Mathematische Modellierung der Entwicklung des globalen Trinkwasservorrates

1 Problemstellung

Wasser ist eine erneuerbare Ressource, dennoch wird von vielen Seiten gewarnt, dass mit einer weltweiten Trinkwasserknappheit zu rechnen ist. Die Gründe für den Engpass an lebensnotwendigem Trinkwasser liegen im extensiven Verbrauch und vor allem auch in der Verschmutzung von Trinkwasser. Die Konsequenzen sind, dass Trinkwasser zu einem knappen Gut wird. In Form dieses mathematischen Modells soll die Entwicklung der weltweiten Trinkwassersituation dargestellt werden. Aufgrund der begrenzten Menge an Trinkwasser besteht eine Ähnlichkeit zu der Situation des Erdölvorkommens. Deshalb wurde als mathematisches Grundmodell „peak oil" verwendet und entsprechend auf den Fall der Trinkwasserknappheit übertragen.

2 Vorüberlegungen

Die Auseinandersetzung mit der Entwicklung des weltweiten Trinkwasservorrates, erfordert zunächst eine Betrachtung des globalen Wasserkreislaufes. Umfassende Recherchen haben ergeben, dass die jährlich zur Verfügung stehende Menge an Trinkwasser relativ konstant bleibt. Die durch Verdunstung entstehende Reduktion des Vorrates wird durch die jährlichen Niederschläge wieder ausgeglichen.

Aufgrund dieser Information stellt sich die Frage, welche Faktoren zur Knappheit der Trinkwasserressourcen beitragen und ausschlaggebend sind für die Warnungen der Experten vor einem weltweiten Wassermangel. Hierzu zählen der steigende Verbrauch an Trinkwasser aufgrund der zunehmenden Industrialisierung von Schwellen- und Entwicklungsländern, welche mit einem Wandel der Lebensgewohnheiten verbunden ist. Sowie die zunehmende Verschmutzung des Trinkwassers, die zur Reduktion der jährlich zur Verfügung stehenden Ressourcen beiträgt. Die Knappheit des Trinkwassers wirkt sich in erster Linie auf die Entwicklung der Bevölkerungszahl aus, denn ohne Wasser ist der Mensch nicht lebensfähig.

Auf diese Grundannahmen stützt sich unser Grundmodell:

