Übungen Mathematische Modellierung I
Sommersemester 2010

1. Gegeben sind Daten $\{(x_n, y_n)\}_{n=1}^N$, wobei the Messpunkte verschieden sind $x_i \neq x_j$, und die Parameter k und d des empirischen Modells $y(x) = k \cdot x + d$ sollen so bestimmt werden, dass die Summe der quadratischen Abstände zwischen der Gerade und den Daten,
$$E(k, d) = \sum_{n=1}^{N} [(k \cdot x_n + d) - y_n]^2$$
minimiert wird. Zeige durch die Optimalitätsbedingungen
$$\frac{\partial E}{\partial k}(k^*, d^*) = \frac{\partial E}{\partial d}(k^*, d^*) = 0$$
dass die minimierenden Parameter durch
$$k^* = \frac{\bar{xy} - \bar{x}\bar{y}}{\bar{x^2} - \bar{x}^2}, \quad d^* = \bar{y} - k^* \cdot \bar{x}$$
gegeben werden. Zeige dass die Hessische Matrix $D^2E(k^*, d^*)$ positiv definit ist, und deswegen hat E ein Minimum in (k^*, d^*). (*gelöst von Herrn Clemens Schiffer*)

2. Schreibe einen Matlab-Code mit der Funktion `fminsearch`, um die Parameter (K, t_0, τ) eines logistischen Modells $P(t; K, t_0, \tau) = K/\{1 + \exp[-(t - t_0)/\tau]\}$ für die Bevölkerungsdaten auf Seite 5 im Skriptum `http://www.uni-graz.at/georg.propst/SN1.pdf` zu bestimmen. Hinweis: Siehe den Text ab Seite 27. (*gelöst von Herrn Jakob Wiesmeyr*)

3. Durch Dimensionsanalyse und mit den Daten in Abbildung 1.3 im Skriptum `http://www.uni-graz.at/imawww/thaller/lehre/mpt/skriptum.pdf` entwickle ein Modell zur Bestimmung der Energie der ersten Atombombe. Im Lauf der Entwicklung bestätige die Bedingungen des Buckingham Pi Satzes. Hinweis: Siehe den Text ab Seite 12 im Skriptum. (*gelöst von Frau Zorana Keserovic*)

4. Für die chemischen Daten im Beispiel 2.6 auf Seite 12 im Skriptum `http://www.uni-graz.at/georg.propst/SN1.pdf` bestimme die Regressionsgerade für die transformierten Daten für die Reaktionsordnungen $m = 1, 2, 3$ und berechne die entsprechenden Korrelations-Koeffizienten, um die Reaktionsordnung quantitativ zu schätzen.

5. Löse das Anfangswertproblem analytisch
$$\left\{ \begin{array}{rcl} P'(t) & = & \frac{P(t)}{\tau}\left[1 - \frac{P(t)}{K}\right], \quad t > t_0 \\ P(t_0) & = & P_0 \end{array} \right.$$
und numerisch mit MATLAB (wobei die Parameter vom Benutzer eingegeben werden), und vergleiche die Ergebnisse graphisch. (*gelöst von Herrn Rüdiger Burghart*)

6. Die (unbekannte) Funktion $f(x) = x^2/(1+20x^2)$ soll von einer verfügbaren Abtastung geschätzt werden. In den folgenden seien $n = 10$ und $m = 100$.

   (a) Bestimme ein Polynom P $n$ten Grades, das erfüllt
   $$P(x_k) = f(x_k), \qquad x_k = -1 + 2k/n, \quad k = 0, \dots, n$$
   unter der Annahme dass die Werte $f(x_k)$ in den gleichmäßig verteilten Stutzstellen x_k verfügbar sind.

(b) Bestimme ein Polynom Q $n$ten Grades, das erfüllt

$$Q(t_j) = f(t_j), \qquad t_j = \cos((j+1/2)*\pi/(n+1)), \quad j = 0, \dots, n$$

unter der Annahme dass die Werte $f(t_j)$ in den Nullstellen t_j des Tchebyshev'chen Polynoms $T_n(t) = \cos(n \cos^{-1}(t))$ verfügbar sind.

(c) Bestimme ein Polynom R $n$ten Grades, das das Funktional minimiert:

$$\sum_{i=0}^{m} |R(y_i) - f(y_i)|^2, \qquad y_i = -1 + 2i/m, \quad i = 0, \dots, m$$

unter der Annahme dass die Werte $f(y_i)$ in den gleichmäßig verteilten Stutzstellen y_i verfügbar sind.

