Übungen Mathematische Modellierung
Sommersemester 2008

1. Gegeben sind Daten $\{(x_n, y_n)\}_{n=1}^N$, wobei the Messpunkte verschieden sind $x_i \neq x_j$, und die Parameter k und d des empirischen Modells $y(x) = k \cdot x + d$ sollen so bestimmt werden, dass die Summe der quadratischen Abstände zwischen der Gerade und den Daten,

$$E(k,d) = \sum_{n=1}^{N} [(k \cdot x_n + d) - y_n]^2$$

minimiert wird. Zeige durch die Optimalitätsbedingungen

$$\frac{\partial E}{\partial k}(k^*, d^*) = \frac{\partial E}{\partial d}(k^*, d^*) = 0$$

dass die minimierenden Parameter durch

$$k^* = \frac{\bar{xy} - \bar{x}\bar{y}}{\bar{x^2} - \bar{x}^2}, \quad d^* = \bar{y} - k^* \cdot \bar{x}$$

gegeben werden. Zeige dass die Hessische Matrix $D^2E(k^*, d^*)$ positiv definit ist, und deswegen hat E ein Minimum in (k^*, d^*).

2. Schreibe einen Matlab-Code mit der Funktion `fminsearch`, um die Parameter (K, t_0, τ) eines logistischen Modells $P(t; K, t_0, \tau) = K/\{1 + \exp[-(t - t_0)/\tau]\}$ für die Bevölkerungsdaten auf Seite 5 im Skriptum `http://www.uni-graz.at/georg.propst/SN1.pdf` zu bestimmen. (Hinweis: Siehe den Text ab Seite 27 im Skriptum sowie den Text ab Seite 2 in den Lernfragen `http://math.uni-graz.at/keeling/usw1-lern2.pdf`.)

3. Durch Dimensionsanalyse und mit den Daten in Abbildung 1.3 im Skriptum `http://www.uni-graz.at/imawww/thaller/lehre/mpt/skriptum.pdf` entwickle ein Modell zur Bestimmung der Energie der ersten Atombombe. Im Lauf der Entwicklung bestätige die Bedingungen des Buckingham Pi Satzes. (Hinweis: Siehe den Text ab Seite 12 im Skriptum.)

4. Für die chemischen Daten im Beispiel 2.6 auf Seite 12 im Skriptum `http://www.uni-graz.at/georg.propst/SN1.pdf` bestimme die Regressionsgerade für die transformierten Daten für die Reaktionsordnungen $m = 1, 2, 3$ und berechne die entsprechenden Korrelationskoeffizienten, um die Reaktionsordnung quantitativ zu schätzen.

5. Löse das Anfangswertproblem analytisch

$$\begin{cases} P'(t) &= \dfrac{P(t)}{\tau}\left[1 - \dfrac{P(t)}{K}\right], \quad t > t_0 \\ P(t_0) &= P_0 \end{cases}$$

und numerisch mit MATLAB (wobei die Parameter vom Benutzer eingegeben werden), und vergleiche die Ergebnisse graphisch.

6. Für das Räuber-Beute Modell,

$$x' = (a_1 - b_1 y)x, \quad y' = (b_2 x - a_2)y$$

zeige dass die Lösungskurven für eine gegebene Konstante c so gegeben sind:

$$a_2 \ln(x) - b_2 x + a_1 \ln(y) - b_1 y = \ln(c)$$

und stelle diese mit Matlab für verschiedene Werte von c graphisch dar.

7. Für das Konkurrenz Modell,

$$x' = (a_1 - b_1 y)x, \quad y' = (a_2 - b_2 x)y$$

zeige dass die Lösungskurven für eine gegebene Konstante c so gegeben sind:

$$-a_2 \ln(x) + b_2 x + a_1 \ln(y) - b_1 y = \ln(c)$$

und stelle diese mit Matlab für verschiedene Werte von c graphisch dar.

8. Für die reversible Reaktion,

$$A + B \underset{\kappa_2}{\overset{\kappa_1}{\rightleftharpoons}} C + D$$

sind die Anfangskonzentrationen

$$[A](0) = 3 \text{ Mol/Liter}, \ [B](0) = 2 \text{ Mol/Liter}, \ [C](0) = 1 \text{ Mol/Liter und } [D](0) = 0 \text{ Mol/Liter}.$$

Die Reaktionskonstanten sind $\kappa_1 = 2$ (Liter·Minuten/Mol) für die Vorwärtsreaktion und $\kappa_2 = 2$ (Liter·Minuten/Mol) für die Rückwärtsreaktion. Finde die Konzentrationen $[A](t)$, $[B](t)$, $[C](t)$ und $[D](t)$ als Funktionen von der Reaktionszeit t Minuten, und stelle diese gemeinsam graphisch dar. Finde die Gleichgewichtskonzentrationen dieser Chemikalien.

