \int_0^{\infty} sBe^{-Bs} ds = 1/B$$

## Länge einer Warteschlange

- ▶ Kunden kommen bei einer Kasse an.
  - ▶ Sei  $X(t)$  = Anzahl der Kunden in der Warteschlange.  
$$X(t) \in \{0, \dots, N\}$$
  - ▶ Geburt: Ein neuer Kunde kommt an.
  - ▶ Todesfall: Ein wartender Kunde wird bedient.
- ▶ Wie oben gesehen gelten Folgende mit entsprechenden Anfangsbedingungen.

- ▶ Reiner Geburtsprozess:

$G$  = Zeit bis nächster Kunde ankommt.

$$P(G > t) = e^{-Bt}, \quad E(G) = 1/B =: c$$

wobei  $c$  = durchschnittliche Zeit zwischen Kundenankünften.

- ▶ Reiner Todesprozess:

$T$  = Zeit bis nächster Kunde bedient.

$$P(T > t) = e^{-Dt}, \quad E(T) = 1/D =: s$$

wobei  $s$  = durchschnittliche Zeit zwischen Kundenbedienungen.

- ▶ Das System  $\mathbf{p}' = \mathbf{A}\mathbf{p}$  ist mit  $b_j = 1/c$  und  $d_j = 1/s$ ,

$$\begin{cases} p'_j &= b_{j-1}p_{j-1} - (b_j + d_j)p_j + d_{j+1}p_{j+1}, & 0 < j < N \\ p'_0 &= -b_0p_0 + d_1p_1 \\ p'_N &= b_{N-1}p_{N-1} - d_Np_N \end{cases}$$

## Länge einer Warteschlange

- Analog zu den vorherigen Beispielen ist die Systemmatrix

$$A = \text{tridiag}\left\{\frac{1}{c}, -\frac{1}{c}\delta_{i < N}, 0\right\} + \text{tridiag}\left\{0, -\frac{1}{s}\delta_{i > 0}, \frac{1}{s}\right\}$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{1}{c} & \frac{1}{s} & & & & & 0 \\ \frac{1}{c} & -\left(\frac{1}{c} + \frac{1}{s}\right) & \frac{1}{s} & & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & \frac{1}{c} & -\left(\frac{1}{c} + \frac{1}{s}\right) & \frac{1}{s} & & \\ 0 & & & \frac{1}{c} & -\frac{1}{s} & & \end{bmatrix}$$

- Ein *stationärer* Zustand  $\mathbf{p}^*$  ( $\mathbf{p}' = \mathbf{A}\mathbf{p} \rightarrow 0$ ) erfüllt  $\mathbf{A}\mathbf{p}^* = 0$ .

- 1. Gleichung:

$$\frac{p_0^*}{c} = \frac{p_1^*}{s}, \quad p_1^* = \rho p_0^*, \quad \rho = s/c.$$

- 2. Gleichung:

$$0 = \left(\frac{p_0^*}{c} - \frac{p_1^*}{s}\right) - \frac{p_1^*}{c} + \frac{p_2^*}{s}, \quad p_2^* = \rho p_1^* = \rho^2 p_0^*$$

- Weiter,

$$p_i^* = \rho^i p_0^*, \quad 1 \leq i \leq N$$

## Länge einer Warteschlange

- ▶  $\rho_0^*$  ist gegeben durch

$$1 = \sum_{i=0}^N \rho_i^* = \sum_{i=0}^N \rho^i \rho_0^* \quad \text{oder} \quad \rho_0^* = 1 / \sum_{i=0}^N \rho^i = \frac{1 - \rho}{1 - \rho^{N+1}}$$

- ▶ Der Erwartungswert ist

$$\begin{aligned} E[X^*] &= \sum_{i=0}^N i \rho_i^* = \rho_0^* \sum_{i=0}^N i \rho^i = \rho \rho_0^* \frac{d}{d\rho} \sum_{i=1}^N \rho^i \\ &= \left[ \frac{\rho(1 - \rho)}{1 - \rho^{N+1}} \right] \frac{d}{d\rho} \left[ -1 + \frac{1 - \rho^{N+1}}{1 - \rho} \right] \\ &= \frac{\rho(1 - (N+1)\rho^N + N\rho^{N+1})}{(1 - \rho)(1 - \rho^{N+1})} \end{aligned}$$

$$E[X^*] \xrightarrow{\rho \rightarrow 1} \frac{N}{2}, \quad E[X^*] \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \frac{\rho}{1 - \rho} =: L_1$$