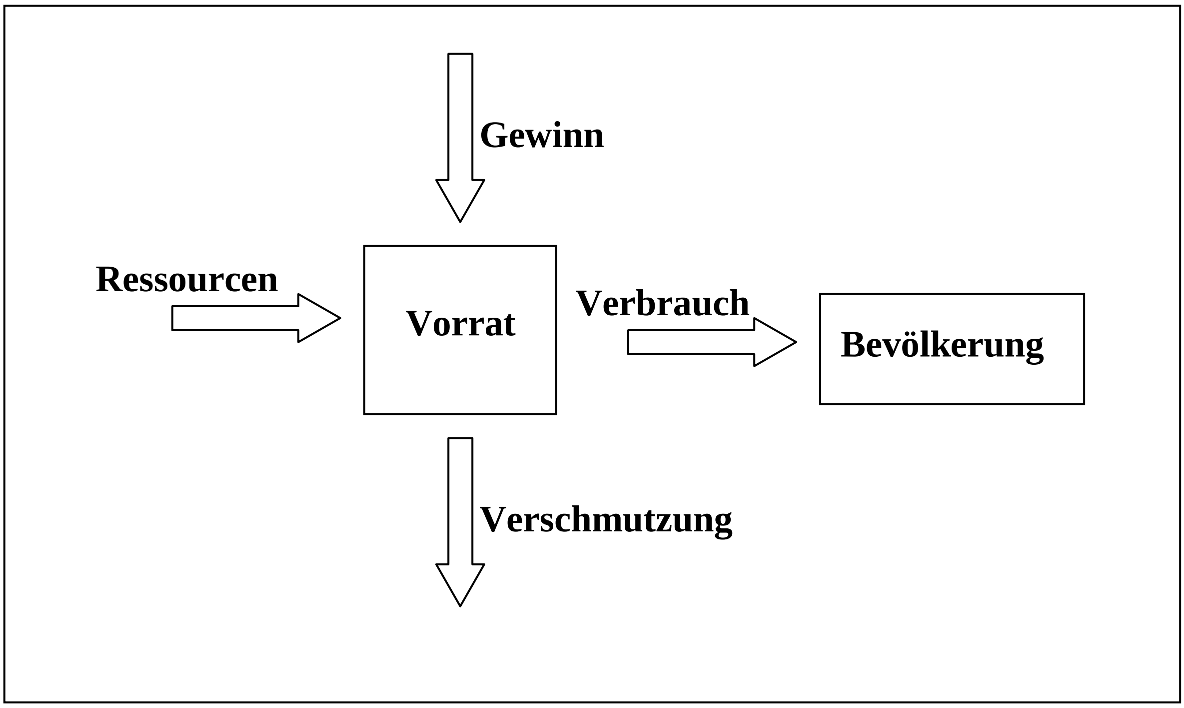

Abb.:1: Grundmodell

3 Das Modell

Die Zustandsgrößen des Modells sind:

B(t)	Bevölkerung zur Zeit t	V(t)	Trinkwasservorrat zur Zeit t
G(t)	Trinkwassergewinnung zur Zeit t	VB(t)	Trinkwasserverbrauch zur Zeit t
R(t)	Jährliche Trinkwasserressourcen	S(t)	Trinkwasserverschmutzung zur Zeit t

Eine Möglichkeit, den jährlichen Trinkwasservorrat zu erhöhen, besteht in der Aufbereitung von Abwasser bzw. Entsalzung von Meerwasser. Diese Techniken zur **Trinkwassergewinnung** befinden sich allerdings noch in der Anfangsphase, weshalb noch sehr wenig bzw. keine Daten zu der dadurch erzielbaren Trinkwassermenge vorhanden sind. Überlegungen dazu lassen allerdings vermuten, dass die Gewinnung von zusätzlichem Trinkwasser logistisch im Laufe der Zeit erfolgt. Grund dafür ist die Annahme, dass in der Entwicklungs- und ersten Testphase noch eher geringe Mengen an zusätzlichem Trinkwasser produziert werden. Im Laufe der Zeit wird dies allerdings aufgrund der Nachfrage nach Trinkwasser stark steigen. Die damit produzierbare Trinkwassermenge erreicht allerdings nach einiger Zeit das Maximum, aufgrund der Grenzen der Technik und eventuell auch dem

Wasservorrat, der zur Aufbereitung zur Verfügung steht. Die Kapazitäten der Trinkwassergewinnung werden mit einem Prozent vom gesamten Wasservorrat festgelegt (entspricht der Konstante K_G).

$$G'(t) = a \cdot G(t) \cdot [1 - \frac{G(t)}{K\_G}] \tag{1}$$

