Lösung des 17. Übungsbeispiels

(a) Berechne die Dimension einer Strecke.

Zur Vereinfachung wird die Dimension der Strecke $[0,1]$ berechnet. Sei $N(\ell)$ die Mindestanzahl der Strecken mit Länge ℓ, die $[0,1]$ überdecken. $N(\ell)$ wird wie folgt abgeschätzt.

Wenn m Intervalle $\{[a_i, a_i + 1/k] : 1 \le i \le m\}$ verwendet werden, um $[0,1]$ zu überdecken, erfüllt die Gesamtlänge der Vereinigung,

$$|\bigcup_{i=1}^{m}[a_i, a_i + 1/k]| \le \sum_{i=1}^{m} |[a_i, a_i + 1/k]| = m/k$$

Also muss m mindestens k sein, damit gilt

$$|[0,1]| = 1 \le |\bigcup_{i=1}^{m}[a_i, a_i + 1/k]| \le m/k.$$

Da $[0,1]$ mit der Vereinigung der k Intervalle $\{[(i-1)/k, i/k] : 1 \le i \le k\}$ überdeckt wird, gilt

$$N(\ell) = k, \quad 1/\ell = k$$

Klar nach Definition ist $N(\ell)$ eine fallende Funktion von ℓ, d.h.

$$\ell_2 \ge \ell_1 \quad \Rightarrow \quad N(\ell_2) \le N(\ell_1)$$

Also gelten

$$k \le N(\ell) \le k+1, \quad 1/(k+1) \le \ell \le 1/k$$

und

$$\frac{\log(k)}{\log(k+1)} \le \frac{\log(N(\ell))}{\log(1/\ell)} \le \frac{\log(k+1)}{\log(k)}, \quad k \le 1/\ell < k+1$$

Schließlich ist die Dimension der Strecke $[0,1]$ wie folgt gegeben:

$$D([0,1]) = \lim_{\ell \to 0} \frac{\log(N(\ell))}{\log(1/\ell)} \left\{ \begin{array}{ll} \le & \lim_{k\to\infty} \log(k+1)/\log(k) \\ \ge & \lim_{k\to\infty} \log(k)/\log(k+1) \end{array} \right\} = 1.$$

(b) Berechne die Dimension der Cantor-Menge.

Sei $N(\ell)$ die Mindestanzahl der Strecken mit Länge ℓ, die die Cantor-Menge C überdecken. $N(\ell)$ wird wie folgt abgeschätzt.

Definiere die Mengen $\{C_k\}$ induktiv wie folgt. Sei $C_0 = [0,1]$. Sei C_k mit Durchmesser 1 gegeben. Dann wird C_k zum Durchmesser $\frac{1}{3}$ linear zusammengezogen auf das Teilintervall $[0, \frac{1}{3}]$:

$$\tfrac{1}{3}C_k = [0, \tfrac{1}{3}] \cap C_{k+1} \tag{1}$$

und dann auf das Teilintervall $[\frac{2}{3}, 1]$ kopiert:

$$[\tfrac{2}{3}, 1] \cap C_{k+1} = [0, \tfrac{1}{3}] \cap C_{k+1} + \tfrac{2}{3}. \tag{2}$$

Das Ergebnis ist C_{k+1} mit Durchmesser 1.

Zusätzlich wird induktiv argumentiert, dass

$$C_k \subset C_{k-1}, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{3}$$

gilt. Zuerst gilt $C_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1] \subset [0, 1] = C_0$. Nun wird angenommen dass $C_{k-1} \subset C_k$ gilt. Um $C_k \subset C_{k+1}$ zu zeigen, reicht es wegen (2) (d.h. jede Menge C_k ist identisch in $[0, \frac{1}{3}]$ und $[\frac{2}{3}, 1]$) zu zeigen:

$$C_{k+1} \cap [0, \tfrac{1}{3}] \subset C_k \cap [0, \tfrac{1}{3}] \tag{4}$$

Sei $x \in C_{k+1} \cap [0, \frac{1}{3}]$. Wegen der Konstruktion von C_{k+1} aus C_k nach (1) gilt $3x \in C_k$. Mit der Annahme $C_k \subset C_{k-1}$ gilt $3x \in C_{k-1}$. Wegen der Konstruktion von C_k aus C_{k-1} nach (1) gilt $x \in C_k$. Damit ist (4) und daher (3) bewiesen. Schließlich ist die Cantor-Menge durch den Schnitt definiert:

$$C = \bigcap_{k=0}^{\infty} C_k = \lim_{k\to\infty} C_k \tag{5}$$

wobei der Schnitt sich wegen (3) als Limus umschreiben lässt. Wegen (1) gilt:

$$[0, \tfrac{1}{3}] \cap C = [0, \tfrac{1}{3}] \cap \lim_{k\to\infty} C_{k+1} = \tfrac{1}{3} \lim_{k\to\infty} C_k = \tfrac{1}{3} C. \tag{6}$$

Diese Eigenschaft von C heisst *Selbstähnlichkeit*. Wegen (2) ist C identisch in $[0, \frac{1}{3}]$ und $[\frac{2}{3}, 1]$:

$$[\tfrac{2}{3}, 1] \cap C = [\tfrac{2}{3}, 1] \cap \lim_{k\to\infty} C_k = [0, \tfrac{1}{3}] \cap \lim_{k\to\infty} C_k + \tfrac{2}{3} = [0, \tfrac{1}{3}] \cap C + \tfrac{2}{3}. \tag{7}$$

Mit (6) und (7) bekommt man eine Beziehung zwischen $N(\ell)$ und $N(3\ell)$. Wenn C mit der Mindestanzahl $N(3\ell)$ von Strecken mit Länge 3ℓ überdeckt ist, ist diese wegen (6) die Mindestanzahl von Strecken mit Länge ℓ, die $[0, \frac{1}{3}] \cap C$ überdecken. Aber die Mindestanzahl von Strecken mit Länge ℓ, die $[0, \frac{1}{3}] \cap C$ überdecken, ist wegen (7) genau $\frac{1}{2} N(\ell)$. Zusammengefasst gelten

$$N(3\ell) = \tfrac{1}{2} N(\ell) \tag{8}$$

und

$$N(3^{-k}) = 2N(33^{-k}) = \cdots = 2^k N(1) = 2^k. \tag{9}$$

Klar nach Definition ist $N(\ell)$ eine fallende Funktion von ℓ, d.h.

$$\ell_2 \geq \ell_1 \quad \Rightarrow \quad N(\ell_2) \leq N(\ell_1)$$

Also gelten

$$2^k \leq N(\ell) \leq 2^{k+1}, \quad 3^{-(k+1)} \leq \ell \leq 3^{-k}$$

und

$$\frac{\log(2^k)}{\log(3^{-(k+1)})} \leq \frac{\log(N(\ell))}{\log(1/\ell)} \leq \frac{\log(2^{k+1})}{\log(3^{-k})}, \quad 3^k \leq 1/\ell < 3^{k+1}$$

Dann ist die Dimension der Cantor-Menge C schließlich wie folgt gegeben:

$$D(C) = \lim_{\ell\to 0} \frac{\log(N(\ell))}{\log(1/\ell)} \left\{ \begin{array}{cc} \leq & \lim_{k\to\infty} [k\log(2)]/[(k+1)\log(3)] \\ \geq & \lim_{k\to\infty} [(k+1)\log(2)]/[k\log(3)] \end{array} \right\} = \frac{\log 2}{\log 3}.$$