## Wartezeit bei der Warteschlange

- ▶ Bei der Warteschlange einer Kasse komme ich zur Zeit  $t = 0$  an. Sei  $X(t)$  = Anzahl der Kunden vor mir an der Kasse zur Zeit  $t$ .
- ▶ Sei  $Y$  = meine gesamte Wartezeit, d.h. die Summe der Bedienzeiten der vorherigen Kunden plus meine eigene Bedienzeit. Verteilung? Erwartungswert?
- ▶  $c, s$  = durchschnittliche Zeiten zwischen Kunden-Ankünften bzw. -Bedienungen,  $\rho = s/c \leq 1$ .
- ▶ Zur Vereinfachung wird angenommen, die Anzahl der möglichen Plätze in der Warteschlange erfüllt  $N \rightarrow \infty$ ,  
$$p_0^* = \frac{1-\rho}{1-\rho^{N+1}} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 1 - \rho, \quad p_i^* = \rho^i p_0^* \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \rho^i (1 - \rho)$$

- ▶ Für die Verteilung von  $Y$ ,

$$P(Y \leq t) = \sum_{i=0}^{\infty} P(Y \leq t | X(0) = i) P(X(0) = i)$$

- ▶  $P(Y \leq t | X(0) = i)$  entspricht  $p_0(t)$  eines reinen Todesprozesses mit Anfangsbedingungen  $p_j(0) = \delta_{i+1,j}$ .
- ▶ Nimm  $P(X(0) = i) = p_i^* = \rho^i (1 - \rho)$ .

## Wartezeit bei der Warteschlange

- Für den reinen Todesprozess mit Anfangsbedingungen

$p_j(0) = \delta_{i+1,j}$  gilt

$$p_0(t) = 1 - \sum_{j=1}^{i+1} p_j(t) = 1 - \sum_{j=1}^{i+1} \left[ e^{-t/s} \sum_{\substack{k=j \\ =\delta_{i+1,k}}}^{\infty} \underbrace{p_k(0)}_{\delta_{i+1,k}} \frac{(t/s)^{k-j}}{(k-j)!} \right]$$
$$= 1 - e^{-t/s} \sum_{j=1}^{i+1} \frac{(t/s)^{i+1-j}}{(i+1-j)!} = 1 - e^{-t/s} \sum_{l=0}^i \frac{(t/s)^l}{l!} \stackrel{\text{z.z.}}{=} \int_0^t \frac{(\tau/s)^i}{i!} \frac{e^{-\tau/s}}{s} d\tau$$

- Zusammengefasst,

$$P(Y \leq t) = \sum_{i=0}^{\infty} \rho^i (1 - \rho) \int_0^t \frac{(\tau/s)^i}{i!} \frac{e^{-\tau/s}}{s} d\tau$$
$$= \frac{1 - \rho}{s} \int_0^t e^{-\tau/s} \underbrace{\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(\rho\tau/s)^i}{i!}}_{=e^{\rho\tau/s}} d\tau = \frac{1 - \rho}{s} \frac{e^{(\rho-1)\tau/s}}{(\rho-1)/s} \Bigg|_0^t = 1 - e^{-(1/s-1/c)t}$$

oder  $P(Y > t) = 1 - P(Y \leq t) = e^{-(1/s-1/c)t}$ .

