Übungen Mathematische Modellierung I
Sommersemester 2013

1. Gegeben sind Daten $\{(x_n, y_n)\}_{n=1}^N$, wobei the Messpunkte verschieden sind $x_i \neq x_j$, und die Parameter k und d des empirischen Modells $y(x) = k \cdot x + d$ sollen so bestimmt werden, dass die Summe der quadratischen Abstände zwischen der Gerade und den Daten,
$$E(k,d) = \sum_{n=1}^{N} [(k \cdot x_n + d) - y_n]^2$$
minimiert wird. Zeige durch die Optimalitätsbedingungen
$$\frac{\partial E}{\partial k}(k^*, d^*) = \frac{\partial E}{\partial d}(k^*, d^*) = 0$$
dass die Parameter
$$k^* = \frac{\overline{xy} - \overline{x}\overline{y}}{\overline{x^2} - \overline{x}^2}, \quad d^* = \overline{y} - k^* \cdot \overline{x}$$
kritisch für E sind, und beweise dass diese Parameter tatsächlich minimierend sind.

2. Schreibe einen Matlab-Code mit der Funktion `fminsearch`, um die Parameter (K, t_0, τ) eines logistischen Modells $P(t; K, t_0, \tau) = K/\{1 + \exp[-(t - t_0)/\tau]\}$ für die Bevölkerungsdaten (P in Einheiten zu tausend Einwohnern)

t	1790	1800	1810	1820	1830	1840	1850	1860	1870	1880	1890	1900	1910	1920	1930	1940	1950
$P(t)$	3929	5308	7240	9638	12866	17069	23192	31443	38558	50156	62948	75995	91972	105711	122775	131669	150697

zu bestimmen. Stelle die geschätzte Kurve im Lauf der Iterationen grafisch dar.

3. Für die Konzentrationsdaten (u in Mol pro Liter)

t_i	0	15	30	45	60	75	90	105	120
u_i	0.0190	0.0130	0.0091	0.0069	0.0057	0.0052	0.0043	0.0039	0.0035

soll die Reaktionsordnung m bestimmt werden. Für $m = 1$ und $m > 1$ sind empirische Modelle gegeben durch $u(t; k, d) = de^{-kt}$ bzw. $u(t; k, d) = (kt + d)^{-\frac{1}{m-1}}$. Für die Reaktionsordnungen $m = 1, 2, 3$ bestimme die Regressionsgerade der transformierten Daten. Mit $\boldsymbol{u} = \langle u_1, \ldots, u_N \rangle^{\mathrm{T}}$ und $\boldsymbol{u}(k,d) = \langle u(t_1; k, d), \ldots, u(t_N; k, d) \rangle^{\mathrm{T}}$ sei $E_p(k,d) = \|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}(k,d)\|_{\ell_p}^p$ ein Maß der Anpassung. Je kleiner $E_p(k^\star, d^\star)$ ist, dester besser ist die Anpassung des Modells zu den Daten. Zusätzlich ist der Korrelationskoeffizient r ein Maß der Anpassung. Je näher r^2 bei 1 liegt, dester besser ist die Anpassung des Modells zu den Daten. Verwende diese Anpassungsmaße, $\{E_p\}_{p=1,2}$ und r, um die Reaktionsordnung quantitativ zu schätzen.

4. Die (unbekannte) Funktion $f(x) = x^2/(1 + 20x^2)$ soll von einer verfügbaren Abtastung geschätzt werden. In den folgenden seien $n = 10$ und $m = 100$.

   (a) Bestimme ein Polynom P $n$ten Grades, das erfüllt
   $$P(x_k) = f(x_k), \qquad x_k = -1 + 2k/n, \quad k = 0, \ldots, n$$
   unter der Annahme dass die Werte $f(x_k)$ in den gleichmäßig verteilten Stutzstellen x_k verfügbar sind.

(b) Bestimme ein Polynom Q $n$ten Grades, das erfüllt

$$Q(t_j) = f(t_j), \qquad t_j = \cos((j + 1/2) * \pi/(n + 1)), \quad j = 0, \ldots, n$$

unter der Annahme dass die Werte $f(t_j)$ in den Nullstellen t_j des Tchebyshev'chen Polynoms $T_n(t) = \cos(n \cos^{-1}(t))$ verfügbar sind.

(c) Bestimme ein Polynom R $n$ten Grades, das das Funktional minimiert:

$$\sum_{i=0}^{m} |R(y_i) - f(y_i)|^2, \qquad y_i = -1 + 2i/m, \quad i = 0, \ldots, m$$

unter der Annahme dass die Werte $f(y_i)$ in den gleichmäßig verteilten Stutzstellen y_i verfügbar sind.

Stelle P, Q, R und f gemeinsam grafisch dar.

