

# Projektbericht

## Kondensation an einem Fenster

Florian Hanzer                    Ruth Kalthaus

Sommersemester 2009

### 1 Einleitung

Da Glas ein relativ guter Wärmeleiter ist, sind Fenster einer der größten Schwachpunkte in Bezug auf den Wärmeschutz von Gebäuden. Wie gut oder schlecht ein Fenster Wärme durchlässt, wird vor allem durch folgende Faktoren bestimmt:

- Größe des Fensters – naturgemäß steigt mit der Fenstergröße auch der Wärmeverlust.
- Art der Verglasung – heute sind meist doppelverglaste Fenster üblich; es gibt aber auch Fenster mit Drei- oder Vierfachverglasung.
- Gasfüllung in den Fensterzwischenräumen – früher Luft, heutzutage meistens eine Edelgasfüllung.
- Rahmenkonstruktion – üblicherweise bieten Kunststoffrahmen günstigere Wärmeschutzeigenschaften als Metallrahmen.

Ob Kondensation an der Fensterinnenseite stattfindet oder nicht, hängt ab von der Oberflächentemperatur des Fensters sowie der Luftfeuchtigkeit im Raum. Praktische Erfahrungen haben gezeigt, dass Kondensation zuerst an der Unterseite des Fensters entsteht und dann nach oben wandert. Außerdem wurde festgestellt, dass der Einbau einer Wärmequelle unter dem Fenster die Kondensation verringern kann.

In diesem Projekt soll ein Modell zur Wärmeleitung innerhalb eines Raums erstellt werden, und überprüft, inwieweit sich die praktisch gewonnenen Ergebnisse mit diesem einfachen Modell bestätigen lassen.

Dazu soll zunächst die Raumgeometrie modelliert werden sowie die Wärmeleitung innerhalb des Raums. In weiterer Folge kann das Modell erweitert werden, etwa durch Einbau einer Wärmequelle unterhalb des Fensters und Simulieren der dadurch verursachten Konvektionseffekte.

Durch Modifizieren der Wärmeleitfähigkeiten, der Fenstergeometrie sowie des Strömungsfeldes können so verschiedene Ergebnisse gewonnen werden und somit überprüft, wie gut oder schlecht das Modell die Realität widerspiegelt.

Verwendete Literatur:

- Incropera, Frank P.: *Fundamentals of heat and mass transfer*.

Verwendetes Programmierwerkzeug: MATLAB.

## 2 Durchführung

### 2.1 Aufstellen der Wärmeleitungsgleichung:

Grundlage für die Herleitung der Wärmeleitungsgleichung ist das fouriersche Gesetz, das besagt, dass der Wärmefluss  $q$  proportional zum negativen Gradienten der Temperatur ist:

$$q = -\kappa \nabla T.$$

Die Proportionalitätskonstante  $\kappa$  ist die Wärmeleitfähigkeit (materialabhängig).

Die thermische Energie pro Einheitsvolumen beträgt

$$E = \rho c T,$$

wobei  $\rho$  die Dichte und  $c$  die spezifische Wärmekapazität des Materials beschreibt. Die gespeicherte Energie für ein beliebiges Volumselement  $\Omega$  ist also gegeben durch das Volumenintegral

$$\int_{\Omega} \rho c T dV.$$

Es gilt, dass die zeitliche Änderung der gespeicherten Energie plus dem Wärmefluss nach außen über die Oberfläche von  $\Omega$  Null sein muss:

$$\int_{\Omega} \rho c \frac{\partial T}{\partial t} dV + \int_{\partial\Omega} q \cdot n dA = 0.$$

Durch Einsetzen von  $q$  und Anwendung des Satzes von Gauß erhält man schließlich

$$\int_{\Omega} \rho c \frac{\partial T}{\partial t} dV = \int_{\partial\Omega} (\kappa \nabla T) \cdot n dA = \int_{\Omega} \nabla \cdot (\kappa \nabla T) dV,$$

also

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot (\kappa \nabla T).$$

Da in diesem Projekt nur der stationäre Zustand von Interesse ist, ist die zeitliche Änderung der Temperatur und somit die linke Seite der Wärmeleitungsgleichung Null:

