Satellit

Projekt Mathematische Modellierung

Lukas Schweighofer, Mustafa Krupic, Elisabeth Schmidhofer

Sommersemester 2013

1. Einführung und Beschreibung der Vorgangs

In unserem Projekt schicken wir einen Satelliten von der Erde zum Saturn. Wir haben Berechnung erstellt, um den schnellsten Weg des Satelliten zu ermitteln. Einerseits betrachten wir den direkten Flug, andererseits den Umweg über Jupiter.

Zusätzlich vergleichen wir unsere Daten mit den von der NASA gegebenen.

Unser Verfahren bezeichnet man in der Raumfahrt auch als Swing-by Effekt, welcher in der Raumfahrt benutzt wird, um Satelliten zu beschleunigen. Der Satellit fliegt in einem steilen Winkel auf einen Planeten (Jupiter) zu und hinter ihm vorbei, um die Beschleunigung des angesteuerten Planeten zu nutzen.

Das Gravitationsfeld des Planeten lenkt dabei den Satelliten in eine Richtung ab, die der Bewegungsrichtung des Planeten ähnlich ist. Dabei wird kinetische Energie des Planeten auf den Satelliten übertragen. Die Geschwindigkeit des angesteuerten Planeten ändert sich deshalb jedoch nicht merkbar, da der Massenunterschied (Satellit – Planet) zu groß ist.

2. Grundlagen

Im Folgenden wird der Vorgang aus zwei unterschiedlichen Standpunkten betrachtet.

System 1 ist der Standpunkt, der die Sonne als fest annimmt, die Bahnen der Körper werden hierbei betrachtet. Zur Vereinfachung unserer Berechnungen nehmen wir die Planetenbahnen in den folgenden Berechnungen als Kreise an. Dieses System soll uns dabei helfen den Energiegewinn festzustellen.

System 2 dient als Beobachtungssystem. Hierbei wird sich das System mit dem Planeten mitbewegen. Wir stellen die Annahme, dass der Planet ruht und sich der Satellit im Gravitationsfeld des Planeten bewegt.

System 1 und System 2 sind Inertialsysteme. Sie bewegen sich zueinander mit der Geschwindigkeit des Planeten, welche wir mit $\vec{V}$ bezeichnen.

Weiters werden wir die Gravitationskraft der Sonne als konstant betrachten, da sich der maximale Fehler nicht einmal im Promillebereich befindet.

Dabei sei $\vec{v}$ die Geschwindigkeit, mit der sich der Satellit zum Jupiter hin bewegt, und $\overrightarrow{v'}$ die Geschwindigkeit, mit der der Satellit den Einflussbereich des Planeten wieder verlässt.

$\vec{V}$ wird solange sich der Satellit im Einflussbereich des Planeten befindet immer als konstant betrachtet.

$\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v'_1}$,und $\overrightarrow{V_1}$, bezeichnen die Geschwindigkeiten im System1, $\overrightarrow{v_2}$, $\overrightarrow{v'_2}$,und $\overrightarrow{V_2}$ die Geschwindigkeiten im System 2.

3. Flug über Jupiter

3.1. Flugbahnbestimmung des Satelliten

Wir wissen:

Kraft: $\vec{F} = m \cdot \vec{a} = m \cdot \vec{r} \cdot \omega^2$ mit $a = \ddot{r}$

Drehimpuls: $\vec{L} = m \cdot \vec{r}^2 \cdot \omega$ konstant

Wir definieren h: $h := \frac{L}{m} = \vec{r}^2 \cdot \omega$

Damit wir uns in einer Bahn halten, müssen Zentripetalkraft und Zentrifugalkraft gleich sein.