5. Mit Dimensionsanalyse leite das dritte Keplersche Gesetz her: *Die Quadrate der Umlaufzeiten zweiter Planeten verhalten sich wie die Kuben ihrer großen Halbachsen.*

6. Löse das Anfangswertproblem analytisch

$$\begin{cases} P'(t) &= \dfrac{P(t)}{\tau}\left[1 - \dfrac{P(t)}{K}\right], \quad t > t_0 \\ P(t_0) &= P_0 \end{cases}$$

und numerisch mit Matlab (wobei die Parameter vom Benutzer eingegeben werden), und vergleiche die Ergebnisse graphisch.

7. Für das Räuber-Beute Modell,

$$x' = (a_1 - b_1 y)x, \quad y' = (b_2 x - a_2)y$$

zeige dass die Lösungskurven in Niveau-Kurve der Funktion

$$P(x, y) = a_2 \ln(x) - b_2 x + a_1 \ln(y) - b_1 y$$

liegen und stelle diese mit Matlab für verschiedene Werte $c = P(x, y)$ graphisch dar. Löse das System der gewöhnlichen Differentialgleichungen mit Matlab für verschiedene Startwerte (x_0, y_0) und untersuche die Stabilität des Gleichgewichts $(a_2/b_2, a_1/b_1)$ rechenbetont. Dann zeige theoretisch, dass das Gleichgewicht stabil ist. Hinweis: Für Stabilität soll man eine Lyapunov Funktion verwenden.

8. Für das Konkurrenz Modell,

$$x' = (a_1 - b_1 y)x, \quad y' = (a_2 - b_2 x)y$$

zeige dass die Lösungskurven in Niveau-Kurve der Funktion

$$Q(x, y) = -a_2 \ln(x) + b_2 x + a_1 \ln(y) - b_1 y$$

liegen und stelle diese mit Matlab für verschiedene Werte $c = Q(x, y)$ graphisch dar. Löse das System der gewöhnlichen Differentialgleichungen mit Matlab für verschiedene Startwerte (x_0, y_0) und untersuche die Stabilität des Gleichgewichts $(a_2/b_2, a_1/b_1)$ rechenbetont. Dann zeige theoretisch, dass das Gleichgewicht instabil ist. Hinweis: Für Stabilität soll man eine Jacobi-Matrix verwenden.

9. Schreibe einen Matlab-Code zur Simulation des verallgemeinerten Räuber-Beute Modells,

$$
\begin{aligned}
x' &= a_1 x \left(1 - \frac{x}{K}\right) - \frac{b_1 x y}{1 + c_1 x} \\
y' &= a_2 y \left(1 - \frac{y}{b_2 x}\right)
\end{aligned}
$$

und zeige für gewisse Werte der Parameter einen stabilen Grenzzyklus auf.

10. Für die reversible Reaktion,

$$A + B \underset{\kappa_2}{\overset{\kappa_1}{\rightleftharpoons}} C + D$$

sind die Anfangskonzentrationen

$[A](0) = 3$ Mol/Liter, $[B](0) = 2$ Mol/Liter, $[C](0) = 1$ Mol/Liter und $[D](0) = 0$ Mol/Liter.

Die Reaktionskonstanten sind $\kappa_1 = 2$ (Liter·Minuten/Mol) für die Vorwärtsreaktion und $\kappa_2 = 2$ (Liter·Minuten/Mol) für die Rückwärtsreaktion. Finde die Konzentrationen $[A](t)$, $[B](t)$, $[C](t)$ und $[D](t)$ als Funktionen von der Reaktionszeit t Minuten, und stelle diese gemeinsam graphisch dar. Finde die Gleichgewichtskonzentrationen dieser Chemikalien. Zeige dass diese Gleichgewichte stabil sind.

11. Leite die Formeln für $A'(t)$ und $N'(t)$ im Peak Oil Modell aus den Formeln für $A(t + dt) - A(t)$ und $N(t + dt) - N(t)$ her. Stelle $A(t + dt) - A(t)$ und $N(t + dt) - N(t)$ als Funktionen vom Fasspreis $P(t)$ graphisch dar. In der selben Grafik stelle $A'(t)$ und $N'(t)$ als Funktionen vom Fasspreis $P(t)$ graphisch dar. Konvergiert die Kreuzung, $A(t + dt) - A(t) = N(t + dt) - N(t)$ zur Kreuzung $A\prime(t) = N'(t)$ für $dt \to 0$? Leite die Formel für $P(t)$ her. Finde ein Gleichgewicht für dieses Modell, und bestimme ob das Gleichgewicht stabil ist.

