PROJEKT IN "EINFÜHRUNG IN DIE MODELLIERUNG"

MICHAEL JUHOS (0512461), MARLENE LEPUSCHITZ (0630896), SOFIE WALTL (0710478)

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung

In unserem Projekt modellieren wir die Erwärmung eines Getränkes, das in einen Kühlschrank gestellt wird. Um diesen Sachverhalt zu modellieren, haben wir drei verschiedene Modelle entwickelt. Zum letzen Modell haben wir Experimente durchgeführt und die Messdaten mit unseren Berechnungen verglichen.

2. Variante I

Wir modellieren den Abkülungprozess mit Hilfe des Newton'schen Abkülungsgesetzes.

Dieses lautet

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_L),$$

dabei sei T die momentane Temperatur im Bier, T_L die Temperatur der Kühlschranksluft (die Verpackung des Bieres wird ignoriert), T_G die Anfangstemperatur im Bier, und k die Wärmeleitfähigkeit. Weiters wurde bei diesem Modell die Kühlschrankstemperatur als konstant angesehen, was einem gegenüber dem Biervolumen sehr großen Luftvolumen entspräche.

Auf diese Weise kann mit Trennung der Veränderlichen gearbeitet werden:

$$\frac{dt}{dt} = -k(T - T_L)$$

$$\frac{T'}{T - T_L} = -k$$

$$\int_0^t \frac{T'(\tau)}{T(\tau) - T_L} d\tau = -k \int_0^t d\tau$$

$$ln\,(T(\tau) - T_L)\;|_0^t = -kt$$

$$ln \left(\frac{T(t) - T_L}{T_B - T_L} \right) = -kt$$

$$t = -\frac{1}{k} ln \left(\frac{T(t) - T_L}{T_B - T_L} \right)$$

Bei nun bekannter Trinktemperatur $T(t)$ und den anderen Werten kann leicht die Kühlzeit für das Bier berechnet werden.

Dieses Modell wurde verworfen, da es sehr trivial ist und kaum einen aufwändigen Modellierungsprozess enthält.

3. Variante II

Dieser Variante liegt die Wärmeleitungsgleichung zu Grunde:

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla(k \nabla T)$$

ρ ... Dichte
c ... spezifische Wärmekapazität
k ... Wärmeleitfähigkeit

Wir nehmen die Bierflasche als Hohlkugel an, die sich in einem Raum mit konstanter Temperatur befindet.

Anfangsbedingung:
Es werden folgende Bezeichnungen verwendet:
a ... Radius der Bierflasche
b ... Radius des Bieres
T_B ... Temperatur des Bieres zu Beginn

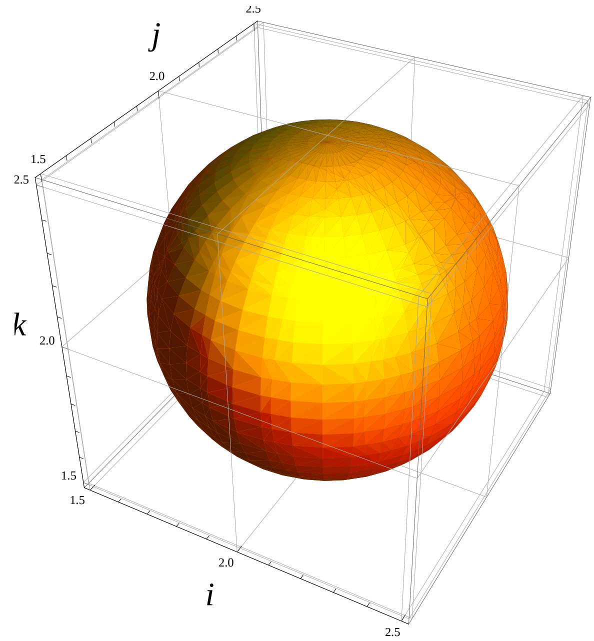

ABBILDUNG 1. Bierkugel in Raum mit konstanter Temperatur

T_L ... Temperatur der Luft (konstant)

Wir versuchen ein Polynom dritten Grades zu finden, das die Außen- und Biertemperatur im Glas interpoliert, und kommen zu folgendem Ergebnis:

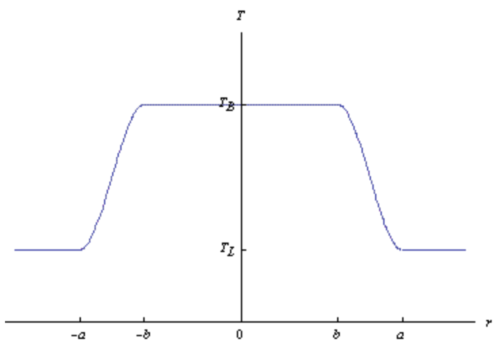

ABBILDUNG 2. Anfangsbedingung

$$T_G(r) = \frac{2(T_L - T_B)}{(a-b)^3}(r-b)^3 + \frac{3(T_L - T_B)}{(a-b)^{-2}}(r-b)^{-2} + T_B$$

Somit ergibt sich die gesamte Anfangstemperatur zu

$$T_0(r) = \begin{cases} T_B, & r \in [-b, b] \\ T_G(r), & r \in (-a, -b) \cup (b, a) \\ T_L, & sonst \end{cases}$$

Nun lösen wir die Differenzialgleichung mit einem Separationsansatz:

$$T(t, \overrightarrow{x}) := u(\overrightarrow{x})v(t)$$

$$\rho c \frac{\partial u(\overrightarrow{x})v(t)}{\partial t} = \nabla(k\nabla(u(\overrightarrow{x})v(t)))$$

$$\rho c u(\overrightarrow{x})v'(t) = v(t)\nabla(k\nabla(u(\overrightarrow{x})))$$

$$\rho c \frac{v'(t)}{v(t)} = \frac{\nabla(k\nabla u(\overrightarrow{x}))}{u(\overrightarrow{x})}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (1)\ \rho c \frac{v'(t)}{v(t)} = -\lambda \\ (2)\ \frac{\nabla k \nabla u(\overrightarrow{x})}{u(\overrightarrow{x})} = -\lambda \end{cases} \lambda \text{ konstant}$$

$$(1) \Rightarrow\ v'(t) = -\frac{\lambda}{\rho c} v(t)$$

$$\Rightarrow v(t) = \mathsf{e}^{\frac{-\lambda}{\rho c} t}$$

$$(2) \text{ und } k \text{ stückweise konstant} \Rightarrow \frac{k\Delta u(\overrightarrow{x})}{u(\overrightarrow{x})} = -\lambda$$

$$\Delta u(\overrightarrow{x}) = -\frac{\lambda}{k} u(\overrightarrow{x})$$

Nun drücken wir den Ortsvektor $\overrightarrow{x}$ in Kugelkoordinaten r, ϑ, φ aus:

$$\Delta u(r, \vartheta, \varphi) = -\frac{\lambda}{k} u(r, \vartheta, \varphi)$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial \vartheta}\left(\sin\vartheta \frac{\partial u}{\partial \vartheta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\vartheta}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = -\frac{\lambda}{k} u$$

Da unser Problem kugelsymmetrisch ist, hägt T nicht von ϑ und φ ab. Deshalb vereinfacht sich die Gleichung folgendermaßen:

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) = \frac{-\lambda}{k}u$$
$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) = \frac{-r^2\lambda}{k}u$$

Durch eine Substitution $x := \sqrt{\frac{\lambda}{k}}r$ erhalten wir:

$$\frac{\partial}{\partial r} = \frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial}{\partial x} = \sqrt{\frac{\lambda}{k}}\frac{\partial}{\partial x}$$
$$\Rightarrow \sqrt{\frac{\lambda}{k}}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{k}{\lambda}x^2\sqrt{\frac{\lambda}{k}}\frac{\partial u}{\partial x}\right) = -x^2u$$
$$\frac{1}{x}\frac{\partial^2(xu)}{\partial x^2} + u = 0$$

Eine weitere Substitution $u =: \frac{s(x)}{\sqrt{x}}$ wird vorgenommen:

$$0 = \frac{1}{x}\frac{\partial^2\sqrt{x}s}{\partial x^2} + \frac{s}{\sqrt{x}} = \frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}s + \sqrt{x}\frac{\partial s}{\partial x}\right)\frac{s}{\sqrt{x}} =$$
$$= \frac{1}{x}\left(-\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}s + \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\frac{\partial s}{\partial x} + \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\frac{\partial s}{\partial x} + x^{\frac{1}{2}}\frac{\partial^2 s}{\partial x^2}\right) + x^{-\frac{1}{2}}s =$$
$$= -\frac{1}{4}x^{-\frac{5}{2}}s + x^{-\frac{3}{2}}\frac{\partial s}{\partial x} + x^{-\frac{1}{2}}\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} + x^{-\frac{1}{2}}s = 0$$
$$-\frac{1}{4x^2}s + \frac{1}{x}\frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} + s = \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} + \frac{1}{x}\frac{\partial s}{\partial x} + \left(1 - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{x^2}\right)s = 0$$
$$\Rightarrow s(x) = J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin(x),$$

wobei $J_{\frac{1}{2}}$ die $\frac{1}{2}$-te Besselfunktion erster Art ist. Damit erhalten wir als Löung für u:

$$u_\lambda\left(r\sqrt{\frac{\lambda}{k}}\right) = \frac{1}{\sqrt{r\sqrt{\frac{\lambda}{k}}}}J_{\frac{1}{2}}\left(r\sqrt{\frac{\lambda}{k}}\right);$$

