Maß und Integral im SS 03 – Zusammenfassung am 25.Jun 2003

○ Kann ich den Additivitätssatz beweisen, sogar in dem Fall, daß die punktweise Summe nicht notwendigerweise wohl definiert wird?

○ Kann ich den Monotone Konvergenz Satz beweisen?

○ Wenn μ σ-endlich ist, g, h Borel messbar sind, und $\int_\Omega g d\mu$ und $\int_\Omega h d\mu$ existieren, kann ich zeigen, daß $\int_\Omega g d\mu \leq \int_\Omega h d\mu$ gilt genau dann wenn $g \leq h$ f.ü. $[\mu]$ gilt. Was kann ich dann über die Fälle $g = 0$ $[\mu]$ und $g = h$ f.ü. $[\mu]$ sagen?

○ Kann ich unter den Voraussetzungen eines Beispiels und mit Hilfe des obigen verallgemeinerten Additivitätssatzes die Gleichung $\frac{d}{dx} \int_a^b f(x,y)dy = \int_a^b f_x(x,y)dy$ beweisen?

○ Kann ich zeigen, daß das Riemannsche Integral mit dem Lebesgueschen Integral übereinstimmt, wenn die beiden existieren?

○ Kann ich den Jordan-Hahn Satz beweisen?

○ Für eine beschränkte Verteilungsfunktion F_0 auf $\boldsymbol{R}$, kann ich eine eindeutige Zerlegung $F_0 = F_1 + F_2 + F_3$, $\lambda_i(a,b] = F_i(b) - F_i(a)$, $i = 0, 3$, beweisen, wobei λ_1 ein Zählmaß ist, λ_2 absolut stetig $[\mu]$ (Lebesguesches Maß) ist, und λ_3 stetig und singulär $[\mu]$ ist? Habe ich ein explizites Beispiel $\{F_i\}$, wofür ich entsprechende Dichtefunktionen $\{f_i\}$ geben kann?

○ Kann ich zeigen, die Cantorsche Funktion F ist stetig und wachsend, $F' = 0$ gilt f.ü. $[\mu]$ (Lebesguesches Maß), F ist nicht absolut stetig, und das Maß $\lambda(a,b] = F(b) - F(a)$ ist singulär $[\mu]$ (Lebesguesches Maß)?

○ Kann ich zeigen, daß eine reelle Funktion einer reellen Variable absolut stetig ist, genau dann wenn sie ein unbestimmtes Integral ihrer Ableitung ist?

○ Kann ich zeigen, daß die $L^p(\Omega)$-Räume $(1 \leq p \leq \infty)$ Banachräume sind?

○ Kann ich zeigen, daß $C_0^\infty(\Omega)$ dicht in $L^p(\Omega)$ $(1 \leq p < \infty)$ ist?

○ Habe ich ein Beispiel einer Funktion χ, wobei $\|\chi - \phi_n\|_{L^\infty(\Omega)} \to 0$ für keine Folge $\{\phi_n\} \subset C^0(\Omega)$ gilt?

○ Habe ich ein Beispiel einer Folge $\{f_n\}$ und einer Funktion f, wobei $f_n \xrightarrow{\mu} f$ und $f_n \xrightarrow{L^p} f$ gelten, aber $f_n \longrightarrow f$ f.ü. gilt nicht? Kann ich eine Teilfolge $\{f_{n'}\}$ finden, wobei $f_n \longrightarrow f$ f.ü. $[\mu]$ (Lebesguesches Maß) gilt?

○ Kann ich zeigen, daß die Sobolevräume $W^{m,p}(\Omega)$ $(1 \leq p \leq \infty, m \in \boldsymbol{N}_0)$ Banachräume sind?