

# VU Mathematische Modellierung 1, Projekt: Modellierung eines Verdunstungskühlschranks

Julia Hauser und Anja Janischewski

30.06.2013

## Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einführung</b>	<b>2</b>
1.1	Ziel des Projekts . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Vereinfachung des Systems</b>	<b>3</b>
<b>3</b>	<b>Physikalische Hintergründe</b>	<b>3</b>
3.1	Erster Hauptsatz für offene Systeme . . . . .	3
3.2	Wärme . . . . .	4
3.3	Wärmeübergangskoeffizient . . . . .	4
3.4	Spezifische Wärmekapazität . . . . .	4
3.5	Innere Energie . . . . .	5
3.6	Spezifische Enthalpie . . . . .	5
<b>4</b>	<b>Das System</b>	<b>5</b>
4.1	Temperaturabhängigkeit der Verdampfungsenthalpie . . . . .	6
<b>5</b>	<b>Gleichgewichtslagen des Systems und qualitative Untersuchung</b>	<b>7</b>
5.1	Berechnung der Gleichgewichtslage . . . . .	7
5.2	Qualitative Untersuchung der Gleichgewichtslage . . . . .	8
<b>6</b>	<b>Simulation mit Matlab</b>	<b>10</b>
6.1	Bestimmung der spezifischen Verdampfungsenthalpie . . . . .	10
6.2	Simulation 1 . . . . .	11
6.3	Simulation 2 . . . . .	12
6.4	Simulation 3 . . . . .	13
<b>7</b>	<b>Zusammenfassung und Bewertung des Modells</b>	<b>14</b>
<b>8</b>	<b>Mögliche Verbesserungen des Modells</b>	<b>15</b>

# 1 Einführung

In diesem Projekt wird ein Modell für einen einfachen Verdunstungskühlschrank entwickelt. Der "Kühlschrank" besteht aus einem umgedrehten Tontopf auf dem ein Wasserfilm liegt. Dieses Wasser verdunstet und entzieht dabei dem Topf Wärme, dadurch kühlt sich das Innere des Topfes ab. Das betrachtete offene System wird auf die Komponenten Innenluft im Tontopf, die Tonwand und den Wasserfilm auf dem Topf reduziert. Dabei werden drei Teilsysteme betrachtet. Das erste System ist die Innenluft begrenzt durch die Wand. Das zweite System ist die Wand begrenzt durch das Wasser und die Innenluft. Das letzte System besteht aus dem Wasser mit der Wand und der Außenluft als Grenzen, wobei die Wassermenge, die im dritten System durch Verdampfung entweicht, durch einen Zufluss von Wasser ersetzt wird.

Größen des Systems:

- $T_A$  Außentemperatur der Luft in Kelvin
- $T_I$  Innentemperatur der Luft in Kelvin
- $T_W$  Temperatur in der Wand in Kelvin
- $T_{H_2O}$  Temperatur des Wasserfilms in Kelvin
- $M$  Masse an Wasser, die pro Zeiteinheit verdunstet in  $\text{kg/s}$
- $Q_A$  Wärme, die von der Außenluft in das Wasser transportiert wird in J
- $Q_I$  Wärme, die von der Innenluft in die Wand transportiert wird in J
- $Q_W$  Wärme, die von der Wand in das Wasser transportiert wird in J
- $t$  Zeit in s
- $\Delta h_V$  spezifische Verdampfungsenthalpie in  $\text{J/kg}$

Koeffizienten/Konstanten im System:

- $\alpha_A$  Wärmeübergangskoeffizient außen (Luft zu Wasser) in  $\text{kg/s}^3\text{K}$
- $\alpha_I$  Wärmeübergangskoeffizient innen (Wand zur Innenluft) in  $\text{kg/s}^3\text{K}$
- $\alpha_W$  Wärmeübergangskoeffizient Wasser zu Topfwand in  $\text{kg/s}^3\text{K}$
- $c_{H_2O}$  spezifische Wärmekapazität des Wassers in  $\text{J/kgK}$
- $c_I$  spezifische Wärmekapazität der Innenluft in  $\text{J/kgK}$
- $c_W$  spezifische Wärmekapazität der Wand in  $\text{J/kgK}$
- $m_I$  Masse der Innenluft in kg
- $m_W$  Masse der Wand in kg
- $m_{H_2O}$  Masse des Wassers in kg

- $A_{H_2O}$       Oberfläche des Wassers in  $m^2$
- $A_I$             Oberfläche der Inneres der Topfwand in  $m^2$
- $A_W$             Oberfläche der Wand in  $m^2$
- $V$               Volumen Innenluft in  $m^3$

## 1.1 Ziel des Projekts

Das Ziel dieses Projekts ist es, den Temperaturverlauf im Inneren des Topfes zu simulieren. Die Fragen, die sich dabei stellen sind:

- Gibt es ein Gleichgewicht?
- Welches Gleichgewicht stellt sich ein?
- Von welchen Parametern ist die Gleichgewichtstemperatur im Inneren des Topfes abhängig?

## 2 Vereinfachung des Systems

Um dieses Modell mit den Mitteln, die uns im Moment zu Verfügung stehen, berechnen können, haben wir das System etwas vereinfacht. Wir betrachten nun ein System indem alle Oberflächen gleich groß sind. Diese Fläche wird als  $A$  bezeichnet. Zusätzlich wird die Außentemperatur, der Außendruck und die Wassermenge, die pro Zeiteinheit verdunstet, konstant gesetzt. Damit Letzteres sinnvoll ist, wird angenommen, dass die Sättigung der Luft mit Wasserdampf nicht erreicht wird. Zusätzlich nehmen wir an, dass die Wassermenge, die hinzugefügt wird, die Temperatur des Wassers nicht ändert. Die Effekte durch Wärmeleitung innerhalb der Systeme werden vernachlässigt, indem wir die Dicke der Wand und die Breite des Wassersstreifens auf Null setzen. Zudem ist das Innenvolumen konstant. Dies ist relevant für die Bestimmung der spezifischen Wärmekapazität der Innenluft. Alle drei Teilsysteme (Wasser, Wand und Innenluft) werden als homogen bezüglich Temperatur und allen anderen Stoffeigenschaften betrachtet. Die Temperaturabhängigkeit der Wärmeübergangskoeffizienten und der Wärmekapazitäten werden vernachlässigt. Außerdem findet im Modell kein Wärmeaustausch mit der Umgebung über den Boden des Innenvolumens statt.