9. Leite die Formeln (5) und (8) in `http://math.uni-graz.at/keeling/peakoil.pdf` von (4) und (7) her. Stelle A' und N' als Funktionen vom Fasspreis graphisch dar, und interpretiere diese Kurven bezüglich der Formeln (4) und (7). Stelle die Größen A' und N' bezüglich des Fasspreises $P(t)$ graphisch dar. Finde ein Gleichgewicht für dieses Modell, das in Tabelle 2 nicht steht.

10. Für das Rudern Dynamik Modell,

$$Mu'(t) = 8P/u - bSu^2, \quad u(0) = 0$$

leite die explizite Lösung her:

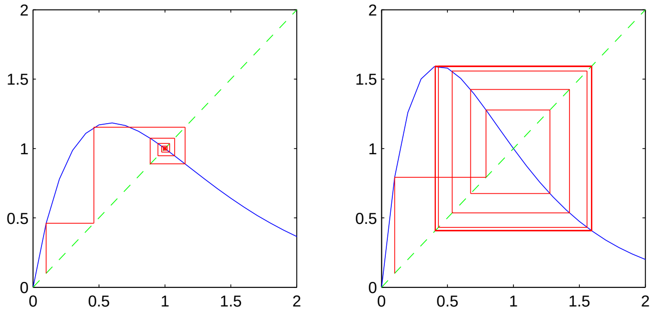
$$\ln\left[\frac{u^2 + uV + V^2}{(u - V)^2}\right] + \frac{\pi}{\sqrt{3}} - 2\sqrt{3}\tan^{-1}\left[\frac{V + 2u}{V\sqrt{3}}\right] = \frac{6bSVt}{M}, \quad V = 2\left(\frac{P}{bS}\right)^{1/3}$$

und stelle diese graphisch dar.

11. Schreibe einen Matlab-Code, der die Iterierten des Lachs-Modells

$$\xi_{n+1} = F(\xi_n) = \xi_n e^{r(1-\xi_n)}$$

für eingegebene ξ_0 und r ausgibt und so graphisch darstellt:

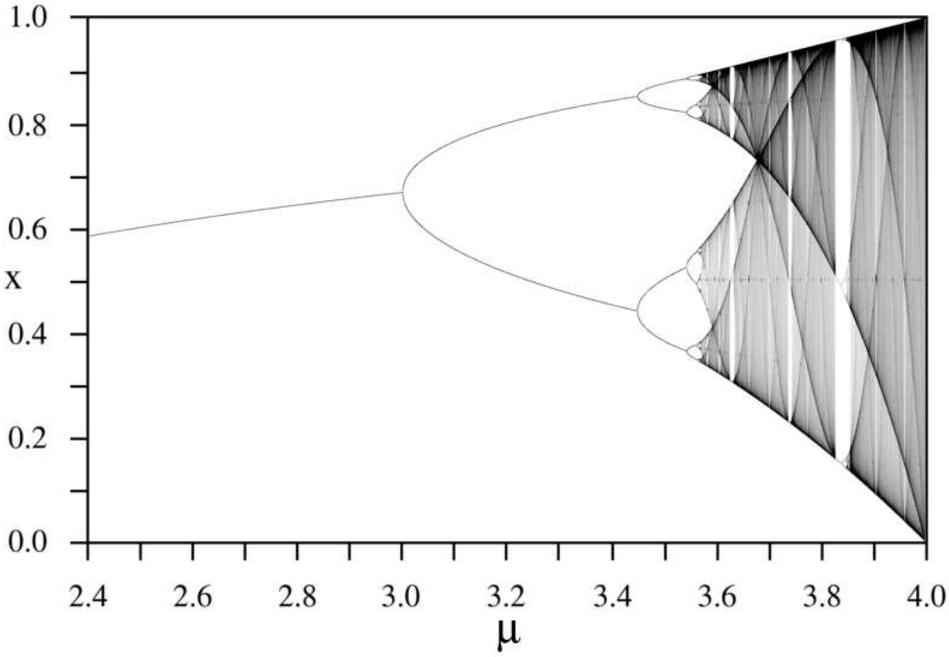


Hier ist $\xi_0 = 0.1$ für beide Fälle, und $r = 1.7$ gilt für die linke Graphik während $r = 2.3$ für die rechte Graphik gilt. Der Grenzwert für die linke Graphik ist $\xi^*_{(0)} = 1.0$, und die 2-periodischen Grenzwerte für die rechte Graphik sind $\xi^*_{(1)} = 0.4078$ und $\xi^*_{(2)} = 1.5922$.