12. Zwei Massen m_1 und m_2 treffen einander ohne Schwerkraft. Vor der Kollision haben die Massen die Geschwindigkeiten $\boldsymbol{v}_1$ beziehungsweise $\boldsymbol{v}_2$. Seien $\bar{m}_1$, $\bar{m}_2$, $\bar{\boldsymbol{v}}_1$, $\bar{\boldsymbol{v}}_2$ die entsprechenden Größen nach der Kollision. Unter der Annahme dass keine Masse in der Kollision getauscht wird und dass die Bewegungen in einer Dimension eingeschränkt sind, löse das folgende System:

$$
\begin{array}{crcl}
\text{Massenerhaltung:} & m_1 + m_2 &=& \bar{m}_1 + \bar{m}_2 \\
\text{Impulserhaltung:} & m_1 \boldsymbol{v}_1 + m_2 \boldsymbol{v}_2 &=& \bar{m}_1 \bar{\boldsymbol{v}}_1 + \bar{m}_2 \bar{\boldsymbol{v}}_2 \\
\text{Energieerhaltung:} & \frac{1}{2} m_1 \|\boldsymbol{v}_1\|_{\ell_2}^2 + \frac{1}{2} m_2 \|\boldsymbol{v}_2\|_{\ell_2}^2 &=& \frac{1}{2} \bar{m}_1 \|\bar{\boldsymbol{v}}_1\|_{\ell_2}^2 + \frac{1}{2} \bar{m}_2 \|\bar{\boldsymbol{v}}_2\|_{\ell_2}^2
\end{array}
$$

zu finden:

$$\bar{\boldsymbol{v}}_i = \boldsymbol{v}_{\mathrm{c}} - [\boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{v}_{\mathrm{c}}], \quad i = 1, 2$$

wobei $\boldsymbol{v}_{\mathrm{c}} = (m_1 \boldsymbol{v}_1 + m_2 \boldsymbol{v}_2)/(m_1 + m_2)$.

Finde Parametereinstellungen für das WTC Modell, mit denen die Fallzeit eines Pfannkuchen-Einsturzes der Fallzeit eines freien Falls entspricht.

13. Das Modell für ein Erdwärmesystem mit 6 Temperaturen (Haus T_{H}, Austeiler T_{A}, Speicher T_{S}, Pumpe T_{P}, Kollektoren T_{K} und Erde T_{E}) sei gegeben:

$$
\left\{
\begin{array}{rcrcl}
\rho_{\mathrm{H}} c_{\mathrm{H}} V_{\mathrm{H}} T'_{\mathrm{H}} &=& \alpha_{\mathrm{A}}^{\mathrm{H}} S_{\mathrm{A}}^{\mathrm{H}} (T_{\mathrm{A}} - T_{\mathrm{H}}) &+& \alpha_{\mathrm{H}}^{\mathrm{L}} S_{\mathrm{H}}^{\mathrm{L}} (T_{\mathrm{L}} - T_{\mathrm{H}}) \\
\rho_{\mathrm{A}} c_{\mathrm{A}} V_{\mathrm{A}} T'_{\mathrm{A}} &=& \alpha_{\mathrm{A}}^{\mathrm{H}} S_{\mathrm{A}}^{\mathrm{H}} (T_{\mathrm{H}} - T_{\mathrm{A}}) &+& F_{\mathrm{A}} (\rho_{\mathrm{S}} c_{\mathrm{S}} T_{\mathrm{S}} - \rho_{\mathrm{A}} c_{\mathrm{A}} T_{\mathrm{A}}) \\
\rho_{\mathrm{S}} c_{\mathrm{S}} V_{\mathrm{S}} T'_{\mathrm{S}} &=& && F_{\mathrm{A}} (\rho_{\mathrm{A}} c_{\mathrm{A}} T_{\mathrm{A}} - \rho_{\mathrm{S}} c_{\mathrm{S}} T_{\mathrm{S}}) \\
&& &+& F_{\mathrm{K}} (\rho_{\mathrm{K}} c_{\mathrm{K}} T_{\mathrm{K}} - \rho_{\mathrm{P}} c_{\mathrm{P}} T_{\mathrm{P}}) \\
\rho_{\mathrm{K}} c_{\mathrm{K}} V_{\mathrm{K}} T'_{\mathrm{K}} &=& \alpha_{\mathrm{K}}^{\mathrm{E}} S_{\mathrm{K}}^{\mathrm{E}} (T_{\mathrm{E}} - T_{\mathrm{K}}) &+& F_{\mathrm{K}} (\rho_{\mathrm{P}} c_{\mathrm{P}} T_{\mathrm{P}} - \rho_{\mathrm{K}} c_{\mathrm{K}} T_{\mathrm{K}}) \\
\rho_{\mathrm{E}} c_{\mathrm{E}} V_{\mathrm{E}} T'_{\mathrm{E}} &=& \alpha_{\mathrm{K}}^{\mathrm{E}} S_{\mathrm{K}}^{\mathrm{E}} (T_{\mathrm{K}} - T_{\mathrm{E}}) &+& Q
\end{array}
\right.
$$

wobei $T_\mathrm{P} = T_\mathrm{K} - \phi(T_\mathrm{K})$ für eine steigende Funktion ϕ mit den Eigenschaften $\phi(t) \stackrel{t\to-\infty}{\longrightarrow} 0°\mathrm{C}$ und $\phi(t) \stackrel{t\to\infty}{\longrightarrow} 2°\mathrm{C}$.