$$\nabla \cdot (\kappa \nabla T) = 0. \quad (1)$$

## 2.2 Diskretisierung in drei Dimensionen

Zur Diskretisierung wurde der betrachtete Raum in jeder Dimension mit jeweils  $N$  Gitterpunkten diskretisiert, also mit insgesamt  $N^3$  Punkten. Im stationären Fall sind für jeden Gitterpunkt die Summe der ein- und ausgehenden Wärmeflüsse Null, also

$$\sum_{i=1}^6 q_i = 0.$$

Die Wärmeflüsse  $q_i$  werden folgendermaßen diskretisiert:

$$q_1 = \frac{T_{i-1,j,k} - T_{i,j,k}}{R_1} = \frac{T_{i-1,j,k} - T_{i,j,k}}{\frac{1}{2\Delta x} \left( \frac{1}{\kappa_{i-1,j,k}} + \frac{1}{\kappa_{i,j,k}} \right)},$$

$$q_2 = \frac{T_{i+1,j,k} - T_{i,j,k}}{R_2} = \frac{T_{i+1,j,k} - T_{i,j,k}}{\frac{1}{2\Delta x} \left( \frac{1}{\kappa_{i+1,j,k}} + \frac{1}{\kappa_{i,j,k}} \right)},$$

$$q_3 = \frac{T_{i,j-1,k} - T_{i,j,k}}{R_3} = \frac{T_{i,j-1,k} - T_{i,j,k}}{\frac{1}{2\Delta x} \left( \frac{1}{\kappa_{i,j-1,k}} + \frac{1}{\kappa_{i,j,k}} \right)},$$

$$\begin{aligned}
q_4 &= \frac{T_{i,j+1,k} - T_{i,j,k}}{R_4} = \frac{T_{i,j+1,k} - T_{i,j,k}}{\frac{1}{2\Delta x} \left( \frac{1}{\kappa_{i,j+1,k}} + \frac{1}{\kappa_{i,j,k}} \right)}, \\
q_5 &= \frac{T_{i,j,k-1} - T_{i,j,k}}{R_5} = \frac{T_{i,j,k-1} - T_{i,j,k}}{\frac{1}{2\Delta x} \left( \frac{1}{\kappa_{i,j,k-1}} + \frac{1}{\kappa_{i,j,k}} \right)}, \\
q_6 &= \frac{T_{i,j,k+1} - T_{i,j,k}}{R_6} = \frac{T_{i,j,k+1} - T_{i,j,k}}{\frac{1}{2\Delta x} \left( \frac{1}{\kappa_{i,j,k+1}} + \frac{1}{\kappa_{i,j,k}} \right)}.
\end{aligned}$$

Für die nötigen Randbedingungen wurde zunächst angenommen, dass die linke und rechte Wand des Raums auf eine feste Temperatur gesetzt sind (Dirichlet-Randbedingungen), und die restlichen Wände perfekt isoliert sind, also kein Wärmefluss nach außen stattfindet (Neumann-Bedingungen). Daraus ergibt sich

$$\left. \begin{array}{ll} q_1 = 0 & \text{für } i = 1 \\ q_2 = 0 & \text{für } i = N \\ q_5 = 0 & \text{für } k = 1 \\ q_6 = 0 & \text{für } k = N \end{array} \right\} \text{Dirichlet}$$

$$\left. \begin{array}{l} q_4 = \frac{T_{\text{links}} - T_{i,j,k}}{R_4} \\ q_5 = \frac{T_{\text{rechts}} - T_{i,j,k}}{R_5} \end{array} \right\} \text{Neumann}$$

### 2.3 Setzen der Fenstergeometrie und Wärmeleitfähigkeiten

Die drei verschiedenen im Raum vorkommenden Wärmeleitfähigkeiten (für Luft, Fenster und Außenwand) wurden zunächst auf annähernd realistische Werte gesetzt, die gegebenenfalls variiert werden können:  $\kappa_{\text{Luft}} = 5 \text{ W/(K} \cdot \text{m)}$ ,  $\kappa_{\text{Wand}} = 0.3 \text{ W/(K} \cdot \text{m)}$ ,  $\kappa_{\text{Fenster}} = 1 \text{ W/(K} \cdot \text{m)}$ . Dabei ist zu bemerken, dass Luft prinzipiell eine sehr niedrige Wärmekapazität von etwa  $0.026 \text{ W/(K} \cdot \text{m)}$  aufweist, turbulente Luft (wie sie im Raum vorkommt) jedoch eine um mehrere Größenordnungen höhere.