12. Für das diskrete logistische Modell,

$$x_{n+1} = \mu x_n(1 - x_n)$$

sei $\{x^*_{n,j}(\mu) : j = 0, \ldots, 2^n - 1\}$ eine 2^n-periodische Lösung für ein gewisses μ. Für $n = 0$ finde die Werte μ_0 und μ_1, wobei es ein stabiles Gleichgewicht $x^*_{0,0}(\mu)$ für $\mu_0 < \mu < \mu_1$ gibt. Für $n = 1$ finde den Wert μ_2, wobei es eine stabile $2-$periodische Lösung $\{x^*_{1,0}(\mu), x^*_{1,1}(\mu)\}$ für $\mu_1 < \mu < \mu_2$ gibt. Stelle die Kurven $x^*_{0,0}(\mu)$, $\mu_0 < \mu < \mu_1$, $x^*_{1,0}(\mu)$, $\mu_1 < \mu < \mu_2$ und $x^*_{1,1}(\mu)$, $\mu_1 < \mu < \mu_2$ gemeinsam graphisch dar, um den entsprechenden Teil des folgenden Bifurkationbilds zu sehen.



13. Konstruiere eine einfache chemische Reaktion,

$$kA + lB \underset{\kappa_2}{\overset{\kappa_1}{\rightleftharpoons}} mC + nD$$

bei der durch Änderung der (temperatur-abhängigen) Reaktionskonstanten κ_1 und κ_2 eine Änderung der Gleichgewichtslage erfolgt, wie man in Abbildung 9.4(c) in `http://www.uni-graz.at/georg.propst/SN2.pdf` sieht. Stelle die Gleichgewichtslagen bezüglich der Reaktionskonstanten κ_1 und κ_2 explizit dar. Leite eine entsprechende Potential-Landschaft für die Differentialgleichung her.

14. Für das kontinuierliche Verkehrsmodell,

$$\frac{dz_j}{dt}(t + \tau) = \nu \ln\{x_{\max}[z_{j-1}(t) - z_j(t)]\}, \quad j = 2, \ldots, N$$

und für den Fall, dass $N = 3$, $\tau = 0$ und $z_1(t) = \nu t$ gelten, zeige dass $z_j(t) = \nu t - (j-1)e/x_{\max}$ eine asymptotisch stabile Lösung ist.

15. Für das diskrete Verkehrsmodell,

$$M[\Phi_j(n+1) - \Phi_j(n)] = \nu \ln\{1 + (x_{\max}/e)[\Phi_{j-1}(n - \sigma) - \Phi_j(n - \sigma)]\}, \quad j = 2, \ldots, N$$

und für den Fall, dass $N = 3$, $\sigma = 1$ und $\Phi_1(t) = 0$ gelten, finde eine Bedingung mit der die Lösung $\Phi^* = 0$ asymptotisch stabil ist.

16. Schreibe einen Matlab-Code zur Simulation des Räuber-Beute Modells,

$$\begin{aligned} \xi' &= \lambda\xi(1-\xi) - \theta\xi\eta/(\xi+\mu) \\ \eta' &= \eta(1-\eta/\xi) \end{aligned}$$

und zeigen für gewisse Werte der Parameter einen stabilen Grenzzyklus auf.

17. Berechne die Dimension (a) eines Quadrats (b) der Cantorschen Menge.

18. Mit einer Energiebilanz modelliere den dynamischen (nicht nur statischen) Energiefluss durch ein Fenster mit zwei gleichen Glasscheiben und einer Luftspalte dazwischen.

19. Bestätige dass

$$w(x,y) = \frac{p_2 - p_1}{2\mu L} \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)$$

das Randwertproblem erfüllt:

$$\mu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) = \frac{p_1 - p_2}{L}, \quad \text{in } E(a,b) = \{(x,y) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \le 1\}, \qquad w = 0, \quad \text{auf } \partial E(a,b)$$

Zeige dass die Flussrate ist gegeben durch:

$$Q = \int_{E(a,b)} w(x,y)\,dxdy = \frac{\pi(p_2 - p_1)a^3 b^3}{4\mu L(a^2 + b^2)}$$

