Ampelregelung im Straßenverkehr
Mathematische Modellierung I

Ragger Lena und Kotzent Martina

30. Juni 2013

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Betrachtet man den Straßenverkehr als ganzes System, dann ist festzuhalten, dass dieses System nur existieren kann, wenn darin entsprechende Regeln aufgestellt sind. Um z.B. den Verkehr an Kreuzungen in richtige Bahnen zu lenken, sind dort als Hilfsmitteln Verkehrsampeln installiert. Jeder Verkehrsteilnehmer hält sich an die Regeln, d.h. z.B. bei Rot muss man stehenbleiben. Manchmal kommt es aber vor, dass man an der Ampel bei Rot steht und die Dauer der Rotphase einfach nicht enden will. Noch dazu gibt es auf der Querstrasse keinen Verkehr und die Ampel bleibt auf Rot und will den Weg, sprich die Grünphase, nicht freigeben. Daher wollen wir mit diesem Projekt das Thema 'Ampelregelung' genauer betrachten.

1.1 Fragestellung

Wir möchten mit diesem Pojekt folgende Frage beantworten:

Frage. Wie lang sollten die Ampelphasen an einer stark befahrenen Straße sein, damit sich während der Grünphase der Stau vor der Ampel vollständig abbaut?

2 Symbolische Beschreibung des Modells

Bei der Modellbildung haben wir uns für ein Bottom - Up - Vorgehen entschieden.

2.1 Allgemeine Bestimmungen

Zur Durchführung unseres Projekts müssen wir im Voraus einige Annahmen treffen, um auch die Komplexität des Themas ein wenig zu erleichtern.

2.1.1 Annahmen

- Überholvorgänge werden ignoriert.
- Wir werden eine einspurige Straße betrachten (Modellierung durch die reelle Zahlenachse).
- Autos werden nicht als einzelne Fahrzeuge modelliert, sondern wir werden eine Fahzeugdichte einführen.

2.1.2 Mathematische Begriffe

Wie im oberen Abschnitt erwähnt wurde, benötigen wir eine Fahrzeugdichte $\rho(t, x)$ zur Zeit $t \geq 0$ am Ort $x \in \mathbb{R}$. Dann lautet die Anzahl der Fahrzeuge im Intervall (a, b) zur Zeit t

$$\int_a^b \rho(x,t)dx.$$

Die Geschwindigkeit der Autos in (x, t) sei gegeben durch die Größe $v(x, t)$. Die Anzahl der Fahrzeuge, die den Ort x zur Zeit t queren, lautet

$$\rho(x,t)v(x,t).$$

2.2 Mathematische Formulierung

Wir benötigen eine Bewegungsgleichung für die Fahrzeugdichte ρ. Die Anzahl der Autos in (a, b) ändert sich zeitlich gemäß der Fahrzeugzahl, die in das Intervall (a, b) hinein- oder hinausfahren. Daher erhalten wir

$$\frac{d}{dt}\int_a^b \rho(x,t)dx = \rho(a,t)v(a,t) - \rho(b,t)v(b,t) = -\int_a^b \frac{\partial(\rho, v)}{\partial x}(x,t)dx.$$

Daraus folgt die Erhaltungsgleichung

$$\rho_t + (\rho v)_x = 0, \qquad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \tag{1}$$

mit der Anfangsbedingung

$$\rho(x,0) = \rho_0(x), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Wegen

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}} \rho(x,t)dx = -\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial(\rho, v)}{\partial x}(x,t)dx = 0 \quad \forall t > 0$$

bleibt die Anzahl der Fahrzeuge erhalten.

Wir wollen nun eine Gleichung für die Geschwindigkeit v finden. Dafür sei angenommen, dass die Geschwindigkeit v nur von der Fahrzeugdichte ρ abhängt und folgenden Bedingungen genügt:

- v ist eine monoton fallende Funktion, denn bei dichterem Verkehr fahren die Autos langsamer.
- Auf einer leeren Straßen fahren die Autos mit der höchst zulässigen Geschwindigkeit: $v(0) = v_{max}$.
- Unter einem gewissen Mindestabstand steht die Autokolonne: $v(\rho_{max}) = 0$.