Stelle P, Q, R und f gemeinsam grafisch dar. (*gelöst von Herrn Patrick Ditz*)

7. Für das Räuber-Beute Modell,

$$x' = (a_1 - b_1 y)x, \quad y' = (b_2 x - a_2)y$$

zeige dass die Lösungskurven für eine gegebene Konstante c erfüllen:

$$a_2 \ln(x) - b_2 x + a_1 \ln(y) - b_1 y = \ln(c)$$

und stelle diese mit Matlab für verschiedene Werte von c graphisch dar. Zeige dass das Gleichgewicht $(a_2/b_2, a_1/b_1)$ stabil ist. Hinweis: Für Stabilität soll man eine Lyapunov Funktion verwenden.

8. Für das Konkurrenz Modell,

$$x' = (a_1 - b_1 y)x, \quad y' = (a_2 - b_2 x)y$$

zeige dass die Lösungskurven für eine gegebene Konstante c erfüllen:

$$-a_2 \ln(x) + b_2 x + a_1 \ln(y) - b_1 y = \ln(c)$$

und stelle diese mit Matlab für verschiedene Werte von c graphisch dar. Zeige dass das Gleichgewicht $(a_2/b_2, a_1/b_1)$ instabil ist. Hinweis: Für Stabilität soll man eine Jacobi-Matrix verwenden.

9. Für die reversible Reaktion,

$$A + B \underset{\kappa_2}{\overset{\kappa_1}{\rightleftharpoons}} C + D$$

sind die Anfangskonzentrationen

$[A](0) = 3$ Mol/Liter, $[B](0) = 2$ Mol/Liter, $[C](0) = 1$ Mol/Liter und $[D](0) = 0$ Mol/Liter.

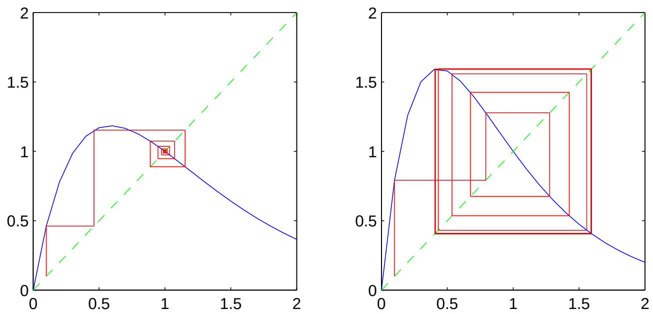
Die Reaktionskonstanten sind $\kappa_1 = 2$ (Liter·Minuten/Mol) für die Vorwärtsreaktion und $\kappa_2 = 2$ (Liter·Minuten/Mol) für die Rückwärtsreaktion. Finde die Konzentrationen $[A](t)$, $[B](t)$, $[C](t)$ und $[D](t)$ als Funktionen von der Reaktionszeit t Minuten, und stelle diese gemeinsam graphisch dar. Finde die Gleichgewichtskonzentrationen dieser Chemikalien. Zeige dass diese Gleichgewichte stabil sind.

10. Leite die Formeln (5) und (8) in `http://math.uni-graz.at/keeling/peakoil.pdf` von (4) und (7) her. Stelle $A(t+dt) - A(t)$ und $N(t+dt) - N(t)$ als Funktionen vom Fasspreis $P(t)$ graphisch dar. In der selben Grafik stelle $A'(t)$ und $N'(t)$ als Funktionen vom Fasspreis $P(t)$ graphisch dar. Konvergiert die Kreuzung, $A(t+dt) - A(t) = N(t+dt) - N(t)$ zur Kreuzung $A\prime(t) = N'(t)$ für $dt \to 0$? Leite die Formel (9) her. Finde ein Gleichgewicht für dieses Modell, das in Tabelle 2 nicht steht. Bestimme ob das neue Gleichgewicht stabil ist.