Ein weiterer entscheidender Faktor, der Einfluss auf die Menge des zur Verfügung stehenden Trinkwassers hat, ist die **Trinkwasserverschmutzung.** Darunter wird die irreperable Verschmutzung des Trinkwassers verstanden. Diese Menge an Wasser wird im hydrologischen Kreislauf nicht mehr die Qualität von Trinkwasser erreichen. Zu dieser Größe sind allerdings leider auch keine Daten zur globalen Situation vorhanden. Deshalb beruht die Modellierung wieder auf der Annahme, dass die Verschmutzung zuerst eher gering gehalten wird, danach stark ansteigt und sich an die Kapazität K_S anschmiegt.

$$S'(t) = p \cdot S(t) \cdot (1 - \frac{S(t)}{K\_S}) \tag{2}$$

Der **Trinkwasservorrat** ergibt sich aus den Trinkwasserressourcen zuzüglich der aus der Wasseraufbereitung gewonnen Menge und abzüglich des Anteils, der durch die Verschmutzung ungenießbar geworden ist und dem Anteil der von der Bevölkerung genützt wird. Die Betrachtung über ein Zeitintervall $(t + \Delta t)$ ergibt sich folgende Darstellung für den Vorrat.

$$V(t + \Delta t) = R(t + \Delta t) + G(t + \Delta t) - S(t + \Delta t) - VB(t + \Delta t) \tag{3}$$

Für $\Delta t \to 0$ ergibt sich deshalb folgende Darstellung für die Änderung des Vorrates zur Zeit t

$$V'(t) = R'(t) + G'(t) - S'(t) - VB'(t) \tag{4}$$

Die Daten zur Entwicklung der **Bevölkerungszahl** in den letzten Jahren zeigen, dass diese einer logistischen Funktion ähneln. Um die Entwicklung zu verdeutlichen wurde der Graph mittels eines Polynoms approximiert. Es lässt sich ein logistischer Verlauf der Entwicklung erkennen, weshalb die Modellierung der Bevölkerungszahl folgendermaßen erfolgt:

$$B'(t) = c \cdot B(t) \cdot (1 - \frac{B(t)}{V(t) \cdot u}) \tag{5}$$

Wobei u eine Konstante ist mit der Einheit [Personen x Jahr / km³].