$\vec{F} = m \cdot (\vec{a} - \vec{r} \cdot \omega^2)$

$$r \cdot \omega^2 = r \cdot \left(\frac{h}{r^2}\right)^2 = \frac{h^2}{r^3} \overset{u:=\frac{1}{r}}{\Longrightarrow} h^2 \cdot u^3$$

Zur Berechnung von $\ddot{r}$ muss zunächst $\dot{r}$ gebildet werden:

$$\frac{\partial r}{\partial t} = \frac{\partial r}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial r}{\partial \theta}\omega = \frac{\partial r}{\partial \theta}\frac{h}{r^2} = -\frac{1}{u^2}\frac{\partial u}{\partial \theta}hu^2 = -h\frac{\partial u}{\partial \theta}$$

Berechnung von $\ddot{r}$:

$$\ddot{r} = \frac{\partial^2 r}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\left[-h \cdot \frac{\partial u}{\partial \theta}\right] = -h \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}\frac{\partial \theta}{\partial t} = -h\,\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}\omega = -\frac{h^2}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = -h^2 \cdot u^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}$$

Dadurch erhält man:

$$F = mh^2u^2\left(u + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}\right)$$

Das kann man nun mit der Gravitationskraft nach Newton gleichsetzen. Es ergibt sich die Differentialgleichung:

$$mh^2u^2\left(u + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}\right) = GMmu^2 \Leftrightarrow$$

$$u + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = \frac{GM}{h^2}$$

3.1.1. Lösung der Differentialgleichung

Ansatz: $w_1 \coloneqq u, w_2 \coloneqq \dot{u} = \dot{w_1}$

$$\begin{pmatrix} w_1' \\ w_2' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}_{\coloneqq A} \cdot \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{GM}{h^2} \end{pmatrix}$$

Eigenwerte: $\lambda_{1,2} = \pm\, i$

$$\begin{pmatrix} i & 1 \\ -1 & i \end{pmatrix} \cdot v_1 = 0 \;\Rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix} \cdot v_2 = 0 \;\Rightarrow v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = c_1 \cdot e^{-i\theta} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} + c_2 \cdot e^{i\theta} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow w_1 = u = c_1 \cdot e^{-i\theta} + c_2 \cdot e^{i\theta} = c_1 \cos\theta - c_1 i\, sin\,\theta + c_2 \cos\theta + c_2 i \sin\theta$$

$$u_h(\theta) = (c_1 + c_2) \cdot \cos\theta + (c_2 - c_1) \cdot i \sin\theta = C \cdot \cos(\theta - \vartheta)$$

$$u_p(\theta) = \frac{GM}{h^2} = \frac{1}{k}$$

$$u(\theta) = u_h(\theta) + u_p(\theta) = \; C \cdot \cos(\theta - \vartheta) + \frac{1}{k}$$

3.1.2 Herleitung der Flugbahn

Wähle $\vartheta = 0$:

$$r(\theta) = \frac{1}{u(\theta)} = \frac{1}{\frac{1}{k} + C \cdot \cos(\theta - \vartheta)} = \frac{k}{1 + C \cdot k \cdot \cos\theta}$$

Wir setzten $C \cdot k = \varepsilon$ und erhalten die allgemeine Form der Kegelschnitte in Polarkoordinaten.

ε bestimmt uns nun die Form der Flugbahn:

$0 \leq \varepsilon < 1$ ergibt eine ellipsenartige Flugbahn

$\varepsilon = 1$ ergibt eine parabolische Flugbahn, welche wir trivialerweise ausschließen können

$\varepsilon > 1$ ergibt eine hyperbolische Flugbahn

Daraus können wir nun folgern, dass unsere Flugbahn entweder elliptischer oder hyperbolischer Form ist.

3.2. Geschwindigkeitsgewinn & Energiegewinn

Im Folgenden betrachten wir Energie- und Impulserhaltungssätze, welche aussagen, dass die Gesamtenergie und der Gesamtimpuls in einem geschlossenen System konstant bleiben.

Wir befinden uns nun im System 2, in dem Jupiter in den Koordinatenursprung gesetzt wird.

Impulserhaltungssatz:

$$mv_2 + MV_2 = mv'_2 + MV'_2$$

Mit $V_2 = 0 \Rightarrow V'_2 = \frac{m}{M} \cdot (v_2 - v'_2)$

Energieerhaltungssatz:

$$\frac{m\vec{v}_2^2}{2} + \frac{M\vec{v}_2^2}{2} = \frac{m\overrightarrow{v'}_2^2}{2} + \frac{M\overrightarrow{v'}_2^2}{2}$$

Mit V'_2 von oben und $V_2 = 0$:

$$\Rightarrow {v_2}^2 = {v'_2}^2 + \frac{m}{M} \cdot (v_2 - v'_2)^2$$

Da $m \ll M \Rightarrow \frac{m}{M} \approx 0$

$\Rightarrow v_2 \approx v'_2$, das heißt, die Geschwindigkeit der Satellit ist vor und nach der Begegnung mit dem Planeten ungefähr gleich groß.