## 3 Physikalische Hintergründe

### 3.1 Erster Hauptsatz für offene Systeme

Das Projekt beschäftigt sich hauptsächlich mit dem ersten Hauptsatz der Thermodynamik. Dies ist der Satz über die Energieerhaltung. Es gibt einige Formulierungen und Herleitungen dieses Satzes. Wir beschäftigen uns mit dieser Aussage:

Sei das System offen. Dann ist eine Änderung seiner Gesamtenergie pro Zeitintervall  $\delta t$ , die sich auf die Änderung seiner Inneren Energie  $U$  und seiner äußeren potentiellen und kinetischen Energie  $E_{pot}$  und  $E_{kin}$  verteilt, durch die Summe aus zugeführter Arbeit, zugeführter Wärme und zugeführter Energie durch die Masse, die in das System geleitet wird, gegeben.[2]

$E_{pot}$  und  $E_{kin}$  werden hier zusammengefasst zu  $E_a$ .

- $\delta W_t$  ist die zugeführte technische Arbeit
- $\delta Q_a$  ist die zugeführte Wärme von außen
- $dm_i$  ist die zugeführte Masse
- $dm_i (h_i + e_{ai})$  ist die Energie, die mit  $dm_i$  in das System kommt
- $dE_a$  ist die Erhöhung der äußeren Energie des Systems
- $dU$  ist die Erhöhung der inneren Energie des Systems

Die spezifische Enthalpie ist  $h_i$  und die äußere Energie der eingeschobenen Masse ist  $e_{ai}$ . Somit ergibt sich die Gleichung [1]

$$\delta W_t + \delta Q_a + \sum_i dm_i (h_i + e_{ai}) = dE_a + dU. \quad (1)$$

### 3.2 Wärme

In der Thermodynamik wird Wärme als Energie bezeichnet, die über Systemgrenzen übertragen wird, aber nicht stoffgebunden ist. Diese Übertragung findet statt, wenn Temperaturunterschiede zwischen dem System und seiner Umgebung existieren. Nur unmittelbar an der Systemgrenze hat der Begriff Wärme für diese Erscheinungsform der Energie eine Bedeutung. Außerhalb und innerhalb der Systemgrenze ist diese Energieform nicht mehr registrierbar, sie äußert sich dort als innere Energie.[3]

### 3.3 Wärmeübergangskoeffizient

Der Wärmeübergangskoeffizient  $\alpha$  ist ein Faktor, der die Intensität des Wärmeübergangs an einer Grenzfläche bestimmt. Der Wärmeübergang von einem Stoff zu einem anderen hängt, unter anderem, von diesem Koeffizienten und der Größe der Grenzfläche ab, was man an der Gleichung

$$\frac{dQ}{dt} = \alpha \cdot A \cdot (T_1 - T_2)$$

erkennt. [4]

### 3.4 Spezifische Wärmekapazität

Man bezeichnet die zuzuführende Wärmemenge eines Körpers pro Temperaturänderung als seine Wärmekapazität  $c$ . Sie ist durch die Gleichung

$$c = \frac{dQ}{m \cdot dT}$$

gegeben, wobei  $m$  die Masse ist. [2]

### 3.5 Innere Energie

Die innere Energie  $U$  ist eine physikalische Größe. Sie ist die Fähigkeit des Systems Arbeit zu verrichten. Die Änderung der inneren Energie ist die Summe über die Wärme, die dem System zugeführt wird und der Arbeit, die am System verrichtet wird. [2]

$$\Delta U = \Delta Q + \Delta W$$

### 3.6 Spezifische Enthalpie

Die spezifische Enthalpie  $h$  ist eine Zustandsgröße gegeben durch

$$h = u + p \cdot v.$$

$u$  ist die spezifische innere Energie,  $p$  ist der Druck und  $v$  ist das spezifische Volumen. In diesem Projekt wird mit der spezifischen Verdampfungsenthalpie gearbeitet. Diese Art von Enthalpie ist die Energie, die erforderlich ist um ein Kilogramm einer Substanz vom flüssigen in den gasförmigen Zustand zu transportieren. [1]

## 4 Das System

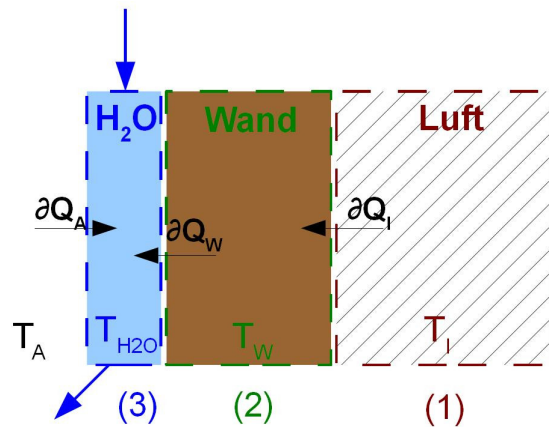


Abbildung 1: Skizze zum Systemmodell

Sei im Folgenden  $U_i$  die innere Energie des Systems  $i$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Betrachte nun zuerst das System (1) (Innenluft). Hier gibt es keine Masse die dem System zugeführt und auch keine Arbeit die verrichtet wird. Außerdem ändert sich die äußere Energie nicht. Somit folgt aus dem 1. Hauptsatz der Thermodynamik, also der Gleichung (1),

$$\begin{aligned} -\frac{dQ_I}{dt} &= \frac{dU_1}{dt} \\ -\alpha_I \cdot A \cdot (T_I - T_W) &= m_L \cdot c_I \cdot \frac{dT_I}{dt}. \end{aligned}$$