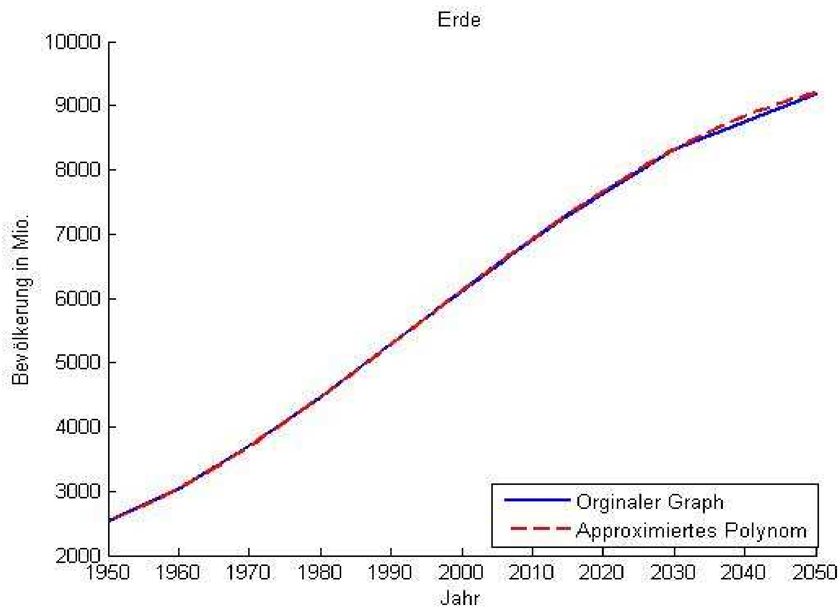

Abb. 2: Bevölkerungsentwicklung

Die Änderung der **Ressourcen** ergibt sich aus der zunehmenden Trinkwasserverschmutzung, woraus sich folgende Gleichung ergibt:

$$R'(t) = -S'(t) \tag{6}$$

Die Graphik zeigt, wie sich der **Trinkwasserverbrauch** im Laufe der Zeit verändert hat. In diesem Modell wird der Verbrauch des Trinkwassers linear an die Zahl der Bevölkerung gekoppelt, denn je mehr Menschen auf dieser Erde leben, desto stärker steigt der Trinkwasserverbrauch.

$$VB(t) = k \cdot B(t) \tag{7}$$

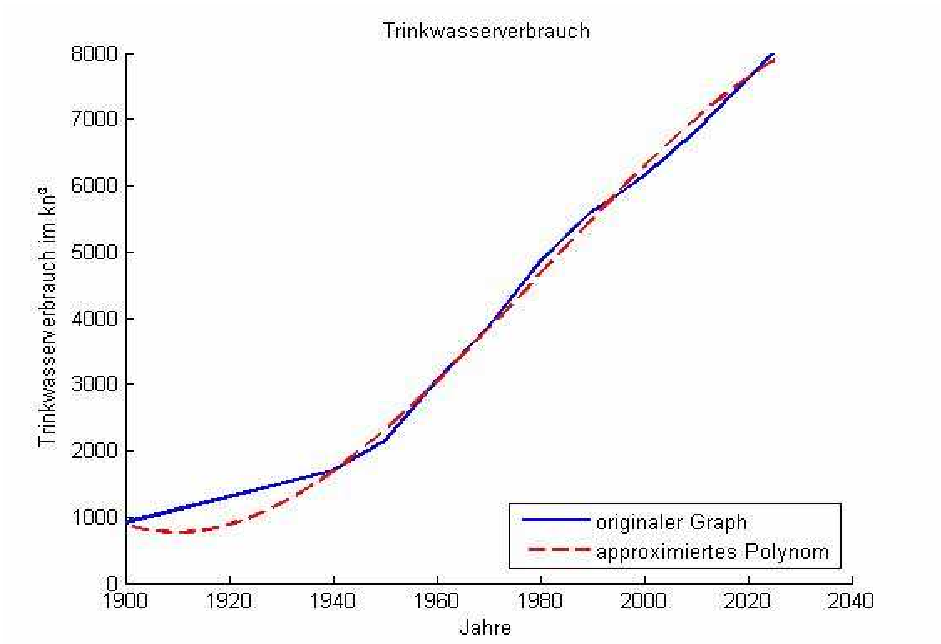

Abb.3: Trinkwasserverbrauch weltweit, Daten

4 Simulation

Die folgenden Darstellungen wurden mit den folgenden Anfangswerten erstellt. Die Variable WV steht für den gesamten Wasservorrat der Erde welcher 1,338 Mrd. km³ beträgt. Lediglich 0,28 % sind davon als Trinkwasser zu klassifizieren.