Zusammenfügen beider Systeme:

Um nun die Geschwindigkeit ins System 1 zu übertragen, müssen wir die Geschwindigkeit $V = V_1$ (Geschwindigkeit, mit der sich die Systeme zueinander bewegen) zu v_2 addieren:

$$v_1 = v_2 + V$$

$$v'_1 = v'_2 + V$$

Den Energiegewinn bekommen wir durch Verwendung der kinetischen Energie

$$E_{kin} = \frac{1}{2}mv^2$$

$$\Rightarrow \Delta E = \frac{1}{2}m\left(\overrightarrow{v'_1}^2 - \overrightarrow{v_1}^2\right)$$

Maximale Geschwindigkeit würde erreicht werden, wenn v_2 V entgegengerichtet wäre und v'_2 in die Richtung von V zeigt. Die maximale Geschwindigkeit lässt sich aber nur näherungsweise erreichen, denn alle Planeten kreisen in selber Richtung um die Sonne, das heißt beim Abschuss von dem Satelliten kreist dieser zuerst in Richtung der Erde mit. Eine Richtungsänderung würde zu viel Energie kosten.

3.2.1 Der Start

Daten:

Masse der Sonne:	$M_S = 2{,}0 \cdot 10^{30} kg$
Radius der Erdbahn:	$r_E = 1{,}5 \cdot 10^{11} m$
Radius der Jupiterbahn:	$r_J = 7{,}8 \cdot 10^{11} m$
Flugbahn von Erde zu Jupiter:	$a_{E\to J} = 7{,}5 \cdot 10^{11} m$
Exzentrizität der Ellipse:	$\varepsilon_{E\to S} = 0{,}8$

Berechnung der Startgeschwindigkeit:

Formel Herleitung zur Berechnung von v

$$E = E_{kin} + E_{pot} = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r}$$

Aus dem Impulserhaltungssatz bekommen wir Kräftegleichheit, daher kann man schließen, dass Zentripetalkraft gleich Zentrifugalkraft ist:

$$\frac{GMm}{r^2} = \frac{mv^2}{r} \Rightarrow \frac{mv^2}{2} = \frac{GMm}{2r} \Rightarrow E = \frac{GMm}{2r} - \frac{GMm}{r} = \frac{GMm}{2r}$$

Wenn wir uns auf einer Ellipse befinden, mit großer Halbachse a, ist die Energie gegeben durch:

$$E = \frac{GMm}{2a}$$

Daraus erhalten wir:

$$E_{kin} = \frac{mv^2}{2} = -E_{pot} + E = \frac{GMm}{r} - \frac{GMm}{2a} = GMm \cdot \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{2a}\right)$$

$$\Rightarrow v = \sqrt{GM(\frac{2}{r} - \frac{1}{a})}$$

v_{Start} ist die Geschwindigkeit, mit der wir den Satelliten von der Erde losschicken müssen:

$$v_{Start} = \sqrt{GM_S(\frac{2}{r_E} - \frac{1}{r_E})} = \sqrt{GM_S \cdot \frac{1}{r_E}} = \sqrt{6{,}7 \cdot 10^{-11} \cdot 2 \cdot 10^{30} \cdot (\frac{2}{1{,}5 \cdot 10^{11}} - \frac{1}{7{,}5 \cdot 10^{11}})} = 40 \frac{km}{s}$$

v_E ist die Geschwindigkeit der Erde um die Sonne:

$$v_E = \sqrt{GM_S(\frac{2}{r_E} - \frac{1}{a_{E \to J}})} = \sqrt{6{,}7 \cdot 10^{-11} \cdot 2 \cdot 10^{30} \cdot \frac{1}{1{,}5 \cdot 10^{11}}} = 30 \frac{km}{s}$$

Da der Satellit von der Erde aus gestartet wird, muss er nicht aus der Ruhe beschleunigt werden, sondern trägt die Geschwindigkeit der Erde schon mit sich.