(a) Schätze realistische Werte für die Parameter ab, implementiere das Modell mit Matlab und entwickle $F_\mathrm{K}(t)$ und $F_\mathrm{A}(t)$ damit $T_\mathrm{H} \in [T_\mathrm{min}, T_\mathrm{max}]$.

(b) Für die Parameter

$$\rho_\mathrm{H} c_\mathrm{H} V_\mathrm{H}, \quad \rho_\mathrm{A} c_\mathrm{A} V_\mathrm{A}, \quad \rho_\mathrm{S} c_\mathrm{S} V_\mathrm{S}, \quad \rho_\mathrm{K} c_\mathrm{K} V_\mathrm{K}, \quad \rho_\mathrm{E} c_\mathrm{E} V_\mathrm{E} = 1$$

$$\rho_\mathrm{A} c_\mathrm{A} F_\mathrm{A}, \quad \rho_\mathrm{S} c_\mathrm{S} F_\mathrm{A}, \quad \rho_\mathrm{K} c_\mathrm{K} F_\mathrm{K}, \quad \rho_\mathrm{E} c_\mathrm{E} F_\mathrm{K} = 1$$
$$\alpha^\mathrm{H}_\mathrm{A} S^\mathrm{H}_\mathrm{A}, \quad \alpha^\mathrm{L}_\mathrm{H} S^\mathrm{L}_\mathrm{H}, \quad \alpha^\mathrm{E}_\mathrm{K} S^\mathrm{E}_\mathrm{K} = 1$$
$$\alpha^\mathrm{H}_\mathrm{H} S^\mathrm{H}_\mathrm{H} T_\mathrm{L} = 1, \quad \rho_\mathrm{P} c_\mathrm{P} F_\mathrm{K} T_\mathrm{P} = 1, \quad Q = 1$$

leite ein Gleichgewicht her, und bestimme ob dieses Gleichgewicht stabil ist.

(c) Sei $t^\star$ die Laufzeit der Pumpe, die notwendig ist, um eine gezielte Energie $E^\star$ ins Haus zu bringen:

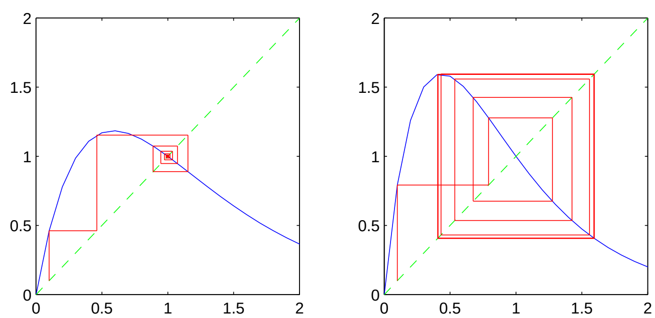
$$E^\star = \rho_\mathrm{K} c_\mathrm{K} F_\mathrm{K} \int_0^{t^\star} \phi(T_\mathrm{K}(t))dt$$

Diese Gleichung definiert implizit eine Funktion $t^\star = t^\star(F_\mathrm{K})$. Zeige, $t^{\star\prime}(F_\mathrm{K}) < 0$, und daher ist es theoretisch vorteilhaft, dass F_K möglichst groß ist.

14. Schreibe einen Matlab-Code, der die Iterierten des Lachs-Modells

$$\xi_{n+1} = F(\xi_n) = \xi_n e^{r(1-\xi_n)}$$

für eingegebene ξ_0 und r ausgibt und so graphisch darstellt:

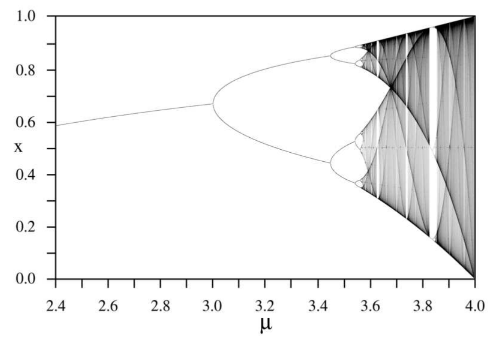


Hier ist $\xi_0 = 0.1$ für beide Fälle, und $r = 1.7$ gilt für die linke Graphik während $r = 2.3$ für die rechte Graphik gilt. Der Grenzwert für die linke Graphik ist $\xi^*_{(0)} = 1.0$, und die 2-periodischen Grenzwerte für die rechte Graphik sind $\xi^*_{(1)} = 0.4078$ und $\xi^*_{(2)} = 1.5922$.

