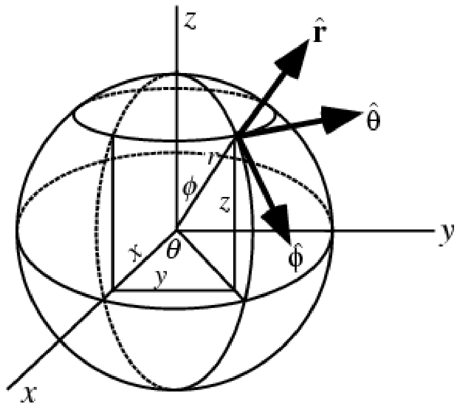
Eine gleichmäßige Verteilung von Niveaukurven auf einer Sphäre

Diskontinuum. Wir suchen drei Flächen mit dem selben Flächeninhalt auf einer Einheitssphäre, in denen $\omega = 0$, $\omega = \frac{1}{2}$ beziehungsweise $\omega = 1$ gelten. Sei ω eine Funktion nur von ϕ aus den folgenden Kugelkoordinaten,



so daß

$$\omega(\phi) = \begin{cases} 0, & \phi \in [0, \phi_1] \\ \frac{1}{2}, & \phi \in (\phi_1, \phi_2) \\ 1, & \phi \in [\phi_1, \pi] \end{cases} .$$

Der Flächeninhalt für die Fläche zwischen ϕ_1 und ϕ_2 $(0 < \phi_1 < \phi_2 < \pi)$ ist $(r = 1)$:

$$\mathrm{FI}(\phi_1, \phi_2) = r^2 \int_0^{2\pi} \int_{\phi_1}^{\phi_2} \sin(\phi) d\phi d\theta = 2\pi \int_{\phi_1}^{\phi_2} \sin(\phi) d\phi = 2\pi[-\cos(\phi_2) + \cos(\phi_1)].$$

Deshalb werden die folgenden Gleichungen erfordert:

$$\begin{aligned} -\cos(\phi_1) + \cos(0) \quad &= \quad -\cos(\phi_2) + \cos(\phi_1) \quad = \quad -\cos(\pi) + \cos(\phi_2) \\ 1 - \cos(\phi_1) \quad &= \quad \qquad\qquad\qquad\qquad\quad = \quad 1 + \cos(\phi_2). \end{aligned}$$

Aus der letzten Zeile folgt die Gleichung $\pi - \phi_2 = \phi_1$. Nach Substitution in der obigen Gleichungen bekommen wir $\phi_1 = \cos^{-1}(\frac{1}{3})$ und $\phi_2 = \cos^{-1}(-\frac{1}{3})$.

Kontinuum. Das obige Verfahren könnte mit mehreren Werten $\{\omega_i\} \subset [0, 1]$ wiedergeholt werden, und das gewünschte Ergebnis wird in dem Limes für ein Kontinuum geleistet. Die gewünschten Niveaukurven könnten auch direkt gefunden werden. Der Flächeninhalt für die Fläche zwischen einem fixierten ϕ_0 und einem von ω abhängigen $\phi(\omega)$ ist:

$$\mathrm{FI}(\phi_0, \phi(\omega)) = r^2 \int_0^{2\pi} \int_{\phi_0}^{\phi(\omega)} \sin(\phi) d\phi d\theta = 2\pi[-\cos(\phi(\omega)) + \cos(\phi_0)].$$

Um die Verteilung der Niveaukurven ($\omega =$Konstante) gleichmäßig zu machen, muss die Ableitung nach ω von dem obigen Ausdruck eine Konstante sein. Durch Integration bekommen wir:

$$D_\omega[\cos(\phi_0) - \cos(\phi(\omega))] = k_1 \quad \Rightarrow \quad \cos(\phi_0) - \cos(\phi(\omega)) = k_2 + k_1\omega.$$

Mit den Randbedingungen $\omega(\phi = 0) = 0$ und $\omega(\phi = \pi) = 1$ finden wir $k_2 = \cos(\phi_0) - 1$ und $k_2 = 2$. Deshalb ist $\phi(\omega) = \cos^{-1}(1 - 2\omega)$ oder

$$\omega(\phi) = \tfrac{1}{2}[1 - \cos(\phi)].$$