λ sind dabei die Nullstellen der Besselfunktion und müssen so bestimmt werden, dass die Randbedingungen unserer Differentialgleichung erfüllt werden. Die gesamte Lösung ist dann eine Linearkombination:

$$T(t,r) = \sum_{\lambda} a_\lambda \mathrm{e}^{-\frac{\lambda}{\rho c}t} u_\lambda(r),$$

wobei die Koeffizienten so gewählt werden, dass die Anfangsbedingung erfüllt ist, d.h.

$$T(0,r) = T_0(r) = \sum_{\lambda} a_\lambda u_\lambda(r).$$

Dieses Modell ist zwar nicht mehr so trivial wie die erste Variante, aber der Ansatz ist sehr klassisch: Alles wird von Hand gerechnet und mit Hilfe spezieller Funktionen gelöst, numerische Methoden bleiben weitgehend ausgespart. Aus diesem Grunde wurde auch dieser Ansatz verworfen.

4. Variante III in zwei Dimensionen

Wieder ist das Grundprinzip dieser Variante die Wärmeleitungsgleichung. Zunächst nehmen wir unseren Kühlschrank sowie unsere Bierflasche quadratisch an. Der Kühlschrank wird durch eine $N \times N$-Matrix modelliert.

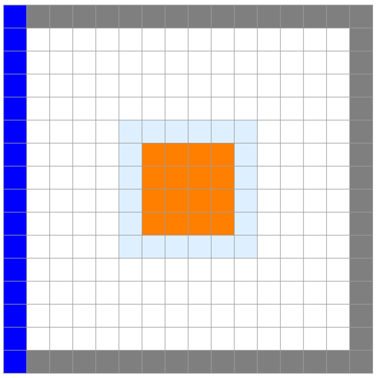

Abbildung 3. Zweidimensionaler Kühlschrank. Bierfelder erscheinen in Orange, Glas in Hellblau, isolierte Wände in Grau und die gekühlte Wand in Dunkelblau.

Anfangsbedingung:
Zu Beginn hat es in allen Feldern innerhalb des Kühlschrankes 21 Grad Celsius.

$$T_{i,j} = 21 \quad \forall i,j = 1,...,N$$

Randbedingungen:
1.) Wir nehmen eine perfekte Isolierung an. Folgende Randbedingungen gelten für $i,j = 1,...,N$:

$$T_{N+1,j} = T_{N,j}$$
$$T_{0,j} = T_{1,j}$$
$$T_{i,N+1} = T_{i,N}$$

2.) Eine Wand des Kühlschrankes wird konstant auf $4°C$ abgekühlt:

$$T_0 = T_{i,0} = 4, \quad i = 1, ..., N$$

Weitere Definitionen und Funktionen

Die verschiedenen Materialien in unserem Kühlschrank haben natürlich nicht alle diesselbe Wärmeleitfähigkeit, Dichte und spezifische ärmekapazität. Um diese Tatsache zu modellieren, definieren wir zunächst verschiedene Bereiche, wie etwa die Menge des Bieres bzw. Menge der Glasflasche. Daraufhin definieren wir Funktionen für die Verteilung der Wärmeleitfähigkeit, Dichte und spezifische Wärmekapazität.

l ... Kantenlänge des (quadratischen) Kühlschrankes

Menge des Bieres
Wir definieren b als die Kantenlänge der Bierflasche. b_N gibt nun die Anzahl der "Bierkästchenän und wird, wenn sich das Bier in der Mitte des Kühlschrankes befindet, wie folgt berechnet:

$$b_N = \left\lceil \frac{1}{2} \left(\frac{b}{l} N - 1 \right) \right\rceil$$

Damit können wir nun die Menge des Bieres B definieren:

$$B = \left\{ (i,j) : i,j \in \left[\frac{N+1}{2} - b_N, \frac{N+1}{2} + b_N \right] \cap \mathbb{Z} \right\}$$

Menge der Glasflasche
Nun gibt g die Dicke der Bierflasche an und g_N die Anzahl der "Glaskästchen".