Wir haben folgendes einfache Modell gefunden, welches eine lineare Beziehung zwischen ρ und v darstellt:

$$v(\rho) = v_{max}\left(1 - \frac{\rho}{\rho_{max}}\right), \qquad 0 \leq \rho \leq \rho_{max}.$$

Wir setzen diese Beziehung in (1) ein und erhalten daraus

$$\rho_t + \left[v_{max}\rho\left(1 - \frac{\rho}{\rho_{max}}\right)\right]_x = 0, \qquad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0. \tag{2}$$

2.3 Umformulierung

Zur Vereinfachung des Problems führen wir für das obige Modell eine Dimensionsanalyse durch. Wir führen die dimensionslosen Größen

$$\tilde{x} = \frac{x}{L}, \quad \tilde{t} = \frac{t}{\tau}, \quad u = 1 - \frac{2\rho}{\rho_{max}}$$

ein, wobei L und τ charakteristische Längen- bzw. Zeitmaßstäbe sind, sodass $L/\tau = v_{max}$.
Dimensionslos umgeschrieben erhalten wir

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{1}{\tau}\frac{\partial}{\partial \tilde{t}}\left[\frac{\rho_{max}}{2}(1-u)\right] = -\frac{\rho_{max}}{2\tau}\frac{\partial u}{\partial \tilde{t}},$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[v_{max}\rho\left(1 - \frac{\rho}{\rho_{max}}\right)\right] = \frac{1}{L}\frac{\partial}{\partial \tilde{x}}\left[v_{max}\frac{\rho_{max}}{2}(1-u)\frac{1}{2}(1+u)\right] = -\frac{\rho_{max}}{2\tau}\frac{\partial x}{\partial \tilde{x}}\left(\frac{u^2}{2}\right).$$

Mit (x,t) anstatt $(\tilde{x},\tilde{t})$ können wir (2) schreiben als

$$\begin{aligned} u_t + \left(\frac{u^2}{2}\right)_x &= 0\,, \quad x \in \mathbb{R}\,, \quad t > 0, \\ u(x,0) &= u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}\,, \end{aligned} \tag{3}$$

wobei $u_0 = 1 - 2\frac{\rho_0}{\rho_{max}}$.
Ist die Straße leer ($\rho = 0$), folgt $u = 1$; in einem Stau ($\rho = \rho_{max}$) gilt $u = -1$.

Wir lösen nun die Gleichung (3) mit dem speziellen Anfangswert

$$u_0(x) = \begin{cases} 1 & : x < 0, \\ 1 - x & : 0 \leq x < 1, \\ 0 & : x \geq 1. \end{cases}$$

Das bedeutet, dass zu Beginn keine Autos in $x < 0$ vorhanden sind und in $x > 1$ ein moderater Verkehr herrscht.

Wir verwenden nun die Methode der Charakteristen. Die Charakteristiken haben die Form $x = F'(u_0(\tau))t + \tau$. Somit erhalten wir mit $F' = u$:

$$\begin{aligned} \tau < 0: &\quad x = t + \tau, \\ 0 \leq \tau < 1: &\quad x = \tau, \\ \tau \geq 1: &\quad x = (1-\tau)t + \tau. \end{aligned}$$

Daraus folgt die Lösung für (3) mit

$$u(x,t) = \begin{cases} 1 & : x < t, \\ \frac{1-x}{1-t} & : t \leq x < 1, \\ 0 & : x \geq 1. \end{cases}$$

mit $x \in \mathbb{R}$, $t < 1$. Diese Lösung ist im Punkt $t = 1$ unstetig. Die Fahrzeuge, die sich im Intervall $(0,1)$ befinden, fahren von links nach rechts, bis keine Autos mehr übrig bleiben. Wenn $u = 1$ kommen auch keine Fahrzeuge nach.

2.3.1 Wiederholung einiger Grundlagen

Wir betrachten nun unstetige Anfangsdaten

$$u_0(x) = \begin{cases} u_l & : \quad x < 0, \\ u_r & : \quad x \geq 0. \end{cases}$$

Fall 1: $u_l > u_r$
Die Fahrzeugdichte in $x > 0$ ist größer als in $x < 0$. Es wird sich eine Staulinie bilden bzw. eine Unstetigkeitskurve $x = \sigma(t)$. Es ist dann

$$u_1(x,t) = \begin{cases} u_l & : \quad x < st, \\ u_r & : \quad x \geq st. \end{cases}$$

eine schwache Lösung von (3), wobei $s = \sigma'(t)$ die Schockgeschwindikeit ist. Mithilfe der Rankine-Hugoniot Bedingung ergibt sich für die Schockgeschwindigkeit s:

$$s = \frac{F(u_l) - F(u_r)}{u_l - u_r} \quad \text{bzw.} \quad s = \frac{1}{2}(u_l + u_r)$$

in unserem Fall.

Nun betrachten wir die Situation, in der in $x < 0$ die Fahrzeugdichte moderat und in $x > 0$ maximal ist, d.h. $u_l = 0$ bzw. $u_r = -1$. Die Schockgeschwindigkeit ist dann gegeben durch $s = -\frac{1}{2}$, d.h. die Staulinie bewegt sich nach links, wodurch sich der Stau vergrößert.

