Die mit der Sup-Norm ausgestatteten stetigen Funktionen bilden einen Banachraum

Definiere die Menge

$$C^0(S) = \{f : f \text{ stetig auf } S\}$$

und die Sup-Norm:

$$\|f\|_{C^0(S)} = \sup_{x\in S} |f(x)|$$

Die mit der Sup-Norm ausgestatteten stetigen Funktionen bilden einen normierten Vektorraum, da die folgenden offensichtlich gelten:

$$\begin{array}{rcll} \|f\|_{C^0(S)} & = & 0 & \Rightarrow f = 0 \\ \|\alpha f\|_{C^0(S)} & = & |\alpha| \|f\|_{C^0(S)} & \forall \alpha \text{ skalar} \\ \|f+g\|_{C^0(S)} & \leq & \|f\|_{C^0(S)} + \|g\|_{C^0(S)} & \text{(Dreiecksungleichung)} \end{array}$$

Der normierte Vektorraum ist ein Banachraum, wenn er vollständig ist, d.h. wenn jede Cauchysche Folge im Vektorraum einen Limes im selben Vektorraum hat. Sei $\{f_n\} \subset C^0(S)$ eine Cauchysche Folge bezüglich der Sup-Norm:

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N, \quad \text{s.d.} \quad n, m \geq N \Rightarrow \|f_n - f_m\|_{C^0(S)} \leq \varepsilon.$$

Da $\{f_n(x)\}$ eine Cauchysche Folge in (dem vollständigen Raum) $\boldsymbol{R}$ für fixiertes x ist, wird $f(x)$ wie folgt wohl definiert:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x), \qquad x \in S.$$

Es wird nun gezeigt, daß die Folge $\{f_n\}$ gegen f in der Sup-Norm konvergiert. Sei $\varepsilon > 0$ und wähle N groß genug, so daß $n, m \geq N \Rightarrow \|f_n - f_m\|_{C^0(S)} \leq \varepsilon$. Dann gilt

$$\begin{array}{rcccl} \|f - f_n\|_{C^0(S)} & = & \sup_{x\in S} |f(x) - f_n(x)| & \leq & \sup_{x\in S} \sup_{m\geq N} |f_m(x) - f_n(x)| \\ & = & \sup_{m\geq N} \sup_{x\in S} |f_m(x) - f_n(x)| & = & \sup_{m\geq N} \|f_m(x) - f_n(x)\|_{C^0(S)} \quad \leq \quad \varepsilon. \end{array}$$

Es bleibt zu zeigen, daß f stetig ist. Wenn $\hat{x}$ ein isolierter Punkt in S ist, ist f klar stetig in $\hat{x}$. Sei $\hat{x}$ ein Häufungspunkt von S und fixiere $\varepsilon > 0$. Da $\|f - f_n\|_{C^0(S)} \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ gilt, gibt es ein N groß genug, so daß $n \geq N \Rightarrow$

$$\sup_{x\in S} |f(x) - f_n(x)| = \|f - f_n\|_{C^0(S)} \leq \varepsilon/3.$$

Da f_N stetig in $\hat{x}$ ist, gibt es ein $\delta > 0$, so daß

$$|x - \hat{x}| \leq \delta \Rightarrow |f_N(x) - f_N(\hat{x})| \leq \varepsilon/3.$$

Daher für $|x - \hat{x}| \leq \delta$ gilt:

$$\begin{array}{rcccccc} |f(x) - f(\hat{x})| & \leq & |f(x) - f_N(x)| & + & |f_N(x) - f_N(\hat{x})| & + & |f_N(\hat{x}) - f(\hat{x})| \\ & \leq & \|f - f_n\|_{C^0(S)} & + & \varepsilon/3 & + & \|f - f_n\|_{C^0(S)} \\ & \leq & & & \varepsilon & & \end{array}$$

Da f stetig ist, hat jede Cauchysche Folge in $C^0(S)$ einen Limes in $C^0(S)$, und daher bilden die mit der Sup-Norm ausgestatteten stetigen Funktionen einen Banachraum.