$$g_N = \left\lceil \frac{1}{2} \left(\frac{b+2g}{l} N - 1 \right) \right\rceil$$

Also ergibt sich die Menge G der Bierflasche:

$$G = \left\{ (i,j) : i,j \in \left[\frac{N+1}{2} - g_N, \frac{N+1}{2} + g_N \right] \cap \mathbb{Z} \right\}$$

Spezifische Wärmekapazität

$$c_{i,j} = \begin{cases} c_B & (i,j) \in B \\ c_G & (i,j) \in G \setminus B \\ c_L & sonst \end{cases}$$

Natürlich verändert sich die spezifische Wärmekapazität mit der Temperatur, allerdings nur in so geringem Maße, sodass wir diese Abhängikeit ignorieren.

Einheit der Spezifische Wärmekapazität: $[c] = \frac{J}{kg.K}$
c_B ... Spezifische Wärmekapazität des Bieres $\approx 4000\frac{J}{kg.K}$
c_G ... Spezifische Wärmekapazität des Glases $\approx 2000\frac{J}{kg.K}$
c_L ... Spezifische Wärmekapazität der Luft $\approx 1500\frac{J}{kg.K}$

Dichte

$$\rho_{i,j} = \begin{cases} \rho_B & (i,j) \in B \\ \rho_G & (i,j) \in G \setminus B \\ \rho_L & sonst \end{cases}$$

Einheit der Dichte: $[\rho] = \frac{kg}{m^3}$
Nachdem wir die Dicht von Bier nicht ausfindig machen konnten, nehmen wir die von Wasser. Diese schwankt in unserem Temperaturintervall $[4°C; 21°C]$ zwischen $[1,27; 1,21]$. Wir nehmen also davon den Mittelwert.

ρ_B ... Dichte des Bieres $\approx 1240\frac{kg}{m^3}$
ρ_G ... Dichte des Glases $\approx 2000\frac{kg}{m^3}$
ρ_L ... Dichte der Luft $\approx 1\frac{kg}{m^3}$

Wärmeleitfähigkeit

$$K_{i,j} = \begin{cases} K_B & (i,j) \in B \\ K_G & (i,j) \in G \setminus B \\ K_L & sonst \end{cases}$$

Einheit der Wärmeleitfähigkeit: $[K] = \frac{W}{m \cdot K}$
K_B ... Wärmeleitfähigkeit des Bieres $\approx 0,58\frac{W}{m \cdot K}$
K_G ... Wärmeleitfähigkeit des Glases $\approx 0,76\frac{W}{m \cdot K}$
K_L ... Wärmeleitfähigkeit der Luft $\approx 0,21\frac{W}{m \cdot K}$

Nun gehen wir wieder von der Wärmeleitungsgleichung aus.

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla (K \nabla T)$$

Da wir die Funktion K nicht von t abängig annehmen, können wir weiter umformen:

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = K \Delta T$$

$$(*) \quad \rho c \cdot \frac{T_{i,j}^{(n+1)} - T_{i,j}^{(n)}}{\Delta t} = K \cdot \left(\frac{T_{i+1,j}^{(n)} - 2T_{i,j}^{(n)} + T_{i-1,j}^{(n)}}{\Delta x^2} + \frac{T_{i,j+1}^{(n)} - 2T_{i,j}^{(n)} + T_{i,j-1}^{(n)}}{\Delta y^2} \right)$$

Da wir unseren Kühlschrank in quadratische Kästchen unterteilen, gilt:

$$\Delta x^2 = \Delta y^2 =: h^2$$

Somit vereinfacht sich die Gleichung:

$$T_{i,j}^{(n+1)} = \frac{\Delta t K}{\rho c h^2} \left(T_{i+1,j}^{(n)} - 4T_{i,j}^{(n)} + T_{i-1,j}^{(n)} + T_{i,j+1}^{(n)} + T_{i,j-1}^{(n)} \right) + T_{i,j}^{(n)}$$

5. Variante III in drei Dimensionen

Nun erweitern wir das zweidimensionale Modell zu einem dreidimensionalen. Unser Kühlschrank wir nun als Würfel mit Kantenlänge N Würfelchen modelliert.