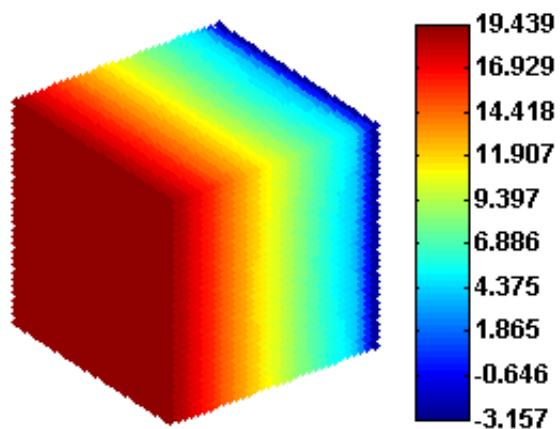


Abbildung 1: Temperaturverteilung im Raum.  $\kappa_{\text{Luft}} = 2$ ,  $\kappa_{\text{Wand}} = 0.3$ ,  $\kappa_{\text{Fenster}} = 1$ .

## 2.4 Untersuchen der Kondensation ohne Konvektion

Der Taupunkt hängt von Temperatur und Luftfeuchtigkeit ab. Im Projekt werden diese beiden Größen als konstant angenommen, was für die Kondensation bedeutet, dass sie nur von der Oberflächentemperatur am jeweiligen Punkt abhängt.

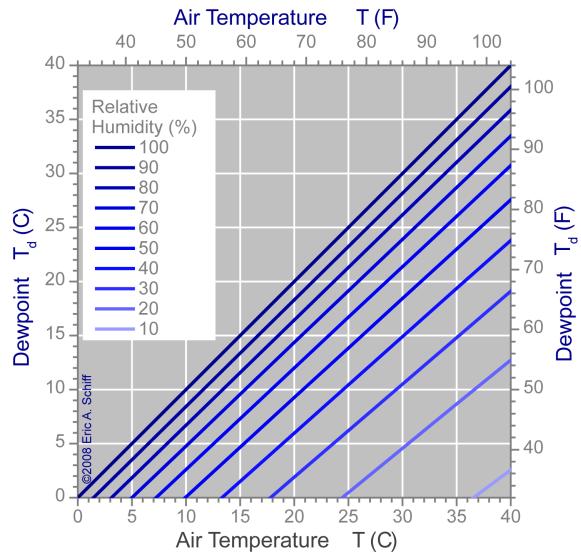


Abbildung 2: Taupunkt in Abhangigkeit von Luftfeuchtigkeit und Luftperatur. (Quelle: Wikipedia)

Im Folgenden dargestellt sind einige Temperatur- und Kondensationsplots fur verschiedene Warmeitfahigkeiten.

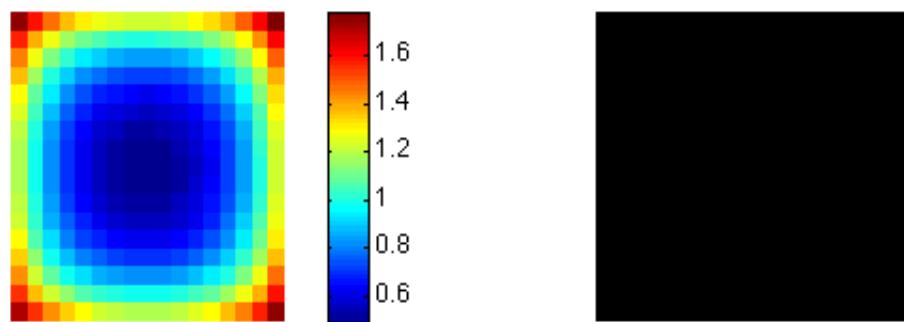


Abbildung 3: Temperatur- und Kondensationsverteilung am Fenster (schwarz = Kondensation, wei = keine Kondensation).  $\kappa_{\text{Luft}} = 2$ ,  $\kappa_{\text{Wand}} = 0.3$ ,  $\kappa_{\text{Fenster}} = 1$ , Taupunkt  $10^{\circ}\text{C}$ .