Daher muss er nur mehr um $10 \frac{km}{s}$ beschleunigt werden, um auf die Startgeschwindigkeit zu kommen.

3.2.2 Der Flug von der Erde zum Jupiter

Der Satellit fliegt auf einer Ellipse von der Erde zum Jupiter, und folgt der Bahn

$$r(\theta) = \frac{a \cdot (1 - \varepsilon^2)}{1 + \varepsilon \cdot cos\theta}$$

Die Umkehrfunktion lautet:

$$\theta(r) = \frac{arccos(a \cdot (1 - \varepsilon^2\ ) - r)}{r \cdot \varepsilon}$$

Berechnung von θ_E und θ_J durch einsetzten von den gegebenen Daten:

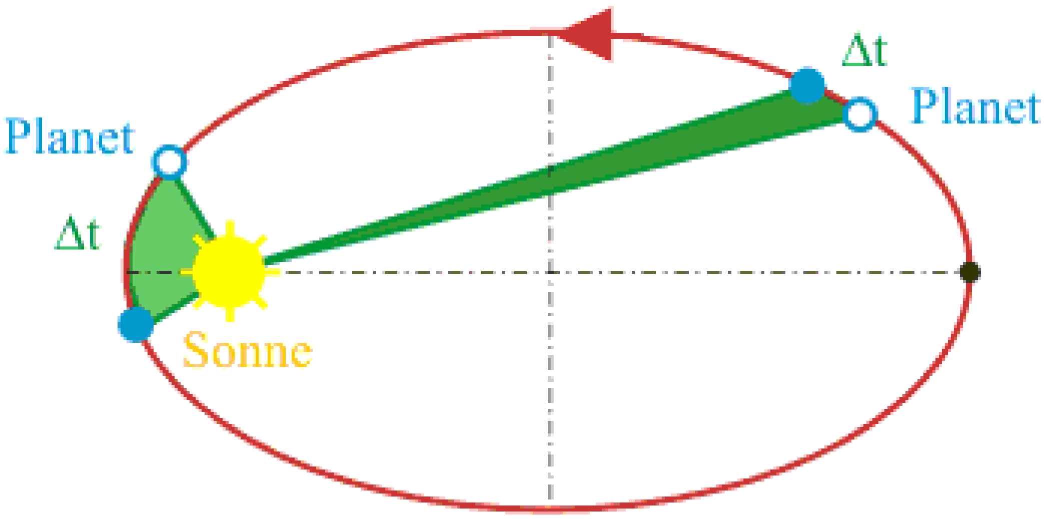
$$\theta_E = arccos\frac{a_{E\to J}\cdot(1-{\varepsilon_{E\to S}}^2)-r_E}{r_E\cdot\varepsilon_{E\to S}} = arccos\frac{7{,}5\cdot10^{11}\cdot(1-0{,}8^2)-1{,}5\cdot10^{11}}{1{,}5\cdot10^{11}\cdot0{,}8} = 0°$$

$$\theta_J = arccos\frac{a_{E\to J}\cdot(1-{\varepsilon_{E\to S}}^2)-r_J}{r_J\cdot\varepsilon_{E\to S}} = arccos\frac{7{,}5\cdot10^{11}\cdot(1-0{,}8^2)-7{,}8\cdot10^{11}}{7{,}8\cdot10^{11}\cdot0{,}8} = 145°$$

Das bedeutet der Satellit startet am Perihel der Ellipse und überstreicht bis zum Jupiter einen Winkel von 145°.

$$b_{E\to J} = a_{E\to J}\cdot\sqrt{\left|1-{\varepsilon_{E\to J}}^2\right|} = 7{,}5\cdot10^{11}\cdot\sqrt{|1-0{,}8^2|} = 4{,}5\cdot10^{11}m$$

Laut dem 2. Kepler‘schen Gesetz ist die verstrichene Zeit direkt proportional zur Fläche, die von der Verbindungslinie Sonne – Satellit überstrichen wird.



Dazu wollen wir nun die Fläche berechnen:

Formel Herleitung zur Berechnung der Fläche

Die Parameterform einer Ellipse ist gegeben durch:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \ \cos p \\ b \ \sin p \end{pmatrix}$$

mit $p \in [-\pi\ ,\ \pi]$ und Brennpunkt $F(\varepsilon a|0)$.