R (1950)	G (1950)	B (1950)	VB (1950)	S (1950)
$WV \cdot 0{,}0028$ km³	1 km³	2535 Mio.	2150 km³	5000km³

Die Konstanten der Gleichungen wurden mittels graphischer Anpassung im Vergleich zu den Originaldaten bestimmt. Es ergaben sich folgende Werte für die einzelnen Variablen:

a	p	c	u	k
0,037	0,04	0,04	2300	$1{,}006 \cdot 10^{-6}$

Szenario 1:

Als erste Situation wurde gewählt, dass die Trinkwasserverschmutzung stetig zunimmt, bis die gesamten Ressourcen an Trinkwasser verschmutzt und somit unbrauchbar sind. Die einzige noch zur Verfügung stehende Quelle an Trinkwasser ist in diesem Fall die Gewinnung aus der Aufbereitung von Abwasser oder Meerwasserentsalzung. Ab auch bei diesen neuen Technologien ist ein Kapazitätsmaximum vorhanden, welches mit einem Prozent des Wasservorrates festgelegt wurde.

Anhand der Graphik kann man erkennen, dass die stetige Verschmutzung des Trinkwassers zu einem Verschwinden der Ressourcen (in der Graphik als Vorrat bezeichnet) führt und dies fatale Folgen für die Bevölkerungsentwicklung hat. Demnach würde die Bevölkerungszahl um 2050 zu sinken beginnen und bereits im Jahr 2200 wäre die Menschheit ausgestorben. Da der Verbrauch direkt an die Entwicklung der Bevölkerungszahl gekoppelt ist, beginnt dieser ebenfalls um 2050 zu sinken und ist im Jahr 2200 bereits Null. Eine logische Konsequenz, denn wenn das Trinkwasser völlig unbrauchbar geworden ist, steht nichts mehr zur Verfügung, was die Bevölkerung verbrauchen kann und zugleich wird dem Menschen seine Lebensgrundlage entzogen.

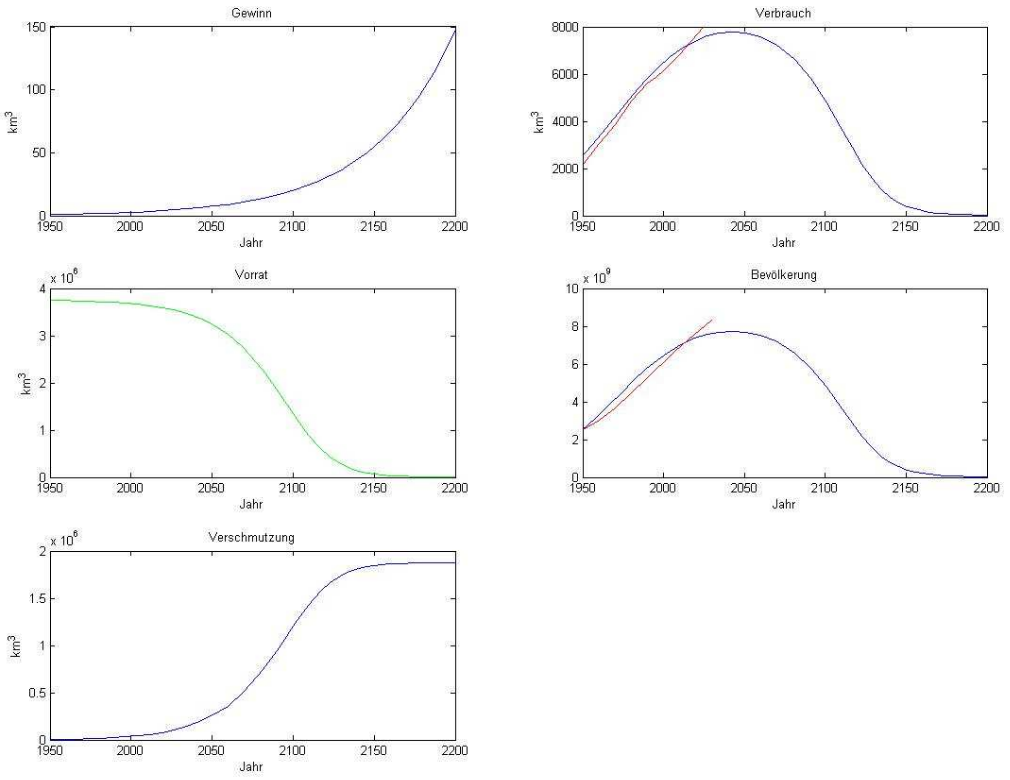

Abb.4: Szenario 1. Extremsituation der totalen Verschmutzung der Trinkwasserressourcen