Im System (2) (Wand) fällt ebenfalls die verrichtete Arbeit, die äußere Energie und der Massenzufluss weg. Damit bekommen wir durch (1) diese Formel:

$$\begin{aligned}\frac{dQ_I}{dt} - \frac{dQ_W}{dt} &= \frac{dU_2}{dt} \\ \alpha_I \cdot A \cdot (T_I - T_W) - \alpha_W \cdot A \cdot (T_W - T_{H_2O}) &= m_W \cdot c_W \cdot \frac{dT_W}{dt}\end{aligned}$$

Zuletzt betrachten wir System (3) (Wasser). Hier wird ebenfalls keine Arbeit am System verrichtet und die äußere Energie verändert sich nicht. Allerdings wird die Masse, die im Zeitintervall  $\Delta t$  an Wasser verdunstet, dem System wieder zugeführt. Somit folgt

$$\begin{aligned}\frac{dQ_W}{dt} + \frac{dQ_A}{dt} + \frac{dm_{H_2O_g}}{dt} \cdot \Delta h_V &= \frac{dU_3}{dt} \\ \alpha_W \cdot A \cdot (T_W - T_{H_2O}) + \alpha_A \cdot A \cdot (T_A - T_{H_2O}) + \frac{dm_{H_2O_g}}{dt} \cdot \Delta h_V &= m_{H_2O} \cdot c_{H_2O} \cdot \frac{dT_{H_2O}}{dt}\end{aligned}$$

Also erhalten wir ein lineares System von drei gewöhnlichen Differentialgleichungen:

$$\frac{dT_I}{dt} = \frac{1}{m_I \cdot c_I} \cdot \alpha_I \cdot A (T_W - T_I) \quad (2)$$

$$\frac{dT_W}{dt} = \frac{1}{m_W \cdot c_W} \cdot \alpha_I \cdot A (T_I - T_W) + \frac{1}{m_W \cdot c_W} \cdot \alpha_W \cdot A (T_{H_2O} - T_W) \quad (3)$$

$$\begin{aligned}\frac{dT_{H_2O}}{dt} &= \frac{1}{m_{H_2O} \cdot c_{H_2O}} \cdot \alpha_W \cdot A (T_W - T_{H_2O}) + \frac{1}{m_{H_2O} \cdot c_{H_2O}} \cdot \alpha_A \cdot A (T_A - T_{H_2O}) \\ &\quad - \frac{1}{m_{H_2O} \cdot c_{H_2O}} \cdot \Delta h_V \cdot M\end{aligned} \quad (4)$$

Wobei  $\Delta h_V \cdot M$  die Energie ist, die dem Wasser beim Verdunsten entzogen wird, in  $\frac{\text{Joule}}{\text{Zeit}}$ .

## 4.1 Temperaturabhängigkeit der Verdampfungsenthalpie

Verdunstung findet statt, wenn eine Wasseroberfläche an Luft grenzt, die noch nicht mit Wasserdampf gesättigt ist. Dabei müssen die Wassermoleküle zunächst die zwischenmolekularen Kräfte in der flüssigen Phase überwinden. Danach muss der Wasserdampf sich gegen den äußeren Luftdruck ausdehnen. Die dafür benötigte Energie wird dem flüssigen Wasser in Form von Wärme entzogen und als Verdampfungswärme bezeichnet. Bei konstantem Druck bezeichnet man in der Thermodynamik die zugeführte Wärmeenergie auch als Änderung der Enthalpie  $\Delta H$  des Wassers. Die Verdampfungswärme wird daher auch als Verdampfungsenthalpie bezeichnet. Dabei gilt: Je höher die Temperatur des Wassers, desto geringer die benötigte Verdampfungswärme. Hier wird ein linearer Zusammenhang angenommen:

$$\Delta h_V = r_0 - k \cdot T_{H_2O}, \quad k > 0, \quad r_0 \in \mathbb{R},$$

mit  $\Delta h_V$  und  $k$  in  $\text{J/kg}$ ,  $r_0$  in  $\text{J/kgK}$ . Damit folgt für Gleichung (4):

$$\begin{aligned}\frac{dT_{H_2O}}{dt} &= \frac{1}{m_{H_2O} \cdot c_{H_2O}} \cdot \alpha_W \cdot A (T_W - T_{H_2O}) + \frac{1}{m_{H_2O} \cdot c_{H_2O}} \cdot \alpha_A \cdot A (T_A - T_{H_2O}) \\ &\quad - \frac{1}{m_{H_2O} \cdot c_{H_2O}} \cdot (r_0 - k \cdot T_{H_2O}) \cdot M\end{aligned} \quad (5)$$

Das betrachtete System von gewöhnlichen Differentialgleichungen (2),(3) und (5) lässt sich nun umschreiben in Matrixform

$$\frac{dT}{dt} = M \cdot T + g \quad (6)$$

mit

$$T := \begin{pmatrix} T_I \\ T_W \\ T_{H_2O} \end{pmatrix}, \quad g := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{Mr_0}{m_{H_2O}c_{H_2O}} + \frac{\alpha_A A}{m_{H_2O}c_{H_2O}} T_A \end{pmatrix},$$

und

$$M := \begin{pmatrix} \frac{-\alpha_I A}{m_I c_I} & \frac{\alpha_I A}{m_I c_I} & 0 \\ \frac{\alpha_I A}{m_W c_W} - \frac{\alpha_I A}{m_W c_W} & -\frac{\alpha_I A}{m_W c_W} - \frac{\alpha_W A}{m_W c_W} & \frac{\alpha_W A}{m_W c_W} \\ 0 & \frac{\alpha_W A}{m_{H_2O} c_{H_2O}} & \left( -\frac{\alpha_W A}{m_{H_2O} c_{H_2O}} - \frac{\alpha_A A}{m_{H_2O} c_{H_2O}} + \frac{M \cdot k}{m_{H_2O} c_{H_2O}} \right) \end{pmatrix}.$$

## 5 Gleichgewichtslagen des Systems und qualitative Untersuchung

Im Folgenden werden mögliche Gleichgewichtslagen für das Modell berechnet. Anschließend werden diese auf Stabilität untersucht.