15. Für das diskrete logistische Modell,

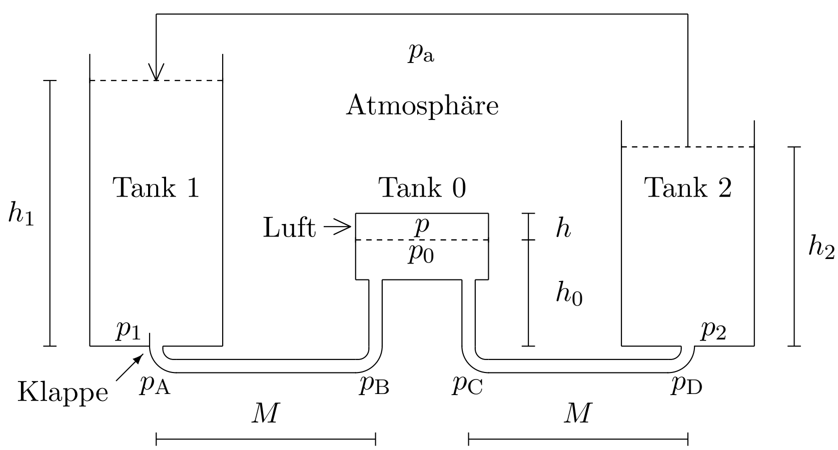
$$x_{n+1} = \mu x_n(1 - x_n)$$

sei $\{x^*_{n,j}(\mu) : j = 0, \ldots, 2^n - 1\}$ eine 2^n-periodische Lösung für ein gewisses μ. Für $n = 0$ finde die Werte μ_0 und μ_1, wobei es ein stabiles Gleichgewicht $x^*_{0,0}(\mu)$ für $\mu_0 < \mu < \mu_1$ gibt. Für $n = 1$ finde den Wert μ_2, wobei es eine stabile $2-$periodische Lösung $\{x^*_{1,0}(\mu), x^*_{1,1}(\mu)\}$ für $\mu_1 < \mu < \mu_2$ gibt. Stelle die Kurven $x^*_{0,0}(\mu)$, $\mu_0 < \mu < \mu_1$, $x^*_{1,0}(\mu)$, $\mu_1 < \mu < \mu_2$ und $x^*_{1,1}(\mu)$, $\mu_1 < \mu < \mu_2$ gemeinsam graphisch dar, um den entsprechenden Teil des folgenden Bifurkationbilds zu sehen.

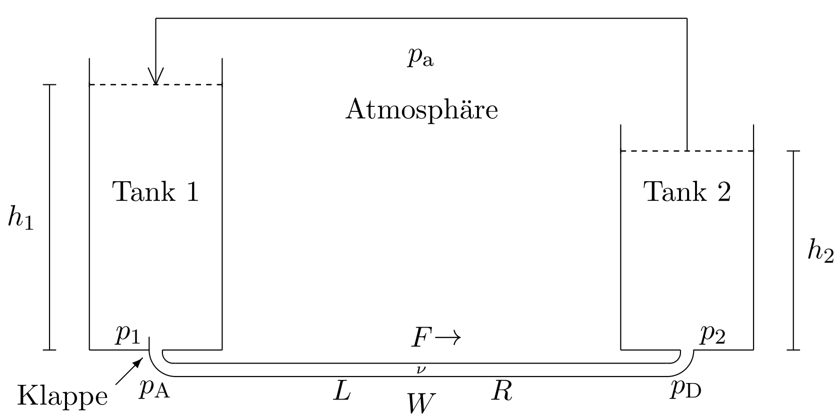


16. Für das folgende Tanksystem sei angenommen:
    (a) die Großenordnung der Zustandsvariablen sind so, dass die Gesetze von Bernoulli und Poiseuille ausreichend gelten,
    (b) es gibt einen Mechanismus, wobei die Höhen h_1 und h_2 konstant bleiben, und
    (c) der Zustand des Systems hat ein Fließgleichgewicht erreicht.

    Leite die Gleichgewicht-Druckverteilung her.



Für das folgende Tanksystem sei angenommen, dass es einen Mechanismus gibt, wobei die Höhen h_1 und h_2 konstant bleiben. Entwickle ein dynamisches Modell für den Zustand des Systems, das nach der Klappenöffnung gelten soll und dessen Fließgleichgewicht mit den Gesetzen von Bernoulli und Poiseuille übereinstimmt.



17. Für das kontinuierliche Verkehrsmodell,

$$x_N = \xi_N(t), \quad x_i''(t+\tau) = u^\star \frac{d}{dt} \ln[x_{i+1}(t) - x_i(t)], \quad i = 1, \ldots, N-1$$

seien $N = 3$, $\tau = 0$, $u^\star = u_{\max}/\ln(\rho_{\max}/x_c)$, $\rho^\star = \rho_{\max}/\mathrm{e}$. Zeige, die idealisierte Lösung $\xi_i(t) = u^\star t + (i-1)/\rho^\star$, $i = 1, \ldots, N$ ist stabil.