## Wartezeit bei der Warteschlange

- ▶ Sei  $y$  die Wahrscheinlichkeitsdichte für  $Y$ , d.h.

$$P(Y \in M) = \int_M y(\tau) d\tau$$

Mit der obigen Formel folgt

$$e^{-(1/s-1/c)t} = P(Y > t) = \int_t^\infty y(\tau) d\tau \quad (t > 0)$$

d.h. die Exponentielle Verteilung,

$$y(t) = (1/s - 1/c)e^{-(1/s-1/c)t}$$

- ▶ Der Erwartungswert ist

$$\begin{aligned} E[Y] &= \int_0^\infty \tau y(\tau) d\tau = \int_0^\infty \tau (1/s - 1/c) e^{-(1/s-1/c)\tau} d\tau \\ &= \underbrace{-\tau e^{-(1/s-1/c)\tau}}_{=0} \Big|_0^\infty + \int_0^\infty e^{-(1/s-1/c)\tau} d\tau = \frac{e^{-(1/s-1/c)\tau}}{-(1/s-1/c)} \Big|_0^\infty \\ &= \frac{1}{1/s - 1/c} = \frac{s}{1 - \rho} =: W = cL_1 \quad L_1 = \frac{\rho}{1 - \rho}, \quad \rho = \frac{s}{c} \end{aligned}$$

- ▶ Bei Stationarität: (erwartete) Wartezeit =  
(durchschnittliche) Zeit zwischen Kundenankünften  $\times$   
(erwartete) Länge der Warteschlange bei *einer* Kasse.

# Diskrete Probabilistische Modelle

- ▶ Beispiel: Zustand eines Aufzugs.
- ▶ Zuerst kontinuierlich:
  - ▶ Mögliche Zustände:  $X(t) \in \{0 \text{ (EG)}, \dots, N\}$ , d.h.  $N + 1$  Stockwerke.
  - ▶  $X(t) = i$  zur Zeit  $t$  wenn still im  $i$ ten Stockwerk oder wenn unterwegs zum  $i$ ten Stockwerk.
  - ▶ Geburt:  $X(t) = i \rightarrow X(t + dt) = i + 1$ .
  - ▶ Todesfall:  $X(t) = i \rightarrow X(t + dt) = i - 1$ .

z.B.  $N = 2$ ,  $\mathbf{p}' = A\mathbf{p}$ , wobei

$$A = \begin{bmatrix} -b_0 & d_1 & 0 \\ b_0 & -(b_1 + d_1) & d_2 \\ 0 & b_1 & -d_2 \end{bmatrix}, \quad \text{d.h.} \quad \begin{array}{l} d_0 = 0 \\ b_2 = 0 \end{array}$$

Lösung: Mit  $A = S\Lambda S^{-1}$ ,  $\mathbf{p}(t) = e^{At}\mathbf{p}_0 = Se^{\Lambda t}S^{-1}\mathbf{p}(0)$

$$b_0 = b_1 = d_0 = d_1 \Rightarrow \mathbf{p}(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \langle \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \rangle^T$$

d.h. alle Stockwerke sind auf die Dauer gleich wahrscheinlich.



# Markov-Ketten

- ▶ Nun diskret:
  - ▶  $X(n) = i$  wenn im  $i$ ten Stockwerk nach dem  $n$ ten Übergang.
  - ▶  $n =$  Übergangsindex, nicht lineare Zeit.
  - ▶  $p_i(n) = P(X(n) = i)$
- ▶ Die Verteilung für einen Übergang ist gegeben durch

$$p_j(1) = \sum_{i=0}^N \underbrace{P(X(1) = j | X(0) = i)}_{P_{i,j}} p_i(0)$$

wobei  $P = \{P_{i,j}\}$  die Übergangsmatrix ist.  $\sum_{j=0}^N P_{i,j} = 1$

**Def:** Eine Markov-Kette (linear mit konstanten Übergangswahrscheinlichkeiten) ist ein zeitlich diskretes dynamisches Modell bestehend aus Zuständen  $\{S_i\}$  und Wahrscheinlichkeiten  $\{P_{i,j}\}$ , wobei der Übergang  $S_i|_n \rightarrow S_j|_{n+1}$  mit Wahrscheinlichkeit  $P_{i,j}$  stattfindet.