### 5.1 Berechnung der Gleichgewichtslage

Aus mathematischer Sicht besitzt das System (6) genau dann ein Gleichgewicht, wenn  $\frac{dT}{dt} = 0$  gilt, also

$$0 = M \cdot T + g.$$

Mit (2),(3) und (5) ist  $(T_I, T_W, T_{H_2O})$  genau dann ein Gleichgewicht, wenn gilt

$$\begin{aligned} \alpha_I \cdot A (T_W - T_I) &= 0 \\ \alpha_I \cdot A (T_I - T_W) + \alpha_W \cdot A (T_{H_2O} - T_W) &= 0 \\ \alpha_W \cdot A (T_W - T_{H_2O}) + \alpha_A \cdot A (T_A - T_{H_2O}) - (r_0 - k \cdot T_{H_2O}) \cdot M &= 0. \end{aligned}$$

Dies gilt genau dann wenn

$$\begin{aligned} T_I = T_W &= T_{H_2O} \quad \text{und} \\ \alpha_A \cdot A (T_A - T_{H_2O}) &= (r_0 - k \cdot T_{H_2O}) \cdot M \end{aligned}$$

gilt. Also

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \quad T_I = T_W &= T_{H_2O} \quad \text{und} \\ (\alpha_A \cdot A - k \cdot M) T_{H_2O} &= \alpha_A \cdot A \cdot T_A - r_0 \cdot M. \end{aligned} \quad (7)$$

Damit erhalten wir zwei verschiedenartige Gleichgewichte:

1)

$$T_I = T_W = T_{H_2O} = \frac{\alpha_A \cdot A \cdot T_A - r_0 \cdot M}{\alpha_A \cdot A - k \cdot M}, \quad (8)$$

für  $(\alpha_A \cdot A - k \cdot M) \neq 0$  und

2)

$$T_I = T_W = T_{H_2O} \quad \text{beliebig}, \quad (9)$$

für  $(\alpha_A \cdot A - k \cdot M) = 0$ .

## 5.2 Qualitative Untersuchung der Gleichgewichtslage

Für weitere Überlegungen wird eine abkürzende Schreibweise für das System gewählt und eine System-Matrix  $P^{-1}A$  definiert:

$$\begin{aligned} a &:= \alpha_A \cdot A, & b &:= \alpha_W \cdot A, & c &:= \alpha_A \cdot A - k \cdot M, \\ p &:= m_I \cdot c_I, & q &:= m_W \cdot c_W, & s &:= m_{H_2O} \cdot c_{H_2O}, \end{aligned}$$

$$A := \begin{pmatrix} -a & a & 0 \\ a & -a-b & b \\ 0 & b & -b-c \end{pmatrix}, \quad P := \begin{pmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 \\ 0 & 0 & s \end{pmatrix}, \quad b := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -M \cdot r_0 + \alpha \cdot A \cdot T_A \end{pmatrix}.$$

Das System hat dann folgende Gestalt

$$T' = P^{-1} \cdot A \cdot T + P^{-1} \cdot b, \quad (10)$$

wobei  $A$  symmetrisch,  $P$  invertierbar und diagonal ist. Alle Werte  $a, b, p, q, s$  sind positiv. Allerdings müssen für  $c$  Fälle unterschieden werden.

**Fall 1:  $c > 0$**  Im Fall  $c > 0$  also  $\alpha_A \cdot A - M \cdot k > 0$  besitzt das System genau ein Gleichgewicht (8). Es lässt sich zeigen, dass dieses Gleichgewicht lokal asymptotisch stabil ist.

Das charakteristische Polynom von  $A$  lautet

$$\chi_A(\lambda) = \lambda^3 + \lambda^2(2a + 2b + c) + \lambda(3ab + 2ac + bc) + abc.$$

Da  $a, b, c > 0$  kann  $0 \leq \lambda$  nicht Nullstelle von  $\chi_A$  sein.  $A$  ist also symmetrisch negativ definit. Für die Matrix  $P^{-1}A$  und ein  $x \in \mathbb{C}^3$  folgt dann

$$P^{-1}Ax = 0 \quad \Leftrightarrow \quad Ax = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0.$$

Damit ist 0 kein Eigenwert von  $P^{-1}A$ . Da  $P^{-1}A$  schwach diagonal dominant ist, folgt mit dem Satz von Gerschgorin, dass die Realteile aller Eigenwerte von  $P^{-1}A$  echt negativ sind. Damit ist das Gleichgewicht (8) lokal asymptotisch stabil.