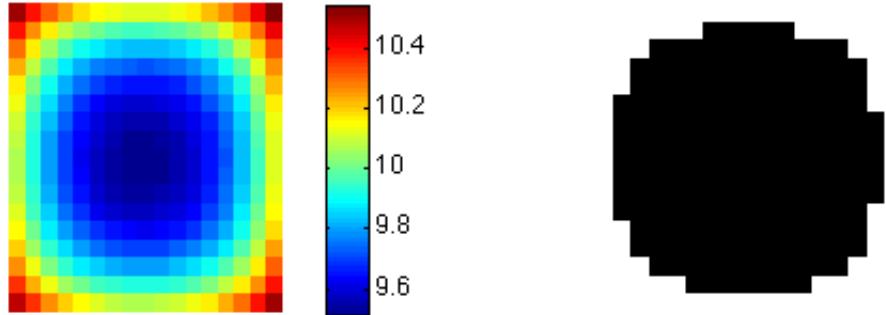


Abbildung 4: Temperatur- und Kondensationsverteilung am Fenster.  $\kappa_{\text{Luft}} = 5$ ,  $\kappa_{\text{Wand}} = 0.1$ ,  $\kappa_{\text{Fenster}} = 0.5$ , Taupunkt  $10^{\circ}\text{C}$ .

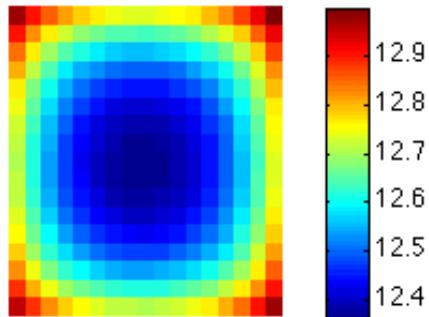


Abbildung 5: Temperatur- und Kondensationsverteilung am Fenster.  $\kappa_{\text{Luft}} = 10$ ,  $\kappa_{\text{Wand}} = 0.1$ ,  $\kappa_{\text{Fenster}} = 0.5$ , Taupunkt  $10^{\circ}\text{C}$ .

## 2.5 Einbau der zusätzlichen Wärmequelle

Der Boden des Raums wird in einem definierten Bereich vor dem Fenster ( $1 \leq i \leq N, j_{\text{start}} \leq j \leq j_{\text{end}}$ ) mittels Neumann-Randbedingungen auf eine feste Temperatur  $T_{\text{heater}}$  gesetzt, um eine Heizung zu simulieren.

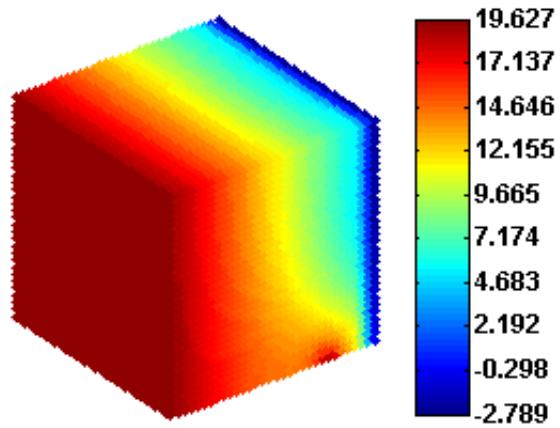


Abbildung 6: Temperaturverteilung im Raum mit zusätzlicher Wärmequelle.  
 $\kappa_{\text{Luft}} = 2$ ,  $\kappa_{\text{Wand}} = 0.3$ ,  $\kappa_{\text{Fenster}} = 1$ ,  $T_{\text{heater}} = 22 \text{ }^{\circ}\text{C}$ .

## 2.6 Erstellen des Strömungsfeldes

Für den späteren Einbau des Advektionsterms wurde zunächst ein Strömungsfeld erstellt. Es wurde angenommen, dass die warme Luft vom Heizkörper ausgehend nach oben steigt und auf der gegenüberliegenden Raumsseite wieder absinkt. Um dies zu realisieren, wurde ein “ellipsenförmiges” Strömungsfeld implementiert. Als Mittelpunkt der Ellipse wurde der Punkt  $(j = j_{\text{window}_{\text{start}}} / 2, k = N/2)$  angenommen (gleichmäßige Strömung in  $i$ -Richtung). Vom Mittelpunkt ausgehend werden  $a$  und  $b$  von der Ellipsengleichung  $j^2/a^2 + k^2/b^2 = 1$  bis zum Maximalwert vergrößert.