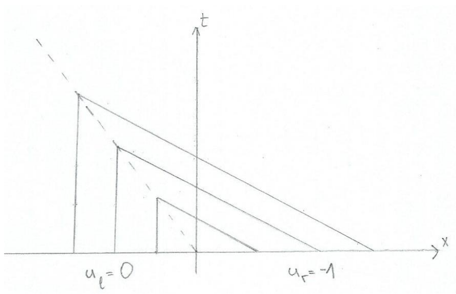

Abbildung 1: Charakteristiken für u_l und u_r

<u>Fall 2:</u> $u_l < u_r$
Auch hier gilt die obige Lösung, aber es ist auch

$$u_2(x,t) = \begin{cases} u_l & : \quad x < u_l t, \\ x/t & : \quad u_l \leq x \leq u_r t \\ u_r & : \quad x > u_r t. \end{cases}$$

eine Lösung.
In unserem Fall ist u_2 jedoch physikalisch betrachtet die relevante Lösung, die sogenannte Verdünnungswelle. Die Voraussetzung $u_l < u_r$ heißt nichts anderes als, dass in $x < 0$ mehr Autos sind als in $x > 0$.

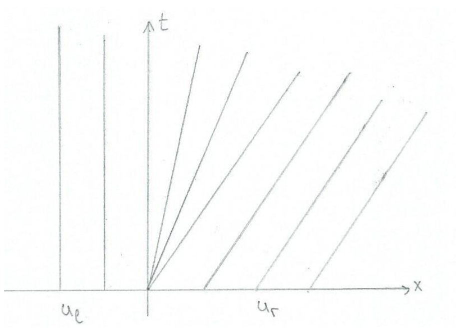

Abbildung 2: Charakteristiken für die Lösung u_2 (Verdünnungswelle)

3 Lösung

3.1 Herleitung der Lösung

Wir können nun unsere Frage beantworten. Sei also eine eindimensionale Straße gegeben, die zur Zeit $t = 0$ im Intervall $(-\infty, 0)$ mit Fahrzeugen der Dichte $\overline{\rho} > 0$ gefüllt ist. An der Stelle $x = 0$ befinde sich eine rote

Ampel. Hinter der Ampel sei die Straße leer. Die Ampelphase habe die Dauer $\omega > 0$. Zur Bearbeitung der Lösung verwenden wir die Gleichung (3) mit der skalierten Bedingung $\overline{u} = 1 - 2\frac{\overline{\rho}}{\rho_{max}}$. Vorab können wir sagen, dass sich bis zur Zeit $t = \omega$ ein Stau vor der Ampel bilden wird, der sich aber während der Grünphase ($t > \omega$) abbauen wird.

<u>Schritt 1:</u> Rotphase ($0 \leq t \leq \omega$).
Die Anfangsfunktion $u_0 = \overline{u}, x < 0$ und die Randbedingug $u(0,t) = -1$, welche die Ampel simuliert, werden benötigt, um (3) für $x < 0$ zu lösen.
Die Lösung lautet nach Fall 1:

$$u(x,t) = \begin{cases} \overline{u} & : \quad x < st \\ -1 & : x \geq st \end{cases}$$

mit $x < 0$, $0 < t < \omega$.
Die Schockgeschwindigkeit ist gegeben durch

$$s = \frac{1}{2}(u_l + u_r) = \frac{\overline{u} - 1}{2}.$$

Die Lösung für $x > 0$ lautet $u(x,t) = 1$.

<u>Schritt 2:</u> Grünphase ($t > \omega$).
Für die Lösung der Burgers-Gleichung (3) in $\mathbb{R}$ nehmen wir als Anfangsbedingnugen $u_0 = u(x,\omega)$, d.h. die Lösung von Schritt 1, also

$$u(x,\omega) = \begin{cases} \overline{u} & : \quad x < s\omega \\ -1 & : s\omega \leq x \geq 0 \\ 1 & : x > 0 \end{cases}.$$

Es entwickelt sich ein Schock $\sigma(t) = st, t > \omega$ mit Geschwindigkeit
$s = (\overline{u} - 1)/2 < 0$, wegen $u_l = \overline{u} > -1 = u_r$.
Weiters entsteht eine Verdünnungswelle aufgrund der Unstetigkeit bei $x = 0$, weil $u_l = -1 < 1 = u_r$ ist.
Man erhält somit die Lösung

$$u(x,t) = \begin{cases} \overline{u} & : \quad x < st \\ -1 & : st \leq x < \omega - t \\ \frac{x}{t-\omega} & : \omega - t \leq x < t - \omega \\ 1 & : x \geq t - \omega \end{cases}$$

für $x \in \mathbb{R}$, $t > \omega$.
Die Lösung ist nur sinnvoll solange $st < \omega - t$ bzw. $t < t_1 := \frac{\omega}{s+1} = \frac{2\omega}{\overline{u}+1}$.