Durch eine Stauchung der Ellipse um den Faktor a in x-Richtung und um den Faktor b in y-Richtung, werden alle Flächen um den Faktor ab kleiner:

$$\overrightarrow{x'} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} \end{pmatrix} \vec{x}$$

Die Ellipsenpunkte werden dann abgebildet auf $P(x'|y')$ mit

$$x' = \cos p$$

$$y' = \sin p$$

was ein Kreis mit Radius 1 ist, der Fixpunkt wird zu $F'(\varepsilon|0)$ transformiert.

Die Fläche, die P mit dem Perihelpunkt und dem Mittelpunkt einschließt ist

$$\frac{p}{2\pi} \cdot \pi \cdot 1^2 = \frac{p}{2}$$

Um nun die Fläche, die P mit dem Fixpunkt und dem Perihelpunkt einschließt zu bekommen, müssen wir die Fläche des Dreiecks zwischen Mittelpunkt, P und Fixpunkt abziehen. Diese Fläche ist

$$A_{Dreieck} = \frac{1}{2} \cdot y' \cdot \varepsilon$$

Daraus bekommen wir nun unsere Fläche

$$\tilde{A} = \frac{p - y' \cdot \varepsilon}{2}$$

welche wir mit ab multiplizieren müssen, um die Transformation rückgängig zu machen, daraus folgt:

$$A = ab \cdot \frac{p - y' \cdot \varepsilon}{2}$$

Bestimmung von p:

$$\tan p = \frac{y'}{x'} = \frac{a \cdot r \cdot \sin\theta}{b \cdot (\mathrm{r} \cdot \cos\theta + \varepsilon \cdot a)}$$

Nun können wir p und somit die Fläche berechnen, um dann auf die Zeit zu kommen:

Berechnung p:

$$\tan p = \frac{a_{E\to J} \cdot r_J \cdot \sin\theta_J}{b_{E\to J} \cdot (r_J \cdot \cos\theta_J + \varepsilon_{E\to J} \cdot a_{E\to J})} = \frac{7{,}5 \cdot 10^{11} \cdot 7{,}8 \cdot 10^{11} \cdot \sin 145}{4{,}5 \cdot 10^{11}(7{,}8 \cdot 10^{11} \cdot \cos 145 + 0{,}8 \cdot 7{,}5 \cdot 10^{11})} = -19$$

Daraus folgt, dass

$$p = 93° = 1{,}62\, rad$$

Nun können wir die Fläche A berechnen:

$$A = a_{E\to J} \cdot b_{E\to J} \cdot \frac{p - \sin p \cdot \varepsilon_{E\to J}}{2} = 7{,}5 \cdot 10^{11} \cdot 4{,}5 \cdot 10^{11} \cdot \frac{1{,}62 - \sin 1{,}62 \cdot 0{,}8}{2} = 1{,}3 \cdot 10^{23} m^2$$

Ermittlung von h aus den Bahndaten:

$$h_{E\to J} = \sqrt{a_{E\to J}(1 - \varepsilon_{E\to J}{}^2) G \cdot M_S} = \sqrt{7{,}5 \cdot 10^{11}(1 - 0{,}8^2) \cdot 6{,}7 \cdot 10^{-11} \cdot 2 \cdot 10^{30}} = 6 \cdot 10^{15} \frac{m^2}{s}$$

<u>Formel für Flächensatz</u>

Die Fläche, die der Ortsvektor pro Zeit überschreitet, kann man mit immer kleiner werdenden, schmalen Dreiecken (Ortsvektor und Ortsänderung in der Zeit als Seitenvektoren) beschreiben:

$$\partial A = \frac{\partial A}{\partial t} = \frac{1}{2} \cdot \left|\vec{r} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial t}\right|$$

aus $h = \vec{r}^2 \cdot \omega = \left|\vec{r} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial t}\right| \Rightarrow \partial A = \frac{1}{2} \cdot h$

durch integrieren nach der Zeit können wir die Fläche bestimmen:

$$A = \int_0^t \frac{1}{2} \cdot h\, dt = \frac{h \cdot t}{2} \Rightarrow t = \frac{2A}{h}$$

Durch einsetzen der vorhandenen Werte erhalten wir die Zeit, die der Satellit braucht, um von der Erde zum Jupiter zu fliegen:

$$t_{E\to J} = \frac{2 \cdot A}{h_{E\to J}} = \frac{2 \cdot 1{,}3 \cdot 10^{23}}{6 \cdot 10^{15}} = 4.33 \cdot 10^{7} s = 502\ Tage$$

Um die Werte zu überprüfen, haben wir sie mit den Daten der NASA, bei dem Voyager 1 Flug zum Saturn über den Jupiter, verglichen. Die wahren Werte liegen bei 560 Tage.