**Fall 2:  $c = 0$**  Zunächst eine Bemerkung zu den Eigenwerten: Mit  $c = 0$  hat die Matrix  $A$  den Kern  $\text{span}\{(1, 1, 1)\}$ , wie sich leicht nachrechnen lässt. Es gilt außerdem für ein  $x \in \mathbb{C}^3$  analog wie oben

$$P^{-1}Ax = 0 \quad \Leftrightarrow \quad Ax = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in \text{span}\{(1, 1, 1)\},$$

da  $P$  vollen Rang hat. Damit ist 0 Eigenwert von  $P^{-1}A$ . Da  $P^{-1}A$  auch in diesem Fall schwach diagonaldominant ist, folgt hier mit dem Satz von Gerschgorin für den Spektralradius  $\rho(P^{-1}A)$ :

$$\rho(P^{-1}A) = 0.$$

Nun stellt sich aber die Frage, was die Situation  $c = 0$  physikalisch bedeutet: Falls  $c = 0$ , d.h.  $\alpha_A \cdot A = M \cdot k$  gilt, dann folgt  $\alpha_A \cdot A \cdot T_A = r_0 \cdot M$  nach (7). Dann gilt aber auch

$$\frac{dQ_A}{dt} = \alpha_A \cdot A(T_A - T_{H_2O}) = (r_0 - k \cdot T_{H_2O})M$$



für beliebige  $T_{H_2O}$ . Die linke Seite beschreibt den Wärmefluss durch die Oberfläche. Wiederum ist die rechte Seite der durch die Verdunstung verursachte Energiefluss durch die Wasseroberfläche. Es folgt also, dass die Energieflüsse an der Oberfläche zwischen Außenluft und Wasser unabhängig von der Wassertemperatur sich gegenseitig aufheben. In dieser Situation ist kein Abkühlungseffekt durch Verdunstung möglich. Dies widerspricht jedoch der Erfahrung aus der Realität. Da ein solches Modell den Verdunstungskühlschrank nicht darstellt, wird der Fall  $c = 0$  für weitere Betrachtungen ausgeschlossen und die Gleichgewichtssituation (9) nicht weiter untersucht.

**Fall 3:  $c < 0$**  Hier werden lediglich zwei Spezialfälle mathematisch untersucht, bei denen Instabilität auftritt. Ob diese Fälle auch physikalisch sinnvoll sind, wird im Abschnitt 7 beschrieben.

**1. Spezialfall:** Betrachte das charakteristische Polynom von  $P^{-1}A$ :

$$\chi_{P^{-1}A}(x) = -x^3 - \left(\frac{a}{p} + \frac{a+b}{q} + \frac{b+c}{s}\right) \cdot x^2 - \left(\frac{ab}{pq} + \frac{a(b+c)}{ps} + \frac{ab+ac+bc}{qs}\right) \cdot x - \frac{abc}{pqs}$$

Seien nun  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{C}$  die komplexen Eigenwerte von  $P^{-1}A$ . Es gilt: Die Summe der Eigenwerte ist gleich der Spur von  $P^{-1}A$ . Es folgt also:

$$\begin{aligned} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 &= -\frac{a}{p} - \frac{a+b}{q} - \frac{b}{s} - \frac{c}{s} > 0 \\ \Leftrightarrow & -\left(\frac{as}{p} + \frac{s(a+b)}{q} + b\right) > c \end{aligned}$$

Falls nun  $c$  entsprechend klein gewählt wird, dann ist die Summe der Eigenwerte positiv. Das bedeutet jedoch, dass hier mindestens ein Eigenwert positiven Realteil besitzt und das Gleichgewicht somit instabil ist.

**2. Spezialfall:**  $p = q = s > 0$ . Dann ist die Matrix  $P^{-1}A$  symmetrisch und somit alle Eigenwerte reell. In diesem Fall lässt sich zeigen, dass das Gleichgewicht (8) instabil ist. Seien  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$  die Eigenwerte von  $P^{-1}A$ . Es gilt

$$\det(P^{-1}A) = \det(P^{-1}) \cdot \det(A) = \frac{1}{pqs} \det(A) = p^{-3} \det(A).$$

Für die Determinante von  $A$  folgt mit dem Gauss-Verfahren:

$$\left| \begin{pmatrix} -a & a & 0 \\ a & -a-b & b \\ 0 & b & -b-c \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} -a & a & 0 \\ 0 & -b & b \\ 0 & 0 & -c \end{pmatrix} \right| = -abc.$$

Also

$$\det(P^{-1}A) = -\frac{abc}{pqs} = -abc \cdot p^{-3} > 0.$$

Sei  $J$  die Jordansche Normalform von  $P^{-1}A$ , mit regulärer Matrix  $B$  sodass

$$P^{-1}A = B \cdot J \cdot B^{-1}.$$

Dann folgt mit  $c < 0$ :

$$\begin{aligned} 0 &< -abc \cdot p^{-3} = \det(P^{-1}A) = \det(B) \cdot \det(J) \cdot \det(B^{-1}) \\ &= \det(J) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 \end{aligned}$$

Also

$$\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 > 0.$$

Dies ist nur möglich wenn entweder alle drei Eigenwerte positiv sind oder genau zwei Eigenwerte negativ und ein Eigenwert positiv ist. Daraus folgt: Der Spektralradius von  $P^{-1}A$  ist positiv, also ist das Gleichgewicht (8) instabil. Dieser Spezialfall wird in Simulation 3 behandelt.

## 6 Simulation mit Matlab

Das System von gewöhnlichen Differentialgleichungen wurde mit Hilfe der Matlab-Funktion ode23s gelöst und simuliert. Als Beispiel werden hier zwei Simulationsdurchläufe genauer beschrieben.

### 6.1 Bestimmung der spezifischen Verdampfungsenthalpie

Die Abhängigkeit der spezifischen Verdampfungsenthalpie wurde mittels linearer Regression im Intervall  $[0^\circ\text{C}, 100^\circ\text{C}]$  aus den Daten in Tabelle 1 berechnet.