Die Anfangsbedingung (21° C Raumtemperatur) gilt weiterhin:

$$T_{i,j,k} = 21, \quad \forall i, j, k \in \{1, ..., N\}$$

Randbedingungen

Analog zum vorherigen Modell kühlen wir nun die Rückseite des Kühlschrankes auf $4°C$ ab:

$$T_{0,j,k} = 4, \quad \forall j, k \in \{1, ..., N\}$$

Ebenso werden die restlichen Randbedingungen erweitert:

$$\begin{aligned} T_{N+1,j,k} &= T_{N,j,k} \\ T_{i,N+1,k} &= T_{i,N,k} \\ T_{i,j,N+1} &= T_{i,j,N} \\ T_{i,0,k} &= T_{i,1,k} \\ T_{i,j,0} &= T_{i,j,1} \end{aligned}$$

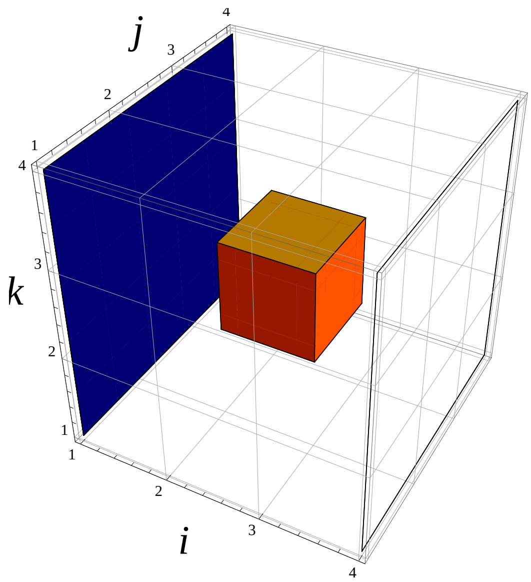

Abbildung 4. Dreidimensionaler Kühlschrank mit würfelförmiger Bierflasche

Weitere Definitionen und Funktionen

Wir adaptieren nun die Mengen B und G.

l ... Kantenlänge des Kühlschrankes
b ... Kantenlänge des würfelförmigen Bieres
g ... Kantenlänge der würfelförmigen Bierflasche

$$B = \left\{ (i,j,k) : i,j,k \in \left[\frac{N+1}{2} - b_N, \frac{N+1}{2} + b_N \right] \cap \mathbb{Z} \right\}$$

$$b_N = \left\lceil \frac{1}{2} \left(\frac{b}{l} N - 1 \right) \right\rceil \text{ Ausdehnung des Bieres}$$

$$G = \left\{ (i,j,k) : i,j,k \in \left[\frac{N+1}{2} - g_N, \frac{N+1}{2} + g_N \right] \cap \mathbb{Z} \right\}$$

$$g_N = \left\lceil \frac{1}{2} \left(\frac{b+2g}{l} N - 1 \right) \right\rceil \text{ Ausdehnung der Bierflasche}$$

Die physikalischen Größen sind natürlich diesselben wie in der vorherigen Variante. Die Verteilungsfunktionen sehen nun wie folgt aus:

$$c_{i,j,k} = \begin{cases} c_B & (i,j,k) \in B \\ c_G & (i,j,k) \in G \setminus B \\ c_L & sonst \end{cases}$$

$$\rho_{i,j,k} = \begin{cases} \rho_B & (i,j,k) \in B \\ \rho_G & (i,j,k) \in G \setminus B \\ \rho_L & sonst \end{cases}$$

$$K_{i,j,k} = \begin{cases} K_B & (i,j,k) \in B \\ K_G & (i,j,k) \in G \setminus B \\ K_L & sonst \end{cases}$$

Das dreidimensionale Pendant zu (*) ist:

$$\rho c \frac{T_{i,j,k}^{(n+1)} - T_{i,j,k}^{(n)}}{\Delta t} =$$

$$K \left(\frac{T_{i+1,j,k}^{(n)} - 2T_{i,j,k}^{(n)} + T_{i-1,j,k}^{(n)}}{\Delta x^2} + \frac{T_{i,j+1,k}^{(n)} - 2T_{i,j,k}^{(n)} + T_{i,j-1,k}^{(n)}}{\Delta y^2} + \frac{T_{i,j,k+1}^{(n)} - 2T_{i,j,k}^{(n)} + T_{i,j,k-1}^{(n)}}{\Delta z^2} \right)$$

Wir haben wieder eine würfelförmige Unterteilung:

$$\Delta x^2 = \Delta y^2 = \Delta z^2 =: h^2$$

Somit vereinfacht sich Gleichung zu

$$\rho c \frac{T_{i,j,k}^{(n+1)} - T_{i,j,k}^{(n)}}{\Delta t} =$$

$$\frac{K}{h^2} \left(T_{i+1,j,k}^{(n)} - 2T_{i,j,k}^{(n)} + T_{i-1,j,k}^{(n)} + T_{i,j+1,k}^{(n)} - 2T_{i,j,k}^{(n)} + T_{i,j-1,k}^{(n)} + T_{i,j,k+1}^{(n)} - 2T_{i,j,k}^{(n)} + T_{i,j,k-1}^{(n)} \right)$$