18. Für das diskrete Verkehrsmodell,

$$X_N(n) = \Xi_N(n), \quad M^2 \Delta_n^2 X_i(n) = u^\star M \Delta_n \ln[X_{i+1}(n-\sigma) - X_i(n-\sigma)], \quad i = 1, \ldots, N-1$$

seien $N = 3$, $\sigma = 1$, $u^\star = u_{\max}/\ln(\rho_{\max}/x_c)$, $\rho^\star = \rho_{\max}/\mathrm{e}$. Leite eine Bedingung für die Parameter her, mit der die idealisierte Lösung $\Xi_i(n) = u^\star n/M + (i-1)/\rho^\star$ stabil ist.

19. Für das diskrete Lachs-Modell, $\xi_{n+1} = F(\xi_n)$, $F(\xi) = \xi \mathrm{e}^{r(1-\xi)}$, zeige für $r > 2$, es gibt genau drei Fixpunkte $\nu_1 < 1 < \nu_2$ für $G(\xi) = F(F(\xi))$, und es gilt $|G'(\nu_1)| = |G'(\nu_2)| < 1$ für $r \in (2, 2+\epsilon)$ für ein $\epsilon > 0$.

20. Berechne die Dimension (a) einer Strecke (b) der Cantorschen Menge.

21. Gegeben sei die chemische Reaktion,

$$kA + lB \underset{\kappa_2}{\overset{\kappa_1}{\rightleftharpoons}} mC + nD$$

mit folgenden Parametern:

$$k = 2, \quad l = 1, \quad m = 2, \quad n = 1$$
$$[A](0) = 2, \quad [B](0) = 2, \quad [C](0) = 2, \quad [D](0) = 1.$$

Bestimme das Anfangswertproblem

$$x'(t) = f(x(t)), \quad x(t) = x_0$$

wobei

$$[A](t) = [A](0) - kx(t), \quad [B](t) = [B](0) - lx(t)$$
$$[C](t) = [C](0) + mx(t), \quad [D](t) = [D](0) + nx(t).$$

Leite eine Beziehung

$$0 < \kappa_2/\kappa_1 = r(x^\star)$$

zwischen Gleichgewichten $x^\star$ und dem Quotienten κ_2/κ_1 her. Zeige, die Gleichgewichte $x^\star$ mit $r'(x^\star) < 0$ sind (lokal asymptotisch) stabil, während die Gleichgewichte $x^\star$ mit $r'(x^\star) > 0$ instabil sind. (Hinweise: Es gilt $f'(x^\star)/\kappa_1 = 4r'(x^\star)(1+x^\star)^3$.) Leite eine entsprechende Potential-Landschaft $p(x, R)$ her, wobei $f(x)/\kappa_1 = -p_x(x, \kappa_2/\kappa_1)$. Stelle $p(x, R)$, $R = \frac{2k}{10} \cdot \max_{1 \le x \le 2} r(x)$, $k = 0, \ldots, 10$, auf dem Intervall $0 \le x \le 3$ grafisch dar, um Hysterese für das System zu zeigen.

22. Mit einer Energiebilanz modelliere den dynamischen (nicht nur statischen) Energiefluss durch ein Fenster mit zwei gleichen Glasscheiben (Dicke = G) und einer Luftspalte (Dicke = L) zwischen den Glasscheiben. Seien T_1 und T_2 die fixierten Innen- und Aussen-Temperaturen. Seien $T_\mathrm{A}(t)$ und $T_\mathrm{B}(t)$ die Temperaturen an der Innen- und Aussen-Grenzflächen der Luftspalte. Seien λ_G und λ_L die Wärmeleitfähigkeiten von Glas und von Luft. Mit $\rho = (\lambda_\mathrm{G}/\lambda_\mathrm{L}) \cdot (L/G)$ zeige:

$$\lim_{t\to\infty} T_\mathrm{A}(t) = \frac{(\rho+1)T_1 + T_2}{\rho+2}, \quad \lim_{t\to\infty} T_\mathrm{B}(t) = \frac{(\rho+1)T_2 + T_1}{\rho+2}.$$

23. Eine Flüssigkeit soll durch eine rechteckige Leitung mit maximalem Volumenfluss strömen. Die Seiten a und b eines Querschnitts erfüllen $0 \le a, b \le 2$ und $ab = 1$. Die zwei senkrechten Seiten werden so bearbeitet, dass es keine Reibung für die Flüssigkeit an diesen Seiten gibt. Die Viskosität der Flüssigkeit spielt die übliche Rolle bezüglich der waagerechten Seiten. Bestimme die optimale Geometrie der Leitung unter diesen Bedingungen.