3.2.3 Begegnung mit Jupiter

Hierfür betrachten wir wieder die beiden Systeme 1 und 2. Die Geschwindigkeit wenn der Satelli auf den Jupiter trifft ist:

$$v_1 = \sqrt{G \cdot M_S \cdot (\frac{2}{r_J} - \frac{1}{a_{E\to J}})} = \sqrt{6{,}7 \cdot 10^{-11} \cdot 2 \cdot 10^{30} \cdot (\frac{2}{7{,}8 \cdot 10^{11}} - \frac{1}{7{,}5 \cdot 10^{11}})} = 12{,}8 \frac{km}{s}$$

Zur Berechnung der Geschwindigkeit des Jupiters verwenden wir die analoge Formel wie zur Berechnung der Geschwindigkeit der Erde:

$$V = \sqrt{G \cdot M_S \cdot \frac{1}{r_J}} = \sqrt{6{,}7 \cdot 10^{-11} \cdot 2 \cdot 10^{30} \cdot \frac{1}{7{,}8 \cdot 10^{11}}} = 13{,}1 \frac{km}{s}$$

Anders als beim Start des Satelliten, beschreibt das System 2 den Weg des Satelliten auf einer Hyperbelbahn um den Jupiter.

Daten:

$a_J = -10{,}9 \cdot 10^{8} m$

$M_J = 1{,}9 \cdot 10^{27} kg$

$a_{J\to S} = -5{,}9 \cdot 10^{11} m$

$\varepsilon_{J\to S} = 1{,}28$

$r_J = 7{,}8 \cdot 10^{11} m$

$r_S = 14 \cdot 10^{11} m$

Nun können wir uns wieder $\overrightarrow{v_2}$, was nun die asymptotische Geschwindigkeit im Unendlichen ist, berechnen:

$$\overrightarrow{v_2} = \overrightarrow{v'_2} = \lim_{r\to\infty} \sqrt{GM_J(\frac{2}{r} - \frac{1}{a_J})} = \sqrt{-GM_J \frac{1}{a_J}} = \sqrt{-6{,}7 \cdot 10^{-11} \cdot 1{,}9 \cdot 10^{27} \frac{1}{-10{,}9 \cdot 10^{8}}} = 10{,}8 \frac{km}{s}$$

Um die Geschwindigkeit des Satelliten im System 1 nach der Begegnung mit dem Jupiter zu berechnen verwenden wir wieder die selbe Formel, die wir schon beim Start des Satelliten verwendet haben:

$$v_1{}' = \sqrt{GM_S\left(\frac{2}{r_J} - \frac{1}{a_{J\to S}}\right)} = \sqrt{-6{,}7 \cdot 10^{-11} \cdot 2{,}0 \cdot 10^{30} \cdot (\frac{2}{7{,}8 \cdot 10^{11}} - \frac{1}{-5{,}9 \cdot 10^{11}})} = 23{,}9 \frac{km}{s}$$

3.2.4 Flug von Jupiter zu Saturn

Der Satellit bewegt sich vom Jupiter bis Saturn auf einer Hyperbelbahn, welche wir wieder in Polarkoordinatenform betrachten.

$$b_{J\to S} = a_{J\to S} \cdot \sqrt{\left|1 - \varepsilon_{J\to S}{}^2\right|} = -5{,}9 \cdot 10^{11} \cdot \sqrt{|1 - 1{,}28^2|} = -9{,}6 \cdot 10^{11} m$$