Tabelle 1: Daten zur Berechnung der spezifischen Verdampfungsenthalpie, Quelle: [5]

Temperatur des Wassers	Verdampfungsenthalpie
in Kelvin	in kJ/kg
273,15	2500,2
298,15	2441,2
313,15	2405,7
333,15	2357,5
353,15	2307,7
373,15	2256,2

Die daraus erhaltene Regressionsgerade  $\Delta h_V = r_0 - k \cdot T$  lautet:

$$\Delta h_V(T_{H_2O}) = (-2,44 \cdot 10^3 \cdot T_{H_2O} + 3,167 \cdot 10^6) \text{ J/kg} \quad (11)$$

## 6.2 Simulation 1

Zunächst wurden die Werte der Systemgrößen gemäß Tabelle 2 gesetzt.

Tabelle 2: Werte für Simulation mit Matlab				
Größe	Wert	Einheit	Quelle	Bemerkung
$\alpha_I$	6	W/m <sup>2</sup> K	[8]	ruhende Luft
$\alpha_W$	350	W/m <sup>2</sup> K	[8]	Bereich: 350-560
$\alpha_A$	7	W/m <sup>2</sup> K	[9]	Bereich: ca. 7-25
$A$	3	m <sup>2</sup>	-	(*)
$m_I$	0,6	kg	-	(*)
$m_W$	5	kg	-	(*)
$m_{H_2O}$	0,3	kg	-	(*)
$c_I$	720	J/kgK	[7]	Wert für konstantes Volumen
$c_W$	890	J/kgK	[6]	
$c_{H_2O}$	4190	J/kgK	[6]	
$r_0$	$3,167 \cdot 10^6$	J/kg	Gl. (11)	→ Verdampfungsenthalpie
$k$	2440	J/kgK	Gl. (11)	→ Verdampfungsenthalpie
$M$	$0,5 \cdot 10^3$	kg/s	-	(*)
$T_A$	303	K	-	30°C = ca. 273K + 30K

**Bemerkungen zu Tabelle 2:** Die Werte, die mit (\*) gekennzeichnet sind, wurden geschätzt. Aus der Annahme, dass das Volumen im Tongefäß  $0,5\text{m}^3$  beträgt, folgt für die Oberfläche  $A$  eine Größe von ca.  $3\text{m}^2$ . Mit der Dichte der Luft von ca.  $1,2\text{kg/m}^3$ , [6], folgt die Masse der Innenluft von  $0,6\text{kg}$ . Die Übergangskoeffizienten sind meist nur sehr grob angegeben und hängen stark von Luft-/Wasserströmung und ähnlichen Parametern ab. Deshalb sind diese Werte ebenfalls als Schätzung zu verstehen.

**Durchführung und Ergebnis der Simulation:** Die Anfangswerte der drei Systemtemperaturen werden gleich der Außentemperatur mit 30°C (303 K) gesetzt. Mit 2000 Zeitschritten erhält man durch ode23s angenähert eine Gleichgewichtslage von  $241,7\text{K}$ . Das berechnete Gleichgewicht liegt bei  $241,6\text{K}$ , also  $-31,5^\circ\text{C}$ . Es fällt außerdem auf, dass die drei Temperaturen sehr nah aneinander verlaufen. Außerdem ist der im Abschnitt 5 untersuchte Parameter  $c$  ist positiv,  $c = 19.78$ . Die Eigenwerte sind somit alle negativ und das Gleichgewicht lokal asymptotisch stabil. Zusammengefasst in Tabelle 3.

Tabelle 3: Ergebnis Simulation 1

Gleichgewicht in °C	-31,5
Gleichgewicht in K	241,6
Parameter $c = \alpha_A A - kM$	19.78
Eigenwerte	-0,0451
	-0,0032
	-1,0845

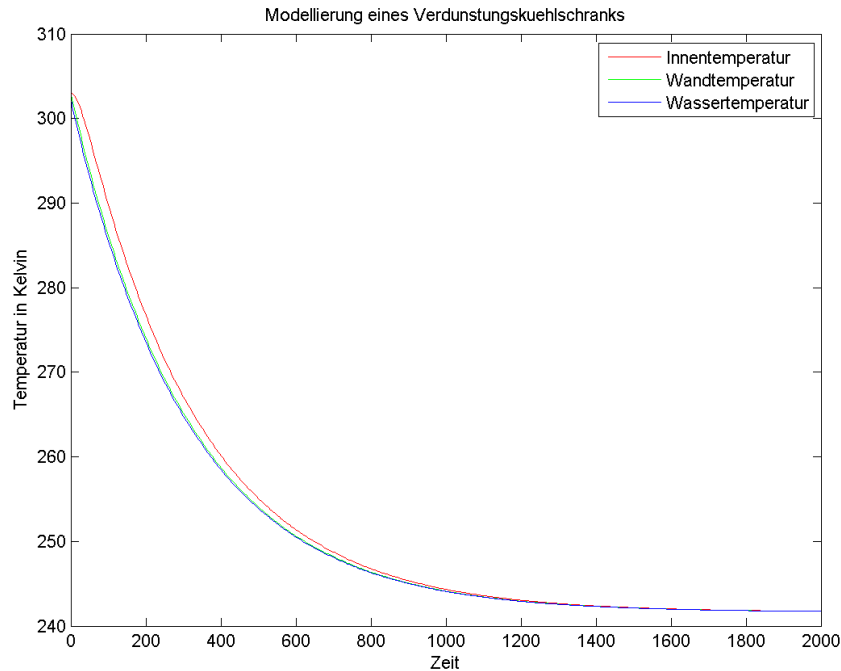


Abbildung 2: Simulationsdurchlauf 1

### Bewertung und Verbesserung:

1. Die Gleichgewichtstemperatur von  $-31^{\circ}\text{C}$  ist für einen Verdunstungskühlschrank unrealistisch. Um das Modell realitätsnäher zu machen, wird im Folgenden ein höherer Wärmeübergangskoeffizient und eine niedrigere Verdunstungsrate betrachtet. Dies sollte aus physikalischer Sicht das Gleichgewicht nach oben verschieben.
2. In diesem Modell wird die Dicke der Tonwand vernachlässigt. Um der Zeitverzögerung, die durch die Wärmeleitung durch die Wand entsteht, einen Ausdruck zu verleihen, wird im nächsten Durchgang der Übergangskoeffizient von Wasser zur Wand erniedrigt.