11. Schreibe einen Matlab-Code, der die Iterierten des Lachs-Modells

$$\xi_{n+1} = F(\xi_n) = \xi_n e^{r(1-\xi_n)}$$

für eingegebene ξ_0 und r ausgibt und so graphisch darstellt:

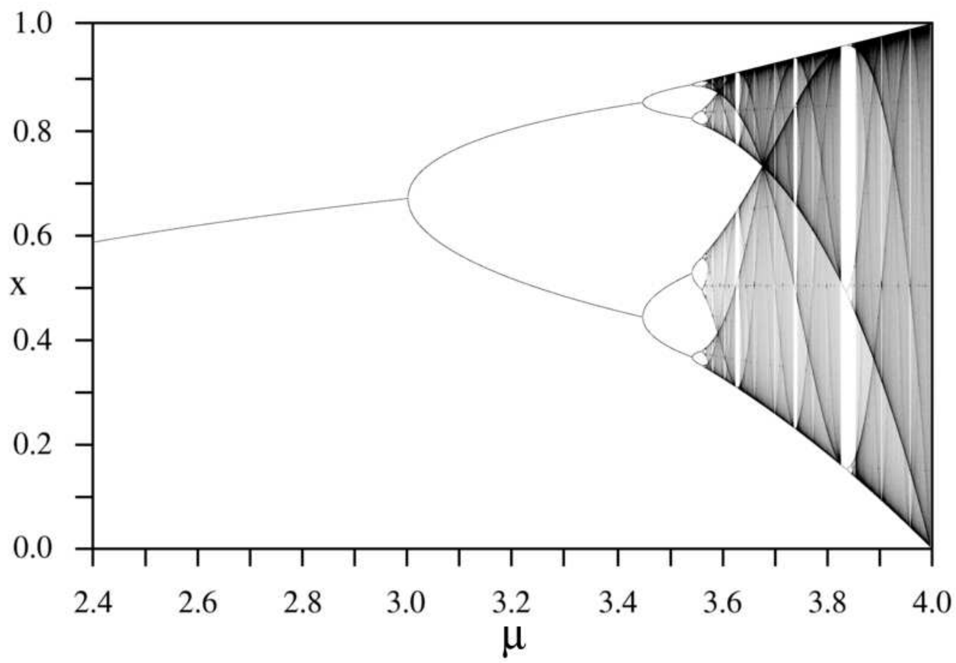


Hier ist $\xi_0 = 0.1$ für beide Fälle, und $r = 1.7$ gilt für die linke Graphik während $r = 2.3$ für die rechte Graphik gilt. Der Grenzwert für die linke Graphik ist $\xi^*_{(0)} = 1.0$, und die 2-periodischen Grenzwerte für die rechte Graphik sind $\xi^*_{(1)} = 0.4078$ und $\xi^*_{(2)} = 1.5922$.

12. Für das diskrete logistische Modell,

$$x_{n+1} = \mu x_n(1 - x_n)$$

sei $\{x^*_{n,j}(\mu) : j = 0, \dots, 2^n - 1\}$ eine 2^n-periodische Lösung für ein gewisses μ. Für $n = 0$ finde die Werte μ_0 und μ_1, wobei es ein stabiles Gleichgewicht $x^*_{0,0}(\mu)$ für $\mu_0 < \mu < \mu_1$ gibt. Für $n = 1$ finde den Wert μ_2, wobei es eine stabile 2−periodische Lösung $\{x^*_{1,0}(\mu), x^*_{1,1}(\mu)\}$ für $\mu_1 < \mu < \mu_2$ gibt. Stelle die Kurven $x^*_{0,0}(\mu)$, $\mu_0 < \mu < \mu_1$, $x^*_{1,0}(\mu)$, $\mu_1 < \mu < \mu_2$ und $x^*_{1,1}(\mu)$, $\mu_1 < \mu < \mu_2$ gemeinsam graphisch dar, um den entsprechenden Teil des folgenden Bifurkationbilds zu sehen.



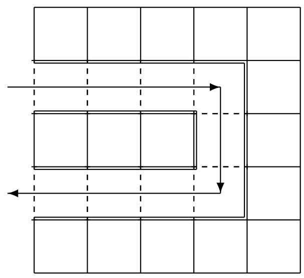
13. Für das Erdwärmemodell mit zwei Kompartimenten löse das System

$$\begin{cases} \rho_L c_L V_L T'_L &= hS(T_E - T_L) + \rho_L c_L F(T_P - T_L) \\ \rho_E c_E V_E T'_E &= hS(T_L - T_E) \\ T_L(0) &= T_{L,0} \\ T_E(0) &= T_{E,0} \end{cases}$$

für die zwei extremen Fälle: $F = 0$ und $F \to \infty$. Für den Fall $F \to \infty$ und $T_{\mathrm{E},0} > T_{\mathrm{L},0}$ berechne die gewonnene Wärme $E_{\mathrm{E},0} - E_{\mathrm{E}}(t) = \rho_{\mathrm{E}} c_{\mathrm{E}} V_{\mathrm{E}}(T_{\mathrm{E},0} - T_{\mathrm{E}}(t))$ und finde die Zeitdauer, in der die Erdeenergie zu 90% des Unterschieds zwischen ihrem Anfangswert und ihrem Gleichgewichtswert sinkt.