Szenario 2:

Als zweites Szenario wurde eine weitere Extremsituation gewählt. Was würde passieren, wenn die Verschmutzung der Trinkwasserressourcen auf dem Wert von 1950 konstant bleiben würde. In diesem Fall wäre der Mensch schon 1950 zu der Einsicht gekommen, dass die Trinkwasserverschmutzung lebensbedrohende Folgen haben kann und hat deshalb darauf geachtet keine weiteren Mengen an Trinkwasser zu verschmutzen. Die Trinkwassergewinnung anhand neuer Technologien wird mit derselben Kapazität dargestellt wie im vorigen Beispiel.

Die Graphik zeigt, dass die Verschmutzung konstant ist und der zusätzliche Gewinn an Trinkwasser gleich verläuft wie im Szenario 1. Die zur Verfügung stehenden Ressourcen (in der Graphik als Vorrat bezeichnet) nähern sich einer Asymptote an (in diesem Fall die Ressourcen von 1950 minus der Verschmutzung du plus dem Gewinn). Auch das Wachstum der Bevölkerung und damit einhergehend des Trinkwasserverbrauchs ist begrenzt.

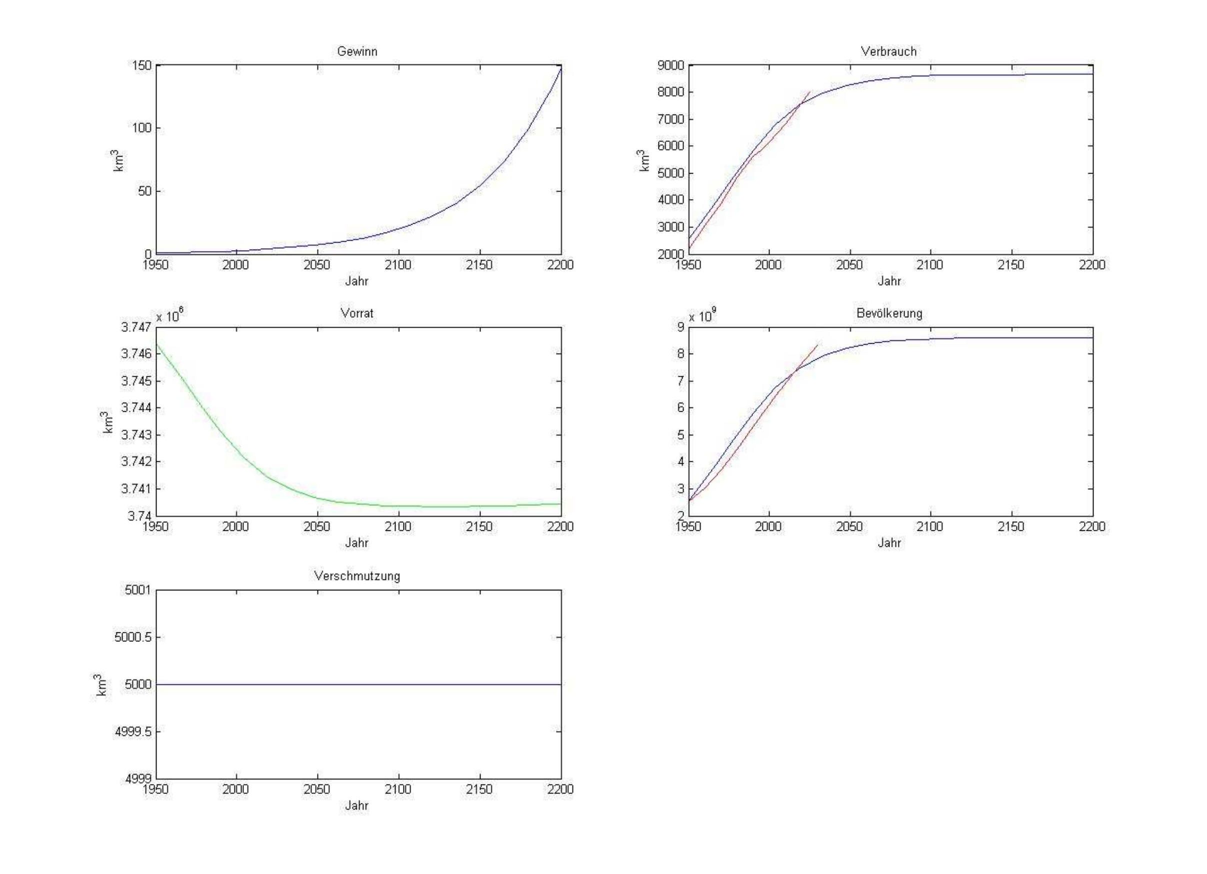

Abb.5: Szenario 2. Extremsituation der konstanten Verschmutzung

Szenario 3:

Als dritte Darstellung wurde ein Mittel zwischen den beiden vorigen gewählt. Die Kapazität der Trinkwassergewinnung wird wieder mit einem Prozent des gesamten Wasservorrates festgelegt. Als maximale Verschmutzung wird R/2 gewählt. Das bedeutet, die Hälfte der zur Verfügung stehenden Ressourcen können maximal verschmutzt werden.

In diesem Fall zeigt die Darstellung, dass sich die Ressourcen auf relativ niedrigem Niveau einfinden. Dies hat für die Bevölkerungsentwicklung die Konsequenz, dass wie bereits im ersten Szenario die Bevölkerungszahl um 2050 zu sinken beginnt. Entscheidender Unterschied liegt darin, dass die Menschheit nicht ausstirbt, sondern auf rund 3 Mrd. schrumpft. Wie bereits aus den vorigen Darstellungen ersichtlich ist der Trinkwasserverbrauch auch in diesem Fall an die Bevölkerungsentwicklung gekoppelt.