24. Sei $P(t)$ eine Profitrate zur Zeit t. Sei $G(t) = \int_0^t P(s)ds$ die Gesamtprofit bis zur Zeit t. Sei $G_0(t)$ das Geld, das bis zum Betrag $G(t)$ über das Zeitintervall $[0,t]$ auf einem Bankkonto mit kontinuierlicher Zinsrate δ wachsen würde, d.h. $G_0(t) = G(t)\mathrm{e}^{-\delta t}$ ist der gegenwärtige Wert vom $G(t)$. Unter den Annahmen dass $G_0(0) = G_0(\infty) = 0$ gelten (d.h. die Gesamtprofit ist anfänglich Null und der gegenwärtige Wert der Gesamtprofit wird Null nach unendlicher Zeit), zeige:

$$\delta \int_0^\infty G_0(t)dt = \int_0^\infty e^{-\delta t} P(t)dt$$

25. Schreibe einen Mathematica-Code, um das Kostenfunktional zu maximieren

$$J(u) = \int_0^\infty e^{-\delta t}[pqx(t) - c]u(t)dt$$

über Steuerungen der Form,

$$u(t) = \begin{cases} 0, & 0 < t \le s \\ U, & s < t < \infty \end{cases}$$

und unter der Nebenbedingung,

$$x'(t) = Rx(t)[1 - x(t)/K] - qu(t)x(t), \quad x(0) = K/N, \quad x'(s) = 0$$

Das Ergebnis soll mit der folgenden optimalen Steuerung übereinstimmen:

$$U^* = \frac{R}{4q}\left\{3 - \frac{c}{pqK} + \frac{\delta}{R} - \sqrt{\left(1 + \frac{c}{pqK} - \frac{\delta}{R}\right)^2 + \frac{8c\delta}{pqKR}}\right\}$$

$$s^* = s(U^*), \quad s(U) = \frac{1}{R}\ln\left\{(N-1)\left(\frac{R}{qU} - 1\right)\right\}$$

26. Zwei Länder sollen eine schwindende Ressource teilen. Für jedes Land ist eine faire Menge zum täglichen Verbrauch etabliert worden. Zwei Strategien für jedes Land sind: *Kooperieren* (sich an der fairen Menge anzuhalten) oder *Überlaufen* (so viel wie möglich der Ressource zu verbrauchen). Die täglichen Auszahlungen der zwei Länder können so dargestellt werden:

		Land A	
		Kooperieren	Überlaufen
Land	Kooperieren	(R,R)	(S,T)
B	Überlaufen	(T,S)	(U,U)

wobei die Auszahlungen R, S, T und U erfüllen $T > R > U > S$, $R > (S+T)/2$. Unter der Annahme dass dieses Spiel schon m Mal stattgefunden hat, findet das Spiel am nächten Tag mit Wahrscheinlichkeit p/m (d.h. durch m weil die Ressource schwindend ist). Bestimme ob beim wiederholten Spielen Kooperieren sich überhaupt auszahlt, und wenn ja, über wie viele Tage soll ein Land kooperieren, um den eigenen Gewinn zu maximieren.

27. Zwei Personen treffen sich in der Wüste und überlegen einen Tausch von zwei Ressourcen x und y, damit ihre Lebenszeiten u_1 und u_2 verlängert werden können. Für die Ressourcen x und y hat die erste Person die Vorräte x_1 und y_1 und die entsprechenden Verbrauchsraten a_1 und b_1, und die zweite Person hat die Vorräte x_2 und y_2 und die entsprechenden Verbrauchsraten a_2 und b_2. Eine Person stibt genau dann, wenn eine eigene Ressource verbraucht worden ist. Die Ressourcen und die Verbrauchsraten sind: $x_i = y_i = 1$, $a_1 = b_2 = 1$, $a_2 = b_1 = 2$. Finde ein Gleichgewicht bei diesem Tausch. Berechne den optimalen Tausch bei der Nash Schlichtungsstrategie, wenn das *Status Quo* bei dem Tausch ist: nichts tauschen.

28. Es gibt unendlich viele versteckte Schätze zu finden, aber man wird schlauer beim Suchen. Sei $X(t)$ eine Zufallsvariable für die Anzahl der gefundenen Schätze bis zur Zeit t. Angenommen gilt $P\{X(\delta t) = i | X(0) = i-1\} = b_i \delta t + o(\delta t)$, wobei:

$$b_i = Bi, \quad 1 \leq i < \infty$$

zeige für $i_0 \geq 1$ dass

$$P\{X(t) = i\} = p_i(t) = \frac{(i-1)!}{(i_0-1)!(i-i_0)!} e^{-Bi_0 t}(1-e^{-Bt})^{i-i_0}, \quad i \geq i_0, \quad p_i(t) = 0, \quad i < i_0$$

die Lösung des folgenden Systems ist:

$$p_i(t) = 0, \quad 0 \leq i < i_0; \qquad p_i'(t) = b_{i-1}p_{i-1}(t) - b_i p_i(t), \quad i \geq i_0; \quad p_i(0) = \delta_{i,i_0}$$

Leite ein Anfangswertproblem für den Erwartungswert $x(t) = E[X(t)]$ her, und zeige damit, es gilt $x(t) = i_0 e^{Bt}$.