Wir formen weiter um:

$$T_{i,j,k}^{(n+1)} = \frac{K\Delta t}{\rho c h^2}\Big[T_{i+1,j,k}^{(n)} + T_{i-1,j,k}^{(n)} +$$

$$T_{i,j+1,k}^{(n)} + T_{i,j-1,k}^{(n)} + T_{i,j,k+1}^{(n)} + T_{i,j,k-1}^{(n)} - 6 \cdot T_{i,j,k}^{(n)}\Big] + T_{i,j,k}^{(n)}$$

6. Experimente

Zur dritten Variante des Modells in drei Dimensionen haben wir ein Experimente durchgeführt.

Voraussetzungen
Wir betrachten ein zylinderförmiges Glas, das nicht verschlossen ist.
Abmessungen des Glases:
$h = 16,5$ cm, $d = 6$ cm, Glasdicke unten $G_u = 2$ cm, Glasdicke sonst $G = 0,02$ cm
Abmessungen des Kühlschrankes:
Breite $b = 44$ cm, Höhe $h = 70$ cm, Tiefe $t = 44$ cm

Ergebnis

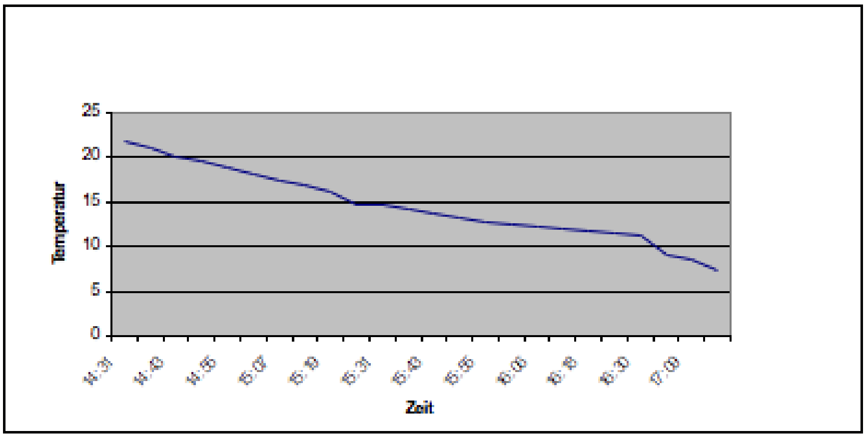

Abbildung 5. Abkühlungsprozess im Experiment

Zeit t in Minuten	Temperatur in ° C
0	21,9
6	21,1
12	20,2
18	19,5
24	18,8
30	18,2
36	17,5
42	16,9
48	16,1
54	14,8
60	14,6
66	14,2
72	13,7
78	13,2
84	12,8
89	12,5
95	12,2
101	11,9
107	11,7
113	11,5
119	11,3
152	9,1
158	8,7
193	7,4

Tabelle 1. Messdaten

Berechnungen
Leider trat beim Durchlaufen unseres Programms mit diesen Daten immer ein Fehler aus, weshalb wir leider keine Rechendaten liefern können.

Besondere Bedingungen des Experiments
Der Kühlschrank war nicht ganz leer und das Glas befand sich nicht ganz in der Mitte, außerdem befindet sich im Kühlchrank ein Gefrierfach.

7. Programme

Es folgen nun die Programmcodes, die wir für die Variante III in zwei und drei Dimensionen geschrieben haben.