14. Schreibe das obige Erdwärmemodell in dimensionslose Form um, und identifiziere dimensionslosen Parameter, die das Verhalten des Systems bestimmen, d.h. alle Parameter könnten verschieden für verschiedene Konfiguration sein, aber wenn die dimensionslosen Parameter für solche Konfigurationen gleich sind, ist die Lösung des dimensionslosen Problems für diese Konfigurationen gleich.

15. Mit einer Energiebilanz schreibe ein mathematisches Modell für den Wärmetransport durch das folgende System von Kompartimenten:



wobei Konvektion den Pfeilen entlang stattfindet und Diffusion an jeder Schnittstelle stattfindet. Bemerke dass der Wärmetauschkoeffizient am Rand des Schlauches anders ist als zwischen gleichartigen Zellen.

16. Auf der Webseite `http://math.uni-graz.at/keeling/wtc2.html` wird Folgendes in der Einführung behautet. Zwei Massen m_1 und m_2 treffen einander ohne Schwerkraft. Vor der Kollision haben die Massen die Geschwindigkeiten $\boldsymbol{v}_1$ beziehungsweise $\boldsymbol{v}_2$. Seien $\bar{m}_1$, $\bar{m}_2$, $\bar{\boldsymbol{v}}_1$, $\bar{\boldsymbol{v}}_2$ die entsprechenden Größen nach der Kollision. Unter der Annahme dass keine Masse in der Kollision getauscht wird, d.h. $\bar{m}_i = m_i$, $i = 1, 2$, gelten, und dass bezüglich eines Ursprungs im Schwerpunkt die Bewegungen in einer Dimension eingeschränkt sind, löse das folgende System:

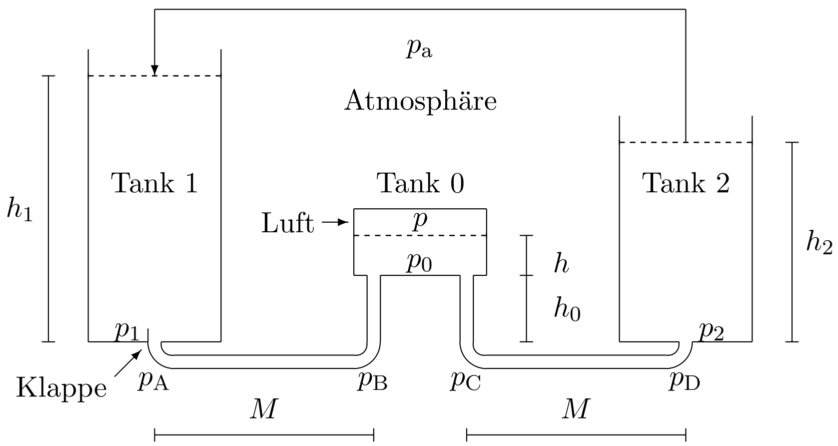
$$\begin{array}{lrcl} \text{Massenerhaltung:} & m_1 + m_2 & = & \bar{m}_1 + \bar{m}_2 \\ \text{Impulserhaltung:} & m_1\boldsymbol{v}_1 + m_2\boldsymbol{v}_2 & = & \bar{m}_1\bar{\boldsymbol{v}}_1 + \bar{m}_2\bar{\boldsymbol{v}}_2 \\ \text{Energieerhaltung:} & \frac{1}{2}m_1|\boldsymbol{v}_1|^2 + \frac{1}{2}m_2|\boldsymbol{v}_2|^2 & = & \frac{1}{2}\bar{m}_1|\bar{\boldsymbol{v}}_1|^2 + \frac{1}{2}\bar{m}_2|\bar{\boldsymbol{v}}_2|^2 \end{array}$$

zu finden:

$$\bar{\boldsymbol{v}}_i = \boldsymbol{v}_{\mathrm{c}} - [\boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{v}_{\mathrm{c}}], \quad i = 1, 2$$

wobei $\boldsymbol{v}_{\mathrm{c}} = (m_1\boldsymbol{v}_1 + m_2\boldsymbol{v}_2)/(m_1 + m_2)$.