20. Zwei Agenten treffen sich und überlegen einen Tausch von zwei Ressourcen x und y, damit ihre Lebenszeiten u_1 und u_2 verlängert werden können. Für die Ressourcen x und y hat der erste Agent die Vorräte x_1 und y_1 und die entsprechenden Verbrauchsraten a_1 und b_1, und der zweite Agent hat die Vorräte x_2 und y_2 und die entsprechenden Verbrauchsraten a_2 und b_2. Ein Agent stibt genau dann, wenn die eigenen Ressourcen verbraucht worden sind. Die Ressourcen und die Verbrauchsraten sind allen bekannt (oder praktisch abschätzbar).

    a. Berechne den optimalen Tausch bei der Nash Schlichtungsstrategie, wenn das *Status Quo* bei dem Tausch ist: nichts tauschen.

    b. Herausforderung: Sei p die Wahrscheinlichkeit, dass das gleiche Spiel wiederholt wird (weil die inzwischen verbrauchten Vorräte durch Förderung aufgefüllt worden sind). In Abhängigkeit von p berechne für jeden Spieler die Stategie über unendlich viele gleiche Spiele, die die eigene erwartete Lebenszeit maximiert. Was passiert, wenn die Parameter des anderen Agenten nicht vorher bekannt sind? Was passiert, wenn die Wiederholungswahrscheinlichkeit nicht konstant bleibt (weil eine Ressource begrenzt ist)?

    (Siehe `http://math.uni-graz.at/keeling/spieltheorie.pdf`.)

21. Maximiere das Kostenfunktional,

$$J(u) = \int_0^\infty e^{-\delta t}[pqx(t) - c]u(t)dt$$

über Steuerungen der Form,

$$u(t) = \begin{cases} 0, & 0 < t \le s \\ U, & s < t < \infty \end{cases}$$

unter der Nebenbedingung,

$$x'(t) = Rx(t)[1 - x(t)/K] - qu(t)x(t), \quad x(0) = K/N$$

um die optimale Steuerung,

$$U^* = \frac{R}{4q}\left\{3 - \frac{c}{pqK} + \frac{\delta}{R} - \sqrt{\left(1 + \frac{c}{pqK} - \frac{\delta}{R}\right)^2 + \frac{8c\delta}{pqKR}}\right\}$$

$$s^* = s(U^*), \quad s(U) = \frac{1}{R}\ln\left\{(N-1)\left(\frac{R}{qU} - 1\right)\right\}$$

herzuleiten.

22. Sei $P(t)$ eine Profitrate in der Zeit t. Sei $G(t) = \int_0^t P(s)ds$ die Gesamtprofit bis zur Zeit t. Definiere $G_s(t)$ als das zur Zeit s auf einem Bankkonto investierte Geld, das bis zu einer späteren Zeit t durch die kontinuierliche Zinsrate δ auf $G(t) = e^{\delta(t-s)}G_s(t)$ wachsen würde. Unter der Annahme dass $G_0(0) = G_0(\infty) = 0$ gilt (d.h. die Gesamtprofit ist Null zu Beginn und der gegenwärtige Wert der Gesamtprofit wird Null nach unendlicher Zeit), zeige:

$$\delta\int_0^\infty G_0(t)dt = \int_0^\infty e^{-\delta t}P(t)dt$$

23. Für den reinen Geburtsprozess,

$$b_i = Bi, \quad 0 \le i < \infty$$

zeige dass die Lösung des Systems

$$r'_{ij}(t) = b_{j-1}r_{i,j-1}(t) - b_j r_{ij}(t), \quad j \ge i \ge 1, \qquad r_{ij}(0) = \delta_{ij}$$

ist gegeben durch:

$$r_{ij}(t) = e^{-b_j t}\delta_{ij} + b_{j-1}\int_0^t e^{-b_j(t-s)}r_{i,j-1}(s)ds, \quad j \ge i \ge 1.$$

oder explizit:

$$r_{ij}(t) = \frac{(j-1)!}{(i-1)!(j-i)!}e^{-Bit}(1-e^{-Bt})^{j-i}, \quad j \ge i \ge 1.$$

24. Für eine Zufallsvariable $X(t)$ seien $\pi_n(t) = P(X(t) = n)$ Wahrscheinlichkeiten, die erfüllen:

$$\pi'_n(t) = -(b_n + d_n)\pi_n(t) + b_{n-1}\pi_{n-1}(t) + d_{n+1}\pi_{n+1}(t), \quad n = 1, \ldots, \infty$$

wobei

$$b_n = n(\beta_1 - \beta_2 n) \quad d_n = n(\mu_1 + \mu_2 n)$$

Dann zeige dass der Erwartungswert $x(t) = E[X(t)]$ und die Varianz $\sigma^2(t) = E[X(t)^2] - E[X(t)]^2$ erfüllen:

$$x'(t) = \frac{x(t)}{\tau}\left[1 - \frac{x(t)}{K}\right] - \nu\sigma^2(t), \qquad \tau = \frac{1}{\beta_1 - \mu_1}, \quad K = \frac{\beta_1 - \mu_1}{\beta_2 + \mu_2}, \quad \nu = (\beta_2 + \mu_2).$$