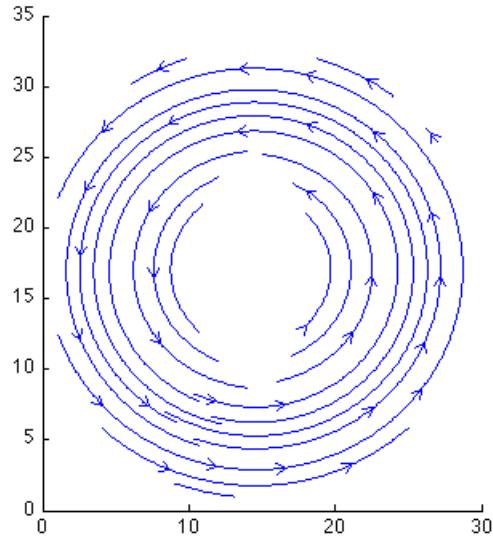


Abbildung 7: Erstelltes Strömungsfeld.

## 2.7 Einbau des Konvektionsterms

Um die Konvektion zu implementieren, wird die Wärmeleitungsgleichung (1) um den Term  $v \cdot \nabla T$  erweitert, wobei  $v$  das Strömungsfeld bezeichnet. Die resultierende Gleichung ist somit

$$\nabla \cdot (\kappa \nabla T) + v \cdot \nabla T = 0.$$

Die Diskretisierung von  $v \cdot \nabla T = v_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_y \frac{\partial T}{\partial y} + v_z \frac{\partial T}{\partial z}$  erfolgt wieder mittels finiter Differenzen:

$$\begin{aligned}\frac{\partial T}{\partial x} &\approx \frac{T_{i,j+1,k} - T_{i,j-1,k}}{2\Delta x}, \\ \frac{\partial T}{\partial z} &\approx \frac{T_{i,j,k+1} - T_{i,j,k-1}}{2\Delta x}.\end{aligned}$$

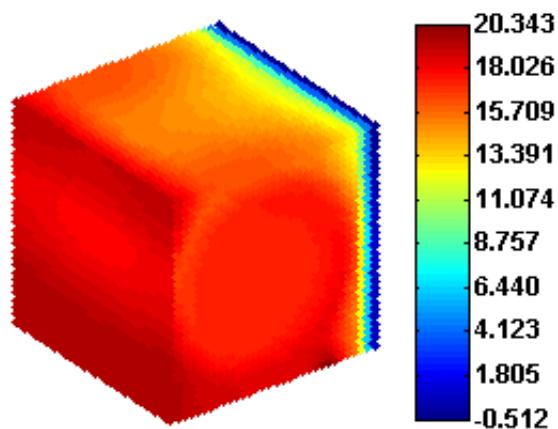


Abbildung 8: Temperaturverteilung im Raum nach Einbau des Konvektionsterms.  $\kappa_{\text{Luft}} = 2$ ,  $\kappa_{\text{Wand}} = 0.3$ ,  $\kappa_{\text{Fenster}} = 1$ ,  $T_{\text{heater}} = 22 \text{ }^{\circ}\text{C}$ , Strömungsgeschwindigkeit  $10^{-3}$ .