## 6.3 Simulation 2

Im nächsten Simulationsdurchlauf werden drei Werte wie folgt gesetzt:

1.  $\alpha_A = 10 \text{ W/m}^2\text{K}$  (höher als bei Simulation 1)
2.  $M = 0,3 \cdot 10^{-3} \text{ kg/s}$  (niedriger)
3.  $\alpha_W = 50 \text{ W/m}^2\text{K}$  (viel niedriger)

Für die verbleibenden Parameter werden die Werte aus Simulation 1 übernommen.

**Durchführung und Ergebnis der Simulation:** Nach 2000 Schritten wird ein angenähertes Gleichgewicht von  $278,2 \text{ K}$  erreicht. Das berechnete Gleichgewicht beträgt  $278,1 \text{ K}$ , also ca.  $5,0^{\circ}\text{C}$ . Der stabile Verlauf der Simulation war zu erwarten, denn hier gilt  $c = 29,268 > 0$ . Nach Abschnitt 5 ist das Gleichgewicht wieder lokal asymptotisch stabil. Zusammengefasst in Tabelle 4.

Tabelle 4: Ergebnis Simulation 2

Gleichgewicht in °C	5.0
Gleichgewicht in K	278,1
Parameter $c = \alpha_A A - kM$	29,268
Eigenwerte	-0,0042 -0,0451 -0,1727

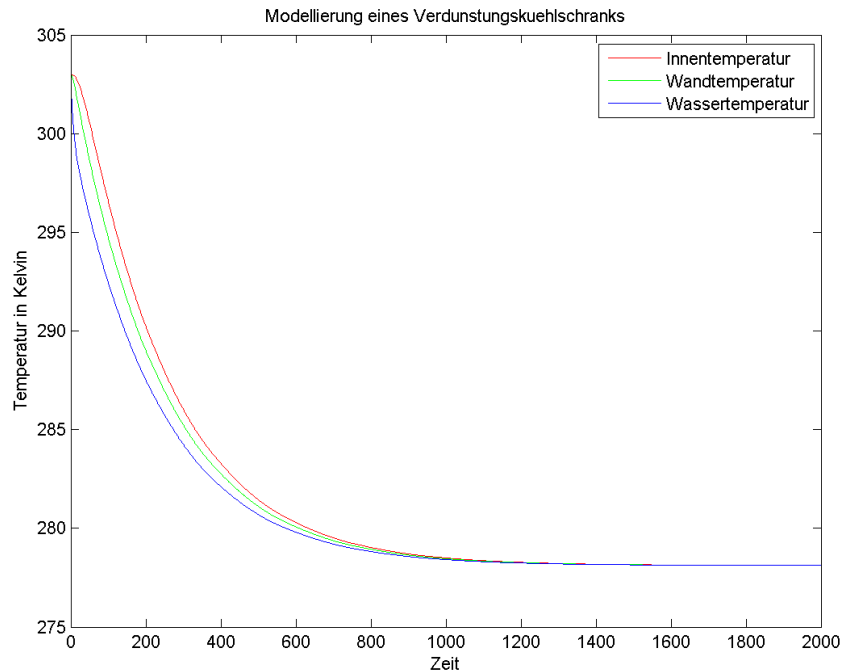


Abbildung 3: Simulationsdurchlauf 2

## 6.4 Simulation 3

Wie im vorigen Abschnitt 5 erwähnt, ist bei entsprechender Parameterwahl ein instabiles Gleichgewicht möglich, nämlich im Fall  $p = q = s$  und  $c < 0$ . Dies wird wie folgt realisiert:

- $\alpha_A = \alpha_W = \alpha_I = 10^{\text{W/m}^2\text{K}}$
- $M = 0,02^{\text{kg/s}}$  (viel höher)

Das Ergebnis dieser Simulation ist in Tabelle 5 zu sehen.

Dieses Ergebnis ist unphysikalisch, da hier Temperaturen unter 0 K auftreten. Hier kommt das Modell an seine Grenzen, denn selbst, wenn eine so hohe Verdunstungsrate zur Anfangstemperatur möglich wäre, so sinkt diese spätestens in der Nähe von 0°C.

Tabelle 5: Ergebnis Simulation 3

Gleichgewicht in °C	2612
Gleichgewicht in K	2886
Parameter $c = \alpha_A A - kM$	-18,8
Eigenwerte	-0,0771
	-0,0194
	0,0047