- ▶ Ein Schritt der obigen Markov-Kette wird dargestellt durch

$$\mathbf{p}^T(1) = \mathbf{p}^T(0)P$$

und  $n$  Schritte durch

$$\mathbf{p}^T(n) = \mathbf{p}^T(n-1)P = \dots = \mathbf{p}^T(0)P^n$$

## Zustand eines Aufzugs

- ▶ Nimm  $N = 2$ . Man fährt weder  $0 \rightarrow 2$  noch  $2 \rightarrow 0$  in einem Übergang. Deswegen gelten

$$P_{2,0} = P_{0,2} = 0$$

- ▶ Man fährt nie  $i \rightarrow i$  in einem Übergang. Deswegen gelten

$$P_{0,0} = P_{1,1} = P_{2,2} = 0$$

- ▶ Da die Zeilensumme der Übergangsmatrix immer 1 ist, gilt für ein  $\theta \in [0, 1]$

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \theta & 0 & 1 - \theta \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad P^{2k} = \begin{bmatrix} \theta & 0 & 1 - \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \theta & 0 & 1 - \theta \end{bmatrix}, \quad P^{2k+1} = P$$

- ▶ Daher

$$\mathbf{p}(0) = \langle 1, 0, 0 \rangle^T \Rightarrow \mathbf{p}(2k+1) = \langle 0, 1, 0 \rangle^T, \quad \mathbf{p}(2k) = \langle \theta, 0, 1 - \theta \rangle^T$$

- ▶ Startend vom EG wird der Aufzug unbedingt im mittleren Stockwerk bei ungeraden Übergängen sein, aber dies ist bei geraden Übergängen nicht möglich.
- ▶ Der Unterschied zwischen dem kontinuierlichen und dem diskreten Ergebnis hat mit der zeitlichen Variable zu tun:  $t$  vs.  $n$ .

# Wetter Übergänge

- ▶ Beispiel: Angenommen befindet sich das Wetter an einem gegebenen Tag in einem der Zustände:  $S$  (Sonne),  $W$  (Wolken) oder  $R$  (Regen).
- ▶ Abgeschätzte Übergangswahrscheinlichkeiten werden in einer Tabelle zusammengefasst,

	$S$	$W$	$R$
$S$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$0$
$W$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
$R$	$0$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (P^n > 0, n > 1)$$

- ▶  $P \in \mathbb{S}$  (stochastische Matrizen):  $(\mathbf{e})_i = 1, \forall i \Rightarrow P\mathbf{e} = \mathbf{e}$ .
- ▶  $\mathbf{s} \in \mathbb{W}$  (Wahrscheinlichkeitsvektoren):  $(\mathbf{s})_i \in [0, 1]$  und  $\mathbf{s} \cdot \mathbf{e} = 1$ .
- ▶ Mit Ausgangszustand  $\mathbf{s}^n \in \mathbb{W}$  ist  $\mathbf{s}^{n+1} = P^T \mathbf{s}^n \in \mathbb{W}$  der Übergangszustand.
- ▶ Mit Anfangszustand  $\mathbf{s}^0 \in \mathbb{W}$  ist  $\mathbf{s}^n = (P^T)^n \mathbf{s}^0 \in \mathbb{W}$  der  $n$ te Zustand. Fürs Beispiel  $\mathbf{s}^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \hat{\mathbf{s}} = \langle \frac{2}{5}, \frac{2}{5}, \frac{1}{5} \rangle^T$  (Gleichgewicht).

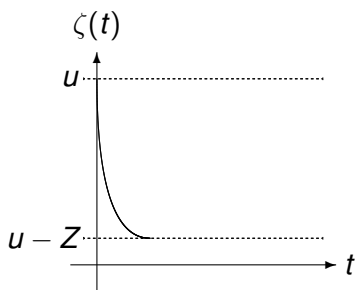
**Satz:** Für  $P \in \mathbb{S}$  mit  $P^n > 0, n > 1, \exists! \hat{\mathbf{s}} \in \mathbb{W}$ , wobei  $P^T \hat{\mathbf{s}} = \hat{\mathbf{s}}$ , und  $(P^T)^n \mathbf{e}_i \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \hat{\mathbf{s}}, \forall \mathbf{e}_i$  mit  $(\mathbf{e}_i)_j = \delta_{i,j}$ .