29. Für eine Zufallsvariable $X(t)$ seien $p_n(t) = P(X(t) = n)$ Wahrscheinlichkeiten, die erfüllen:

$$\begin{aligned} p_0'(t) &= -b_0 p_0(t) + d_1 p_1(t) \\ p_n'(t) &= -(b_n + d_n)p_n(t) + b_{n-1}p_{n-1}(t) + d_{n+1}p_{n+1}(t), \quad n = 1, \dots, \infty \end{aligned}$$

wobei

$$b_n = n(\beta_1 - \beta_2 n) \quad d_n = n(\mu_1 + \mu_2 n)$$

Zeige dass der Erwartungswert $x(t) = E[X(t)]$ und die Varianz $\sigma^2(t) = E[X(t)^2] - E[X(t)]^2$ erfüllen:

$$x'(t) = \frac{x(t)}{\tau}\left[1 - \frac{x(t)}{K}\right] - \nu\sigma^2(t), \qquad \tau = \frac{1}{\beta_1 - \mu_1}, \quad K = \frac{\beta_1 - \mu_1}{\beta_2 + \mu_2}, \quad \nu = (\beta_2 + \mu_2).$$

Also wenn $\sigma(t) \approx 0$ gilt, ist $x(t)$ ungefähr logistisch. Schreibe einen Matlab-Code, um $x(t)$ und $p_n(t)$ für $n = 0, \dots, N$ zu berechnen und graphisch darzustellen. (Hinweis: Wähle β_1 und β_2 so aus, dass $b_n \geq 0$ gilt für $n = 0, \dots, N$.)

30. Sei $p_n(t) = P\{X(t) = n\}$ die Wahrscheinlichkeit, dass n Kunden sich an einem Bedienschalter zur Zeit t warten, und es gibt zwei Schalter. Das System der GDG für diese Wahrscheinlichkeiten ist:

$$\begin{aligned} p_0'(t) &= -b_0 p_0(t) + d_1 p_1(t) \\ p_n'(t) &= b_{n-1}p_{n-1}(t) - (b_n + d_n)p_n(t) + d_{n+1}p_{n+1}(t), \quad 1 \leq n \leq N-1 \\ p_N'(t) &= b_{N-1}p_{N-1}(t) - d_N p_N(t) \end{aligned}$$

wobei die Koeffizienten $\{b_n\}$ und $\{d_n\}$ wie folgt bestimmt werden.

- Die durchschnittliche Zwischenankunftzeit $c = 1/b_n$ ist unabhängig von der Anzahl der Kassen.
- Wenn es nur einen Kunden gibt, ist $s = 1/d_1$ die durchschnittliche Bedienzeit, weil nur 1 Kasse in Betrieb ist.
- Wenn es mindestens 2 Kunden gibt, ist $s/2 = 1/d_n$, $2 \leq n \leq N$, die durchschnittliche Bedienzeit, weil 2 Kassen in Betrieb sind.

Daher gilt

$$b_n = 1/c, \quad d_n = \begin{cases} 2/s, & 2 \leq n \leq N \\ 1/s, & n = 1 \end{cases}$$

Sei $\{p_n^\star\}$ der stationäre Zustand für $X(t)$. Zeige mit $\rho = s/c$,

$$E[X^\star] = p_0 \rho \frac{N(\rho/2)^{N+1} - (N+1)(\rho/2)^N + 1}{(1-\rho/2)^2}, \quad p_0 = \frac{1-\rho/2}{1+\rho/2-\rho(\rho/2)^N}$$

und

$$E[X^\star] \overset{\rho\to 2}{\longrightarrow} \frac{N(N+1)}{1+2N}, \quad E[X^\star] \overset{N\to\infty}{\longrightarrow} \frac{4\rho}{4-\rho^2} \equiv L_2(\rho)$$

31. Gegeben dass eine Zufallsvariable Y die Gleichung $P(Y \leq y) = g(y)$ für eine glatte Funktion g erfüllt, berechne den Erwartungswert $E[Y]$ von Y.

32. Waren werden innerhalb des Zeitintervalls $0 \leq t \leq 1$ verkauft, und Profit soll maximiert werden. Zu Beginn dieses Intervalls werden u Einheiten der Waren bestellt und sofort geliefert. Im Lauf des Intervalls werden Z Einheiten gekauft, wobei diese Zufallsvariable für die Nachfrage so geschätzt worden ist, die folgende Wahrscheinlichkeitsdichte zu haben:

$$f(z) = \frac{\chi_{[a,b]}(z)}{b-a}, \quad \chi_{[a,b]}(z) = \begin{cases} 1, & a \leq z \leq b \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Die Fixkosten der Firma sind k, die Einheitskosten sind c_0 und der Einheitspreis für Konsumenten ist p. Die Lagerungskosten sind:

$$c_1 \int_0^1 \zeta(t) dt$$

wobei die Anzahl der gelagerten Waren zur Zeit t gegeben ist durch

$$\zeta(t) = \begin{cases} u, & t = 0 \\ (u-Z) \cdot H(u-Z), & t > 0 \end{cases}$$

Maximiere den Erwartungswert des Profits, um die optimale Bestellung u^* zu finden.