7.1. Variante III in zwei Dimensionen.

```
% Materialkonstanten
rho_Luft = 1;
rho_Bier = 1000;
rho_Glas = 2000;

c_Luft = 1500;
c_Bier = 4000;
c_Glas = 2000;

k_Luft = 0.21;
k_Bier = 0.58;
k_Glas = .76;

% Abmessungen
l = 0.5;
b = 0.06;
g = 0.005;

% Iterationsgroessen
t_min = 0;
t_max = 10000;
t_Schritte = 1000000;
dt = (t_max - t_min)/t_Schritte;
N = 51;
h = l/N;

bN = ceil(1/2 * (b * N / l - 1));    % Radius des Biers in Kasteln
gN = ceil(1/2 * ((b + 2 * g) * N / l - 1));    % Radius der Flasche in Kastln

% Matrizen mit den Materialkonstanten, abh. vom Ort
rho_matr = rho_Luft * ones(N, N);
c_matr = c_Luft * ones(N, N);
k_matr = k_Luft * ones(N, N);

rho_matr(((N+1)/2 - gN):((N+1)/2 + gN), ((N+1)/2 - gN):((N+1)/2 + gN)) =
rho_Glas * ones(2 * gN + 1, 2 * gN + 1);
c_matr(((N+1)/2 - gN):((N+1)/2 + gN), ((N+1)/2 - gN):((N+1)/2 + gN)) =
c_Glas * ones(2 * gN + 1, 2 * gN + 1);
```

```
k_matr(((N+1)/2 - gN):((N+1)/2 + gN), ((N+1)/2 - gN):((N+1)/2 + gN)) =
k_Glas * ones(2 * gN + 1, 2 * gN + 1);

rho_matr(((N+1)/2 - bN):((N+1)/2 + bN), ((N+1)/2 - bN):((N+1)/2 + bN)) =
rho_Bier * ones(2 * bN + 1, 2 * bN + 1);
c_matr(((N+1)/2 - bN):((N+1)/2 + bN), ((N+1)/2 - bN):((N+1)/2 + bN)) =
c_Bier * ones(2 * bN + 1, 2 * bN + 1);
k_matr(((N+1)/2 - bN):((N+1)/2 + bN), ((N+1)/2 - bN):((N+1)/2 + bN)) =
k_Bier * ones(2 * bN + 1, 2 * bN + 1);

% Initialisierung der Temperatur
T_tens = (21 + 273.15) * ones(2, N+2, N+2);
T_tens(:, :, 1) = (4 + 273.15) * ones(2, N+2, 1);

T_Bier = [T_tens(1, (N+1)/2, (N+1)/2) - 273.15];

% Iteration
for t = 1:t_Schritte   % Iteration ber die Zeit

  for i = 2:(N+1)   % ITeration ber den Ort
    for j = 2:(N+1)
      T_tens(2, i, j) = T_tens(1, i, j) + dt *
      * k_matr(i-1, j-1) / (rho_matr(i-1, j-1) *
      * c_matr(i-1, j-1) * h^2) * (T_tens(1, i+1, j) +
      + T_tens(1, i-1, j) - 4 * T_tens(1, i, j) +
      + T_tens(1, i, j+1) + T_tens(1, i, j-1));
    end
  end

  for i = 2:(N+1)   % Wiederherstellen der Randbedingungen
    T_tens(2, i, N+2) = T_tens(2, i, N+1);
  end

  for j = 2:(N+1)
    T_tens(2, 1, j) = T_tens(2, 2, j);
    T_tens(2, N+2, j) = T_tens(2, N+1, j);
  end

  T_tens(1, :, :) = T_tens(2, :, :);

  T_Bier = [T_Bier, T_tens(1, (N+1)/2, (N+1)/2) - 273.15];

end

% Grafische Ausgabe
```

```
plot([t_min:dt:t_max], T_Bier);
```