17. Anhand der *Gesetze* von Bernoulli und Poiseuille leite die Gleichgewicht-Druckverteilung im folgenden Tanksystem her:



18. Konstruiere eine einfache chemische Reaktion,

$$kA + lB \underset{\kappa_2}{\overset{\kappa_1}{\rightleftharpoons}} mC + nD$$

bei der durch Änderung der (temperatur-abhängigen) Reaktionskonstanten κ_1 und κ_2 eine Änderung der Gleichgewichtslage erfolgt, wie man in Abbildung 9.4(c) in `http://www.uni-graz.at/georg.propst/SN2.pdf` sieht. Stelle die Gleichgewichtslagen bezüglich der Reaktionskonstanten κ_1 und κ_2 explizit dar. Leite eine entsprechende Potential-Landschaft für die Differentialgleichung her.

19. Für das kontinuierliche Verkehrsmodell,

$$\frac{dz_j}{dt}(t+\tau) = \nu \ln\{x_{\max}[z_{j-1}(t) - z_j(t)]\}, \quad j = 2, \dots, N$$

und für den Fall, dass $N = 3$, $\tau = 0$ und $z_1(t) = \nu t$ gelten, zeige dass $z_j(t) = \nu t - (j-1)e/x_{\max}$ eine asymptotisch stabile Lösung ist.

20. Für das diskrete Verkehrsmodell,

$$M[\Phi_j(n+1) - \Phi_j(n)] = \nu \ln\{1 + (x_{\max}/e)[\Phi_{j-1}(n-\sigma) - \Phi_j(n-\sigma)]\}, \quad j = 2, \dots, N$$

und für den Fall, dass $N = 3$, $\sigma = 1$ und $\Phi_1(t) = 0$ gelten, finde eine Bedingung mit der die Lösung $\Phi^* = 0$ asymptotisch stabil ist.

21. Schreibe einen Matlab-Code zur Simulation des verallgemeinerten Räuber-Beute Modells,

$$\begin{aligned} \xi' &= \lambda\xi(1-\xi) - \theta\xi\eta/(\xi+\mu) \\ \eta' &= \eta(1-\eta/\xi) \end{aligned}$$

und zeige für gewisse Werte der Parameter einen stabilen Grenzzyklus auf.

22. Berechne die Dimension (a) einer Strecke (b) der Cantorschen Menge.

23. Mit einer Energiebilanz modelliere den dynamischen (nicht nur statischen) Energiefluss durch ein Fenster mit zwei gleichen Glasscheiben (Dicke = d) und einer Luftspalte (Dicke = L) zwischen den Glasscheiben. Seien T_1 und T_2 die fixierten Innen- und Aussen-Temperaturen. Seien $T_A(t)$ und $T_B(t)$ die Temperaturen an der Innen- und Aussen-Grenzflächen der Luftspalte. Seien k_G und k_L die Wärmeleitfähigkeiten von Glas und von Luft. Mit $\rho = (k_G/k_L)\cdot(L/d)$ zeige:

$$\lim_{t\to\infty} T_A(t) = \frac{(\rho+1)T_1 + T_2}{\rho+2}, \quad \lim_{t\to\infty} T_B(t) = \frac{(\rho+1)T_2 + T_1}{\rho+2}.$$

24. Sei $P(t)$ eine Profitrate in der Zeit t. Sei $G(t) = \int_0^t P(s)ds$ die Gesamtprofit bis zur Zeit t. Definiere $G_s(t)$ als das zur Zeit s auf einem Bankkonto investierte Geld, das bis zu einer späteren Zeit t durch die kontinuierliche Zinsrate δ auf $G(t) = e^{\delta(t-s)}G_s(t)$ wachsen würde. Unter der Annahme dass $G_0(0) = G_0(\infty) = 0$ gilt (d.h. die Gesamtprofit ist Null zu Beginn und der gegenwärtige Wert der Gesamtprofit wird Null nach unendlicher Zeit), zeige:

$$\delta \int_0^\infty G_0(t)dt = \int_0^\infty e^{-\delta t}P(t)dt$$

25. Maximiere das Kostenfunktional,

$$J(u) = \int_0^\infty e^{-\delta t}[pqx(t) - c]u(t)dt$$

über Steuerungen der Form,

$$u(t) = \begin{cases} 0, & 0 < t \leq s \\ U, & s < t < \infty \end{cases}$$

unter der Nebenbedingung,

$$x'(t) = Rx(t)[1 - x(t)/K] - qu(t)x(t), \quad x(0) = K/N$$

um die optimale Steuerung,

$$U^* = \frac{R}{4q}\left\{3 - \frac{c}{pqK} + \frac{\delta}{R} - \sqrt{\left(1 + \frac{c}{pqK} - \frac{\delta}{R}\right)^2 + \frac{8c\delta}{pqKR}}\right\}$$

$$s^* = s(U^*), \quad s(U) = \frac{1}{R}\ln\left\{(N-1)\left(\frac{R}{qU} - 1\right)\right\}$$

herzuleiten.

26. Zwei Länder sollen eine schwindende Ressource teilen. Für jedes Land ist eine faire Menge zum täglichen Verbrauch etabliert worden. Zwei Strategien für jedes Land sind: *Kooperieren* (sich an der fairen Menge anzuhalten) oder *Überlaufen* (so viel wie möglich der Ressource zu verbrauchen). Die täglichen Auszahlungen der zwei Länder können so dargestellt werden:

		Land A	
		Kooperieren	Überlaufen
Land	Kooperieren	(R,R)	(S,T)
B	Überlaufen	(T,S)	(U,U)

wobei die Auszahlungen R, S, T und U erfüllen $T > R > U > S$, $R > (S+T)/2$. Unter der Annahme dass dieses Spiel schon m Mal stattgefunden hat, findet das Spiel am nächten Tag mit Wahrscheinlichkeit p/m (d.h. durch m weil die Ressource schwindend ist). Bestimme ob beim wiederholten Spielen Kooperieren sich überhaupt auszahlt, und wenn ja, über wie viele Tage soll ein Land kooperieren, um den eigenen Gewinn zu maximieren.

27. Zwei Personen treffen sich in der Wüste und überlegen einen Tausch von zwei Ressourcen x und y, damit ihre Lebenszeiten u_1 und u_2 verlängert werden können. Für die Ressourcen x und y hat die erste Person die Vorräte x_1 und y_1 und die entsprechenden Verbrauchsraten a_1 und b_1, und die zweite Person hat die Vorräte x_2 und y_2 und die entsprechenden Verbrauchsraten a_2 und b_2. Eine Person stibt genau dann, wenn eine eigene Ressource verbraucht worden ist. Die Ressourcen und die Verbrauchsraten sind: $x_i = y_i = 1$, $a_1 = b_2 = 1$, $a_2 = b_1 = 2$. Finde ein Gleichgewicht bei diesem Tausch. Berechne den optimalen Tausch bei der Nash Schlichtungsstrategie, wenn das *Status Quo* bei dem Tausch ist: nichts tauschen.

28. Es gibt unendlich viele versteckte Schätze zu finden, aber man wird schlauer beim Suchen. Sei $X(t)$ eine Zufallsvariable für die Anzahl der gefundenen Schätze bis zur Zeit t. Angenommen gilt $P\{X(\delta t) = i | X(0) = i-1\} = b_i \delta t + o(\delta t)$, wobei:

$$b_i = Bi, \quad 1 \le i < \infty$$

zeige für $i_0 \ge 1$ dass

$$P\{X(t) = i\} = \pi_i(t) = \frac{(i-1)!}{(i_0-1)!(i-i_0)!} e^{-Bi_0 t}(1-e^{-Bt})^{i-i_0}, \quad i \ge i_0$$

die Lösung des folgenden Systems ist:

$$\pi_i(t) = 0, \quad 0 \le i < i_0; \qquad \pi_i'(t) = b_{i-1}\pi_{i-1}(t) - b_i \pi_i(t), \quad i \ge i_0; \quad \pi_i(0) = \delta_{i,i_0}$$

Dann zeige dass der Erwartungswert $x(t) = E[X(t)]$ erfüllt: $x(t) = i_0 e^{Bt}$.