## 2.8 Untersuchen der Kondensation mit Konvektion

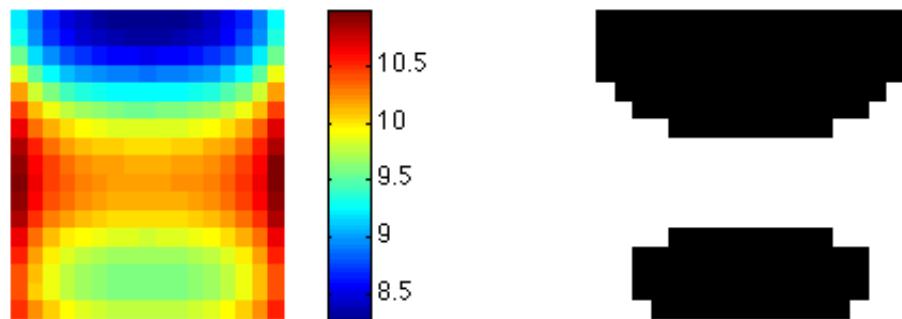


Abbildung 9: Temperatur- und Kondensationsverteilung am Fenster.  $\kappa_{\text{Luft}} = 2$ ,  $\kappa_{\text{Wand}} = 0.3$ ,  $\kappa_{\text{Fenster}} = 1$ , Taupunkt  $10 \text{ }^{\circ}\text{C}$ , Strömungsgeschwindigkeit  $10^{-3}$ .

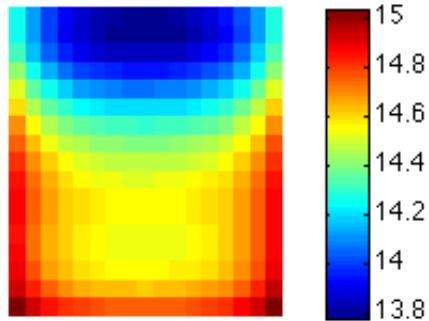


Abbildung 10: Temperatur- und Kondensationsverteilung am Fenster.  
 $\kappa_{\text{Luft}} = 5$ ,  $\kappa_{\text{Wand}} = 0.1$ ,  $\kappa_{\text{Fenster}} = 0.5$ , Taupunkt  $10^{\circ}\text{C}$ , Strömungsgeschwindigkeit  $10^{-3}$ .

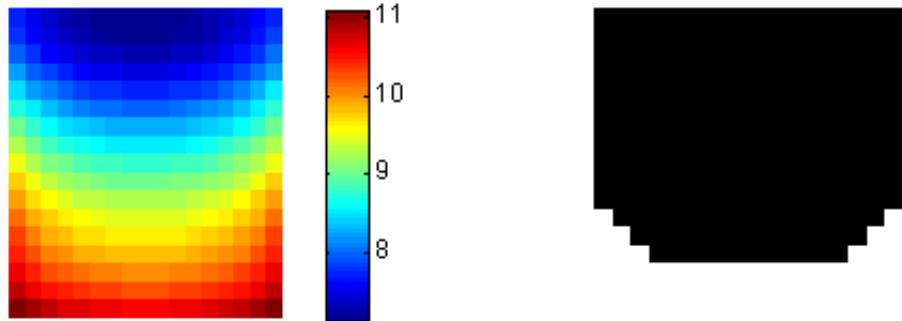


Abbildung 11: Temperatur- und Kondensationsverteilung am Fenster.  
 $\kappa_{\text{Luft}} = 3$ ,  $\kappa_{\text{Wand}} = 0.3$ ,  $\kappa_{\text{Fenster}} = 0.7$ , Taupunkt  $10^{\circ}\text{C}$ , Strömungsgeschwindigkeit  $10^{-4}$ .

### 3 Conclusio

Zusammenfassend kann gesagt werden, dass sich unter dem Einfluss von Konvektion der Bereich, in dem diese am Fenster einsetzt, verschiebt. Während ohne Konvektion ein “kreisförmiger” Kondensationsbereich am Fenster beobachtet werden kann, gilt für den Konvektionsterm, dass Kondensation vorwiegend am oberen Bereich des Fensters einsetzt. Die Stärke des Effekts

ist hierbei abhängig von der Wärmeleitfähigkeit des Fensters. Eine deutliche Verbesserung gegenüber der Kondensation ohne Konvektion wird hier etwa für  $\kappa_{Fenster} = 0.5$  beobachtet.

Es sollte jedoch beachtet werden, dass das verwendete Modell viele Vereinfachungen beinhaltet, die die Ergebnisse beeinflussen und daher die Realität nur näherungsweise wiedergeben kann. Um den Effekt genauer zu untersuchen müsste das Modell daher erweitert und die Komplexität vor allem in Hinsicht auf die Implementierung der Konvektion und des Strömungsfelds erhöht werden, was jedoch den Rahmen dieser Projektarbeit sprengen würde.