Also wenn $\sigma(t) \approx 0$ gilt, ist $x(t)$ ungefähr logistisch. Schreibe einen Matlab-Code, um $x(t)$ und $\pi_n(t)$ für $n = 0, \ldots, N$ zu berechnen und graphisch darzustellen. (Hinweis: Siehe `http://gi.ics.nara-wu.ac.jp/~takasu/lecture/graduate_course/L10_logistic-growth2.pdf`)

25. Für eine Zufallsvariable $X(t)$ seien $\pi_n(t) = P(X(t) = n)$ Wahrscheinlichkeiten, die erfüllen:

$$\begin{aligned}
\pi'_n(t) &= -(b_n + d_n)\pi_n(t) + b_{n-1}\pi_{n-1}(t) + d_{n+1}\pi_{n+1}(t), \quad 1 \le n \le N-1 \\
\pi'_0(t) &= -b_0\pi_0(t) + d_1\pi_1(t) \\
\pi'_N(t) &= -d_N\pi_N(t) + b_{N-1}\pi_{N-1}(t)
\end{aligned}$$

wobei

$$b_n = 1/c, \quad d_n = \begin{cases} 2/s, & 2 \le n \le N \\ 1/s, & n = 1 \end{cases} \quad \text{und} \quad \rho = s/c.$$

Für das stabile Gleichgewicht $\{\pi_n(\infty)\}$ des obigen Systems zeige

$$E[X(\infty)] = \pi_0 \rho \frac{N(\rho/2)^{N+1} - (N+1)(\rho/2)^N + 1}{(1-\rho/2)^2}, \quad \pi_0 = \frac{1-\rho/2}{1+\rho/2-\rho(\rho/2)^N}$$

wobei

$$E[X(\infty)] \overset{\rho\to 2}{\longrightarrow} \frac{N(N+1)}{1+2N}, \quad E[X(\infty)] \overset{N\to\infty}{\longrightarrow} \frac{4\rho}{4-\rho^2} \equiv L_2(\rho)$$

26. Ergänze das letzte Beispiel (d.h. es gibt zwei Kassen) und berechne den Erwartungswert W_2 der Wartezeit in der Schlange, wenn N (die Anzahl der Stehplätze) unendlich groß ist. Bestätige dass $W_2 = c \cdot L_2$ gilt.

27. Gegeben dass eine Zufallsvariable $Y(t)$ die Gleichung $P(Y \le t) = g(t)$ erfüllt, berechne den Erwartungswert $E[Y]$ von Y.

28. Waren werden innerhalb des Zeitintervalls $0 \le t \le 1$ verkauft, und Profit soll maximiert werden. Zu Beginn dieses Intervalls werden u Einheiten der Waren bestellt und sofort geliefert. Im Lauf des Intervalls werden Z Einheiten gekauft, wobei diese Zufallsvariable für die Nachfrage so geschätzt worden ist, die folgende Dichte zu haben:

$$f(z) = \frac{\chi_{[a,b]}(z)}{b-a}, \quad \chi_{[a,b]}(z) = \begin{cases} 1, & a \le z \le b \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Die Fixkosten der Firma sind k, die Einheitskosten sind c_0 und die Lagerungskosten sind:

$$c_1 \int_0^1 \zeta(t) dt$$

wobei die Anzahl der gelagerten Waren durch

$$\zeta(t) = \begin{cases} u, & t = 0 \\ (u-Z)\cdot H(u-Z), & t > 0 \end{cases}$$

gegeben ist. Der Einheitspreis für Konsumenten ist p. Die Gesamtkosten sind

$$k + c_0 u + c_1 \int_0^1 \zeta(t) dt$$

und die Gesamtumsätze sind

$$p[Z + (u-Z)H(Z-u)]$$

Maximiere den Erwartungswert der Profit, um die optimale Bestellung u^* zu finden.

29. Ergänze das letzte Beispiel für den Fall dass $\zeta(t) = (u - tZ)\cdot H(u - tZ)$ so definiert ist.

30. Ergänze das vorletzte Beispiel für zwei Intervalle, $0 < t < 1$ und $1 < t < 2$, und bestimme die Bestellungen u_0^* und u_1^* zu Beginn der jeweiligen Intervalle, die den Erwartungswert der Gesamtprofit maximieren.