7.2. **Variante III in drei Dimensionen.**

```
clear all;

% Materialkonstanten
rho_Luft = 1;
rho_Bier = 1000;
rho_Glas = 2000;

c_Luft = 1500;
c_Bier = 4000;
c_Glas = 2000;

k_Luft = 0.21;
k_Bier = 0.58;
k_Glas = 0.76;

% Abmessungen
l = 0.5;
b = 0.06;
g = 0.005;

% Iterationsgr en
t_min = 0;
t_max = 2000;
t_Schritte = 500;
dt = (t_max - t_min)/t_Schritte;
N = 51;
h = l/N;

bN = ceil(1/2 * (b * N / l - 1));    % Radius des Biers in Kastln
gN = ceil(1/2 * ((b + 2 * g) * N / l - 1));    % Radius der Flasche in Kastln

% Tensoren mit den Materialkonstanten, abh. vom Ort
rho_matr = rho_Luft * ones(N, N, N);
c_matr = c_Luft * ones(N, N, N);
k_matr = k_Luft * ones(N, N, N);

rho_matr(((N+1)/2 - gN):((N+1)/2 + gN), ((N+1)/2 - gN):((N+1)/2 + gN),
((N+1)/2 - gN):((N+1)/2 + gN)) = rho_Glas * ones(2 * gN + 1, 2 * gN +
1, 2 * gN + 1);
c_matr(((N+1)/2 - gN):((N+1)/2 + gN), ((N+1)/2 - gN):((N+1)/2 + gN),
((N+1)/2 - gN):((N+1)/2 + gN)) = c_Glas * ones(2 * gN + 1, 2 * gN +
```

```
1, 2 * gN + 1);
k_matr(((N+1)/2 - gN):((N+1)/2 + gN), ((N+1)/2 - gN):((N+1)/2 + gN),
((N+1)/2 - gN):((N+1)/2 + gN)) = k_Glas * ones(2 * gN + 1, 2 * gN +
1, 2 * gN + 1);

rho_matr(((N+1)/2 - bN):((N+1)/2 + bN), ((N+1)/2 - bN):((N+1)/2 + bN),
((N+1)/2 - bN):((N+1)/2 + bN)) = rho_Bier * ones(2 * bN + 1, 2 * bN +
1, 2 * bN + 1);
c_matr(((N+1)/2 - bN):((N+1)/2 + bN), ((N+1)/2 - bN):((N+1)/2 + bN),
((N+1)/2 - bN):((N+1)/2 + bN)) = c_Bier * ones(2 * bN + 1, 2 * bN +
1, 2 * bN + 1);
k_matr(((N+1)/2 - bN):((N+1)/2 + bN), ((N+1)/2 - bN):((N+1)/2 + bN),
((N+1)/2 - bN):((N+1)/2 + bN)) = k_Bier * ones(2 * bN + 1, 2 * bN +
1, 2 * bN + 1);

% Initialisierung der Temperatur
T_tens = (21 + 273.15) * ones(2, N+2, N+2, N+2);
T_tens(:, 1, :, :) = (4 + 273.15) * ones(2, 1, N+2, N+2);

T_Bier = [T_tens(1, (N+1)/2, (N+1)/2, (N+1)/2)]; %innerstes Kastel vom Bier

% Iteration
for t = 1:t_Schritte   % Iteration ber die Zeit

  for i = 2:(N+1)   % ITeration ber den Ort
    for j = 2:(N+1)
      for k = 2:(N+1)
        T_tens(2, i, j, k) = T_tens(1, i, j, k) +
        + dt * k_matr(i-1, j-1, k-1) / (rho_matr(i-1, j-1, k-1) *
        * c_matr(i-1, j-1, k-1) * h^2) * (T_tens(1, i+1, j, k) +
        + T_tens(1, i-1, j, k) - 6 * T_tens(1, i, j, k) +
        + T_tens(1, i, j+1, k) + T_tens(1, i, j-1, k) +
        + T_tens(1, i, j, k+1) + T_tens(1, i, j, k-1));
      end
    end
  end

  for j = 2:(N+1)   % Wiederherstellen der Randbedingungen
    for k = 2:(N+1)
      T_tens(2, N+2, j, k) = T_tens(2, N+1, j, k);
    end
  end

  for i = 2:(N+1)
    for j = 2:(N+1)
```

```
      T_tens(2, i, j, 1) = T_tens(2, i, j, 2);
      T_tens(2, i, j, N+2) = T_tens(2, i, j, N+1);
    end
  end

  for i = 2:(N+1)
    for k = 2:(N+1)
      T_tens(2, i, 1, k) = T_tens(2, i, 2, k);
      T_tens(2, i, N+2, k) = T_tens(2, i, N+1, k);
    end
  end

  T_tens(1, :, :, :) = T_tens(2, :, :, :);

  T_Bier = [T_Bier, T_tens(1, (N+1)/2, (N+1)/2, (N+1)/2)];

end

% Grafische Ausgabe
plot([(t_min+dt):dt:t_max], T_Bier);
```

8. Zusammefassung

Auf der Suche nach der Antwort, wie lange man eine lauwarme Flasche Bier in den Kühlschrank stellen muss, sind wir auf drei Methoden der Berechnung gestoen. Zu Beginn versuchten wir das Modell mit Hilfe des Newton'schen Abkühlungsgesetztes zu erstellen. Dabei haben wir viele Vorraussetzungen sehr vereinfacht und z.B.die Existenz oder die Form des Bierbehltnisses vernachlässigt.
Unser nächstes Modell basiert auf der Wärmeleitungsgleichung. Dieser Ansatz ist sehr klassisch.
In unserem letzten Modell betrachten wir nicht nur die Bierflasche und deren Temperatur, sondern auch deren Umgebung. Wir haben also auch einen Kühlschrank modelliert, der an einer Seite geühlt wird und auf den anderen Seiten isoliert ist. Dieses Modell haben wir in zwei und in drei Dimensionen modelliert. Für das letzte Modell haben wir ein Programm geschrieben, das die Messdaten, die wir aus einem Experiment gewonnen haben, mit unseren Berechnungen vergleicht.