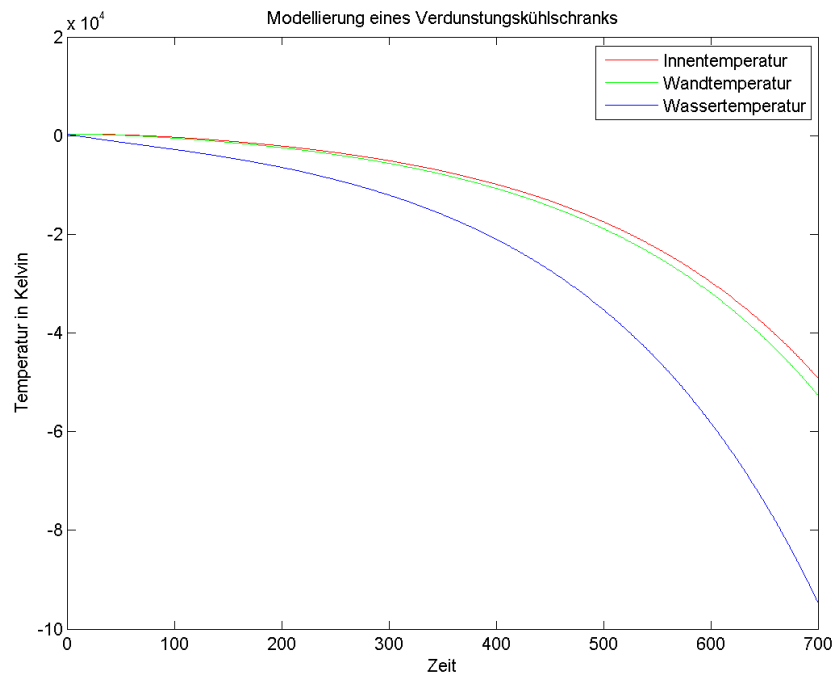


Abbildung 4: Simulationsdurchlauf 3

## 7 Zusammenfassung und Bewertung des Modells

Das Ziel der Modellierung war es, den Temperaturverlauf im Inneren des Kühlschranks darzustellen. Auf die zu Beginn gestellten Fragen liefert das erarbeitete Modell folgende Antworten:

Es stellt sich ein Gleichgewicht ein, das von den Parametern

- Wärmeübergangskoeffizient von Außenluft zu Wasser,
- Oberfläche des Wassers,
- Verdampfungsenthalpie,
- Verdunstungsrate,
- Außentemperatur

abhängt. Je höher der Wärmeübergangskoeffizient, die Oberfläche und die Außentemperatur, desto höher das Gleichgewicht. Je höher die Verdunstungsrate desto niedriger das Gleichgewicht.

**Bewertung des Modells:** Eine große Einschränkung des Modells ist die konstant gesetzte Verdunstungsrate. Dies ist in der Realität nur möglich, wenn der Temperaturbereich des Wassers sehr klein ist oder wenn die Außenbedingungen (Luftdruck, Sättigung der Luft mit Wasserdampf, ...) kontinuierlich angepasst werden, sodass auch bei niedrigeren Wassertemperaturen eine hohe Verdunstungsrate möglich ist.

In diesem Modell gibt es außerdem Parameterkonstellationen, in denen Instabilität möglich ist, das heißt dass mindestens eine Temperatur unendlich groß oder unendlich klein wird. Dies kann in der Realität jedoch nicht passieren. In einem realen Verdunstungskühlschrank ist die Gleichgewichtslage nie instabil.

## 8 Mögliche Verbesserungen des Modells

1. Die Möglichkeit der zu Instabilität führenden Parameterkonstellationen kann durch Veränderung des Modells verhindert werden. Dies kann erreicht werden, indem die Größen  $M$  und  $\Delta h_V$  zu einer Größe  $M \cdot \Delta h_V =: E(T_{H_2O})$  zusammengefasst werden.  $E(T_{H_2O})$  beschreibt nun die gesamte Energie, die dem Wasser durch Verdunstung pro Zeit entzogen wird, abhängig von der Wassertemperatur. Es sollte gelten: Je größer  $T_{H_2O}$ , desto größer  $E$ . Je kleiner  $T_{H_2O}$ , desto kleiner  $E$ . Hier kann als erste Näherung wieder ein linearer Zusammenhang angenommen werden.
2. Um den zeitlichen Verlauf der Kühlung besser simulieren zu können, sollte die Wärmeleitung in der Wand zusätzlich betrachtet werden. Dies führt zu einer weiteren Temperatur und schließlich zu einem linearen System von vier statt drei gewöhnlichen Differentialgleichungen. Zu beachten ist jedoch, dass diese Verfeinerung keine Auswirkungen auf das Gleichgewicht hat. Die Struktur der Matrix  $A$ , wie in Gleichung (10) lässt sich wie folgt darstellen:

$$\begin{pmatrix} -a & a & 0 & 0 \\ a & -a-b & b & 0 \\ 0 & b & -b-c & c \\ 0 & 0 & c & -c-d \end{pmatrix}$$

Auch hier ist die Matrix tridiagonal und symmetrisch, mit jeweils neuen Variablen  $a, b, c > 0$  und  $d \in \mathbb{R}$ .

3. Die wichtigste Verbesserung ist die Einführung eines Modells, das die Abhängigkeit der Verdunstungsrate von der Wassertemperatur simuliert. Dies würde vermutlich zu einem nichtlinearen Gleichungssystem führen.
4. Zusätzlich könnte die Abhängigkeit der Verdunstungsrate von Wind, Außentemperatur, Luftfeuchtigkeit, Luftdruck etc. betrachtet werden.

# Literatur

- [1] Univ.-Prof. DI Dr. Helmut Eichlseder, TU Graz, Thermodynamik Vorlesung - Skript, September 2012, 15-17
- [2] Roland Reich, Thermodynamik, Grundlagen und Anwendung in der allgemeinen Chemie, VCH (1993, 2. verb. Aufl.), Weinheim, 14, 39-44
- [3] <http://de.wikipedia.org/wiki/Wärme>, (25.06.2013)
- [4] <http://de.wikipedia.org/wiki/Wärmeübergangskoeffizient>, (25.06.2013)
- [5] <http://de.wikipedia.org/wiki/Verdampfungswärme>, (24.6.2013)
- [6] [http://www.biocab.org/Induced\\_Emission.html](http://www.biocab.org/Induced_Emission.html), Biology Cabinet Organization, (24.6.2013)
- [7] [http://www.engineeringtoolbox.com/specific-heat-capacity-gases-d\\_159.html](http://www.engineeringtoolbox.com/specific-heat-capacity-gases-d_159.html), (24.6.2013)
- [8] <http://astro.uni-wuppertal.de/~kampert/BI/kap38/Kap38.pdf>, Seite 7, (24.6.2013)
- [9] [http://www.schweizer-fn.de/stoff/wuebergang\\_gase/wuebergang\\_gase.php](http://www.schweizer-fn.de/stoff/wuebergang_gase/wuebergang_gase.php), (24.6.2013)