# Optimale Entscheidung

- ▶ Wie viel soll ein Käufer für die Firma kaufen?
- ▶ Größen:
  - $t$  = Zeit, im Intervall  $[0, 1]$
  - $u$  = Menge gekauft und sofort geliefert zu Beginn des Zeitintervalls
  - $Z$  = Nachfrage im Zeitintervall (Zufallsvariable)
  - $f$  = Wahrscheinlichkeitsdichte für  $Z$   
 $P(Z \leq s) = \int_0^s f(z) dz, \quad Z \geq 0$
  - Ziel: Profit maximieren,  $E[\text{Profit}] = ?$
  - $p$  = Einheitspreis
  - $c_0$  = Einheitskosten
  - $k$  = Fixkosten: Lieferung, Verwaltung
  - $k + c_0 u$  = Gesamtkosten
- ▶ Zwei Möglichkeiten:
  - ▶ alles verkauft, Ertrag =  $p \cdot u$
  - ▶ nicht alles verkauft, Ertrag =  $p \cdot Z$
- ▶ Es gibt Lagerungskosten dabei im zweiten Fall.

# Optimalen Warenkauf

- ▶ Sei  $\zeta(t)$  = Menge gelagert zur Zeit  $t$ ,  $\zeta(0) = u$ .
- ▶ Seien die gesamten Lagerungskosten  $c_1 \int_0^1 \zeta(t) dt$ , z.B.



z.B.

$t = 0$ : Freitag

$t = 1$ : Donnerstag

$$\zeta(t) \approx u - Z \Rightarrow$$

$$c_1 \int_0^1 \zeta(t) dt \approx c_1(u - Z)H(u - Z)$$

wobei

$$H(t) = \frac{1}{2}[1 + \operatorname{sgn}(t)]$$

- ▶ Gesamtkosten sind

$$k + c_0 u + c_1(u - Z)H(u - Z)$$

- ▶ Ertrag ist

$$p[Z + (u - Z)H(Z - u)]$$

- ▶ Profit für ein unbekanntes  $u$  ist

$$P_u(Z) = p[Z + (u - Z)H(Z - u)] - k - c_0 u - c_1(u - Z)H(u - Z)$$

## Zielfunktion für den Warenkauf

- Die zu maximierende Zielfunktion ist

$$\begin{aligned} J(u) = E[P_u(Z)] &= E[pZ + p(u - Z)H(Z - u)] \\ &- E[k + c_0u + c_1(u - Z)H(u - Z)] \\ &= p \int_0^\infty [z + (u - z)H(z - u)]f(z)dz \\ &- \left\{ k + c_0u + c_1 \int_0^\infty (u - z)H(u - z)f(z)dz \right\} \\ \text{(zu zeigen)} &= (p + c_1) \left\{ \int_0^u zf(z)dz - u \int_0^u f(z)dz \right\} \\ &+ (p - c_0)u - k \end{aligned}$$

- Die Ableitungen der Zielfunktion sind

$$J'(u) = -(p + c_1) \int_0^u f(z)dz + p - c_0 \quad \text{und} \quad J''(u) = -(p + c_1)f(u) < 0$$

# Maximierung der Zielfunktion

- ▶ Ein kritischer Punkt  $u^*$  erfüllt

$$\int_0^{u^*} f(z) dz = \frac{p - c_0}{p + c_1}$$

oder

$$1 - \int_0^{u^*} f(z) dz = \int_{u^*}^{\infty} f(z) dz = 1 - \frac{p - c_0}{p + c_1} = \frac{c_0 + c_1}{p + c_1}$$

und

$$J(u^*) = (p + c_1) \int_0^{u^*} zf(z) dz - k$$

- ▶ Wahrscheinlichkeitsdichte? Gauß verteilt? Nimm

$$f(z) = \frac{\chi_{[0,U]}(z)}{U} = \frac{1}{U} \begin{cases} 1, & z \in [0, U] \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Es gilt dann

$$1 > \frac{p - c_0}{p + c_1} = \int_0^{u^*} f(z) dz = \frac{1}{U} \int_0^{u^*} \chi_{[0,U]}(z) dz = \begin{cases} u^*/U, & 0 \leq u^* \leq U \\ 1, & u^* > U \end{cases}$$

- ▶ Es folgt

$$u^* = U \frac{p - c_0}{p + c_1}$$