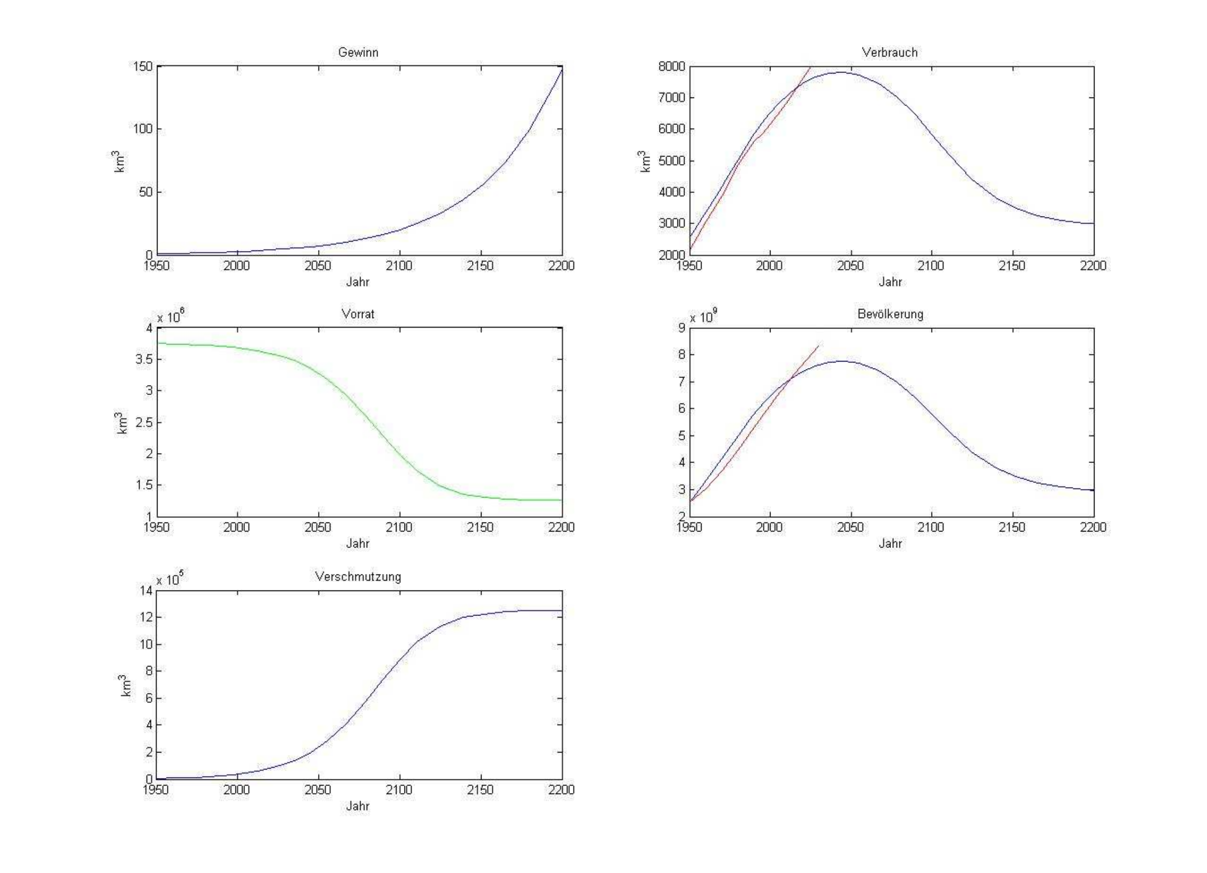

Abb.6: Szenario 3. Mittelweg zwischen Szenario 1 und Szenario 2

Szenario 4:

Einige Recherche hat ergeben, dass im Jahr 2000 rund 7200 km³ des Trinkwasservorrates verschmutzt waren. In diesem Szenario wurde dieser Wert als Kapazität für die Verschmutzung gewählt. Das bedeutet, in der Graphik sind die Auswirkungen des Verschmutzungsgrades vom Jahr 2000 ersichtlich. Die Kapazität der Trinkwassergewinnung liegt wie in den vorigen Beispielen bei einem Prozent des gesamten Wasservorrates.

Erneut zeigt die Graphik die Folgen der Trinkwasserverschmutzung. Die Ressourcen (in der Graphik wieder mit Vorrat bezeichnet) nähern sich in diesem Fall einem vergleichsweise hohen Wert an. Allerdings hat dies ebenso Auswirkungen auf die Bevölkerungsentwicklung. So beginnt sich die Bevölkerungszahl um 2050 rund 8,5 Mrd. anzunähern. Bedenklich hieran ist, dass bereits jetzt 6 Mrd. Menschen auf der Erde leben und die Prognosen vor allem für beispielsweise Indien von einem weiteren Wachstum ausgehen. Demzufolge ist auch dieses Szenario damit verbunden, dass Menschen aufgrund des Trinkwassermangels sterben. Im Vergleich mit der Realität ist es sehr wohl realistisch, da bereits heutzutage Menschen in Afrika an den Folgen des Trinkwassermangels sterben.