Berechnung der Bogenlänge der Hyperbel von Jupiter bis Saturn:

$$s = \int_\alpha^\beta |\gamma'(t)| dt$$

Wobei

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \frac{a}{\cos(t)} \\ btan(t) \end{pmatrix}$$

die Hyperbel in Polarkoordinaten beschreibt und α und β Startpunkt (Jupiter) und Endpunkt (Saturn) auf der Hyperbel sind.

$$\Rightarrow s = \int_{\alpha}^{\beta} \left| \begin{pmatrix} \frac{\mathrm{a} \cdot \sin(t)}{cos^2(t)} \\ \frac{b}{cos^2(t)} \end{pmatrix} \right| dt = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{a^2(\sin(t)\cos(t))^2 + (bcos^2(t))^2} dt = 11{,}309 \cdot 10^{11} m$$

Und durch einsetzten erhalten wir die Zeit:

$$s = v \cdot t \Leftrightarrow \frac{s}{v} = t$$

Durch einsetzten von s erhalten wir:

$$t_{J \to S} = \frac{11{,}309 \cdot 10^{11}}{23{,}9 \cdot 10^3} = 4{,}732 \cdot 10^7 sec \xRightarrow{\div 84600\ f\ddot{u}r\ Tage} 559\ Tage$$

3.2.5 Insgesamte Flugdauer

Unser Satellit braucht also insgesamt $t_{E \to J} + t_{J \to S} = 502 + 559 = 1061$ Tage, um von der Erde über den Jupiter zum Saturn zu fliegen.

Wenn man unsere berechneten Daten mit den tatsächlichen Daten des Voyager I Satelliten der NASA vergleicht (1164 Tage), kommt man nur auf einen Unterschied von 103 Tagen.

4. Vergleich mit einem direkten Flug von der Erde bis zum Saturn

Der beste Weg, um von der Erde zum Saturn zu fliegen ist eine Hohmannbahn, das ist eine Ellipse mit der Erde und dem Saturn an den gegenüberliegenden Scheiteln. Die Sonne ist dabei der Brennpunkt.

Daten:

$r_S = 14 \cdot 10^{11} m$

$\varepsilon_{E\to S} = 0{,}8$

$a_{E\to S} = \frac{1}{2}(r_E + r_S) = \frac{1}{2}(1{,}5 \cdot 10^{11} + 14 \cdot 10^{11}) = 7{,}8 \cdot 10^{11} m$

Ermittlung der Startgeschwindigkeit:

$$v_{Start} = \sqrt{GM_{Sonne}(\frac{2}{r_E} - \frac{1}{a_{E\to S}})} = \sqrt{6{,}7 \cdot 10^{-11} \cdot 2 \cdot 10^{30} \cdot (\frac{2}{1{,}5 \cdot 10^{11}} - \frac{1}{7{,}8 \cdot 10^{11}})} = 40 \frac{km}{s}$$

$$b_{E\to S} = a_{E\to S} \cdot \sqrt{1 - \varepsilon_{E\to S}{}^2} = 7{,}8 \cdot 10^{11} \cdot \sqrt{1 - 0{,}8^2} = 4{,}7 \cdot 10^{11} m$$

$$h_{E\to S} = \sqrt{a_{E\to S}(1 - \varepsilon_{E\to S}{}^2) GM_{Sonne}} = \sqrt{7{,}8 \cdot 10^{11}(1 - 0{,}8^2) 6{,}7 \cdot 10^{-11} \cdot 2 \cdot 10^{30}} = 6{,}1 \cdot 10^{15} \frac{m^2}{s}$$

Die Fläche, die überstrichen wird, ist die Hälfte der gesamten Ellipsenfläche, also

$$A = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot a_{E\to S} \cdot b_{E\to S} = \frac{1}{2} \cdot 7{,}8 \cdot 10^{11} \cdot 4{,}7 \cdot 10^{11} = 5{,}8 \cdot 10^{23} m^2$$

$$\Rightarrow t_{E\to S} = \frac{2 \cdot A}{h_{E\to S}} = \frac{2 \cdot 5{,}8 \cdot 10^{23}}{6{,}1 \cdot 10^{15}} = 19{,}0 \cdot 10^7 s = 2200\, Tage$$

Das heißt der Satellit würde auf direkter Bahn um 1139 Tage langsamer sein, das heißt durch den Umweg über den Jupiter ist der Satellit fast doppelt so schnell.