29. Für eine Zufallsvariable $X(t)$ seien $\pi_n(t) = P(X(t) = n)$ Wahrscheinlichkeiten, die erfüllen:

$$\begin{aligned} \pi_0'(t) &= -b_0 \pi_0(t) + d_1 \pi_1(t) \\ \pi_n'(t) &= -(b_n + d_n)\pi_n(t) + b_{n-1}\pi_{n-1}(t) + d_{n+1}\pi_{n+1}(t), \quad n = 1, \dots, \infty \end{aligned}$$

wobei

$$b_n = n(\beta_1 - \beta_2 n) \quad d_n = n(\mu_1 + \mu_2 n)$$

Zeige dass der Erwartungswert $x(t) = E[X(t)]$ und die Varianz $\sigma^2(t) = E[X(t)^2] - E[X(t)]^2$ erfüllen:

$$x'(t) = \frac{x(t)}{\tau}\left[1 - \frac{x(t)}{K}\right] - \nu\sigma^2(t), \qquad \tau = \frac{1}{\beta_1 - \mu_1}, \quad K = \frac{\beta_1 - \mu_1}{\beta_2 + \mu_2}, \quad \nu = (\beta_2 + \mu_2).$$

Also wenn $\sigma(t) \approx 0$ gilt, ist $x(t)$ ungefähr logistisch. Schreibe einen Matlab-Code, um $x(t)$ und $\pi_n(t)$ für $n = 0, \dots, N$ zu berechnen und graphisch darzustellen. (Hinweis: Wähle β_1 und β_2 so aus, dass $b_n \ge 0$ gilt für $n = 0, \dots, N$.)

30. Für eine Zufallsvariable $X(t)$ seien $\pi_n(t) = P\{X(t) = n\}$ Wahrscheinlichkeiten, die erfüllen:

$$\begin{aligned} \pi_0'(t) &= -b_0\pi_0(t) + d_1\pi_1(t) \\ \pi_n'(t) &= -(b_n + d_n)\pi_n(t) + b_{n-1}\pi_{n-1}(t) + d_{n+1}\pi_{n+1}(t), \quad 1 \le n \le N-1 \\ \pi_N'(t) &= -d_N\pi_N(t) + b_{N-1}\pi_{N-1}(t) \end{aligned}$$

wobei

$$b_n = 1/c, \quad d_n = \begin{cases} 2/s, & 2 \le n \le N \\ 1/s, & n = 1 \end{cases} \quad \text{und} \quad \rho = s/c.$$

Für das stabile Gleichgewicht $\{\pi_n(\infty)\}$ des obigen Systems zeige

$$E[X(\infty)] = \pi_0 \rho \frac{N(\rho/2)^{N+1} - (N+1)(\rho/2)^N + 1}{(1-\rho/2)^2}, \quad \pi_0 = \frac{1-\rho/2}{1+\rho/2 - \rho(\rho/2)^N}$$

wobei

$$E[X(\infty)] \xrightarrow{\rho\to 2} \frac{N(N+1)}{1+2N}, \quad E[X(\infty)] \xrightarrow{N\to\infty} \frac{4\rho}{4-\rho^2} \equiv L_2(\rho)$$

31. Gegeben dass eine Zufallsvariable $Y(t)$ die Gleichung $P(Y \le t) = g(t)$ erfüllt, berechne den Erwartungswert $E[Y]$ von Y.

32. Waren werden innerhalb des Zeitintervalls $0 \leq t \leq 1$ verkauft, und Profit soll maximiert werden. Zu Beginn dieses Intervalls werden u Einheiten der Waren bestellt und sofort geliefert. Im Lauf des Intervalls werden Z Einheiten gekauft, wobei diese Zufallsvariable für die Nachfrage so geschätzt worden ist, die folgende Wahrscheinlichkeitsdichte zu haben:

$$f(z) = \frac{\chi_{[a,b]}(z)}{b-a}, \quad \chi_{[a,b]}(z) = \begin{cases} 1, & a \leq z \leq b \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Die Fixkosten der Firma sind k, die Einheitskosten sind c_0 und der Einheitspreis für Konsumenten ist p. Die Lagerungskosten sind:

$$c_1 \int_0^1 \zeta(t) dt$$

wobei die Anzahl der gelagerten Waren zur Zeit t ist gegeben durch

$$\zeta(t) = \begin{cases} u, & t = 0 \\ (u-Z) \cdot H(u-Z), & t > 0 \end{cases}$$

Maximiere den Erwartungswert des Profits, um die optimale Bestellung u^* zu finden.