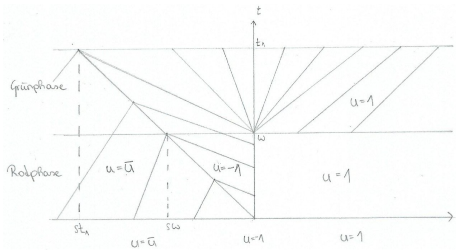

Abbildung 3: Charakteristiken für das Ampelproblem

<u>Schritt 3:</u> Grünphase ($t > t_1$). Es stellt sich jetzt noch eine Frage: Was geschieht mit dem Schock für $t > t_1$?
Um dies beantworten zu können, benötigen wir die verallgemeinerte Rankine-Hugoniot-Bedingung:

$$s(t) = \sigma'(t) = \frac{1}{2}(u(\sigma(t)_+, t) + u(\sigma(t)_-, t)) = \frac{1}{2}(\frac{\sigma(t)}{t-\omega} + \overline{u}),$$

für $t > t_1$. Man sieht, dass dies eine lineare Differentialgleichung für $\sigma(t)$ mit dem Anfangswert

$$\sigma(t_1) = st_1 = \omega\frac{\overline{u}-1}{\overline{u}+1}$$

ist.
Die Lösung dazu lautet

$$\sigma(t) = \overline{u}(t-\omega) - \sqrt{t-\omega}\sqrt{\omega(1-\overline{u}^2)}\ ,\ t \geq t_1.$$

Wir unterscheiden nun zwei Fälle.
<u>Fall 1:</u> Wenn $\overline{u} \leq 0$ oder $\overline{\rho} \geq \rho_{max}/2$, gilt $\sigma(t) \to -\infty$ für $t \to \infty$, d.h. es gibt einen Schock für alle Zeiten, der sich in x-Richtung links mit Geschwindigkeit $\sigma'(t) \to \overline{u}$ ($t \to \infty$) immer weiterbildet. Die Autofahrer bemerken den Schock schon weit vor der Ampel, obwohl die Unstetigkeitsstufe für größere Zeiten immer kleiner wird.

<u>Fall 2:</u> $\overline{u} > 0$ oder $\overline{\rho} < \rho_{max}/2$. Hier bewegt sich der Schock nach rechts. Wir nehmen an, dass die Ampel nach $t = 2\omega$ wieder von Grün auf Rot umschaltet. Es stellt sich uns nun die Frage: Wie lang muss die Ampel auf Grün geschaltet sein, damit sich der Schock vollständig abbaut? Dafür müssen wir die Bedingung $t_2 \leq 2\omega$ stellen, wobei t_2 eine Nullstelle von σ ist. $\sigma(t_2) = 0$ hat die eindeutige Lösung $t_2 = \omega/\overline{u}^2$.
$\Rightarrow t_2 \leq 2\omega \Leftrightarrow \overline{u} \geq 1/\sqrt{2}$ bzw. in den Ausgangsvariablen

$$\overline{\rho} \leq \frac{\rho_{max}}{2}(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}).$$

Wenn $\overline{\rho}$ diese Bedingung erfüllt, so wird sich der Schock vor der Ampel völlig während der Grünphase auflösen. Eine sehr erstaunliche Beobachtung ist, dass die maximale Verkehrsdicht $\overline{\rho}$ unabhängig von der Dauer der Ampelphase ist.

3.2 Zusammenfassung

Mihilfe unserer Ergebnisse lässt sich nun unsere zu Beginn gestellte Frage nochmals allgemein beantworten:

1. $\overline{\rho} \geq \rho_{max}/2$: Es reicht eine Rotphase aus, um den Verkehr dauerhaft zu stören.
2. $(1-1/\sqrt{2})\rho_{max}/2 < \overline{\rho} < \rho_{max}/2$: Die Rotphase wirkt sich mit der Zeit auf die Verkehrsdichte aus, würde jedoch beim Entfernen der Ampel wieder verschwinden.
3. $\overline{\rho} \leq (1-1/\sqrt{2})\rho_{max}/2$: Bevor die Grünphase endet, kehrt die Schockfront wieder zur Ampel zurück und der Einfluss der Rotphase ist damit verschwunden.