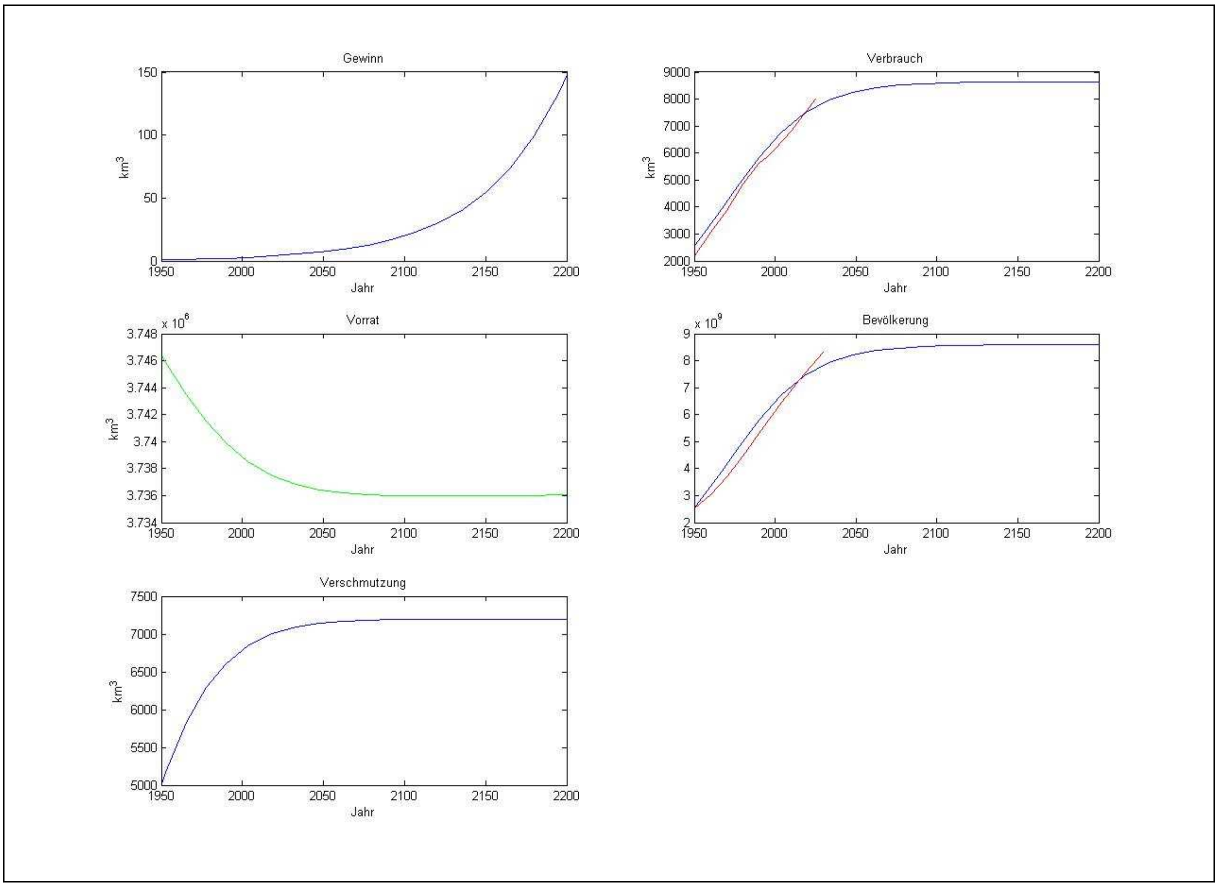

Abb.7: Szenario 4. Folgen der Trinkwasserverschmutzung auf Basis des Jahres 2000

5 Stabilität

Die Gleichgewichte des dynamischen Systems sind mit folgenden Werten verbunden:

Trinkwassergewinn: $G'(t) = 0$

$x_1^* = 0 \qquad x_2 * = K\_G$

Bevölkerungsentwicklung: $B'(t) = 0$

$x_1 * = 0 \qquad x_2 * = K\_B$

Trinkwasserverschmutzung: $S'(t) = 0$

$x_1 * = 0 \qquad x_2 * = K\_S$

Überprüfung der Stabilität der zwei Gleichgewichtslagen:

Gleichgewichtslage 1: In diesem Fall liegt das Gleichgewicht bei G=0, B=0, S=0. Die dazugehörige Jacobimatrix sieht folgendermaßen aus:

$$\begin{vmatrix} 0.037 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}04 & 0 \\ 0 & 0 & 0.04 \end{vmatrix} \quad \Rightarrow \lambda_1 = 0.037 \qquad \lambda_2 = 0.04 \qquad \lambda_3 = 0.04$$

Gleichgewichtslage 2:

Die Gleichgewichte liegen bei den jeweiligen Kapazitätn: G=K_G, B=K_B, S=K_S. Die dazugehörige Jakobimatrix sieht folgendermaßen aus:

$$\begin{vmatrix} -0.037 & 0 & 0 \\ 0 & -0.04 & 0 \\ 0 & 0 & -0.04 \end{vmatrix} \quad \Rightarrow \lambda_1 = -0.037 \qquad \lambda_2 = -0.04 \qquad \lambda_3 = -0.04$$

Stabilität:

Bei der ersten Gleichgewichtslage sind die Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 > 0 \Rightarrow$ das Gleichgewicht ist instabil.

Bei der zweiten Gewichtlage hingegen sind die Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 < 0 \Rightarrow$ das Gleichgewicht ist stabil.

Da sich bei den logistischen Differentialgleichungen die Kurven jeweils ein stabiles Gleichgewicht bei den Kapazitäten haben, kann man daraus schließen, dass der Vorrat auch stabil wird bei $V(t) = R(t) + K\_G - K\_V - k * K\_B$.

6 Zusammenfassung

Anhand von sechs Differentialgleichungen wurde ein Modell für die Entwicklung der Trinkwassersituation erstellt. Es hängt von der Bevölkerungsanzahl, dem Trinkwasserverbrauch, der Wasserverschmutzung und der Gewinnung von neuem Trinkwasser ab. In diesem Bericht wurden einige mögliche Szenarien dargestellt, bei denen die Kapazität der Verschmutzung geändert wurde. Darunter waren sowohl Extremsituationen als auch durchaus realistische Szenarien.

Wie man gesehen hat, hängt die Entwicklung der Trinkwassersituation sehr stark von der zukünftigen Einstellung des Menschen zum Umweltschutz ab. Deshalb ist sicher, dass bald gehandelt werden muss, denn sonst kann es zu spät sein.