Skriptum für die Zusammenfassungsblätter, Maß und Integral im SS 03

1. *Kann ich die folgenden Eigenschaften des Riemannschen Integrals zeigen: eine stetige Funktion ist Riemann integrierbar, die Trapez-Regel konvergiert für eine Riemann-integrierbare Funktion, Riemannsche Integrale konvergieren wenn die Funktionen gleichmäßig konvergieren.*

   Sei $f \in C([a,b])$. Stetigkeit auf einem kompakten Intervall impliziert gleichmäßig Stetigkeit. Daher für gegebenes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, so daß $|x-y| < \delta$ impliziert $|f(x) - f(y)| < \varepsilon/(b-a)$. Sei $\{x_n\}_{n=0}^N$ eine Zerlegung vom Intervall $[a,b]$ mit $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = b$ und $\max_{1\le n\le N}\{|x_n - x_{n-1}|\} < \delta$. Dann gilt $\max_{a\le x\le b}[f_\mathrm{o}(x) - f_\mathrm{u}(x)] < \varepsilon/(b-a)$ und daher die folgende Ungleichung:

$$\left|\int_a^b f_\mathrm{o}(x)dx - \int_a^b f_\mathrm{u}(x)dx\right| = \int_a^b [f_\mathrm{o}(x) - f_\mathrm{u}(x)]dx \le \max_{a\le x\le b}[f_\mathrm{o}(x) - f_\mathrm{u}(x)]\int_a^b dx \le \varepsilon.$$

   Sei f Riemann integrierbar. Wähle einen Gitter $\{x_n\}_{n=0}^N$, $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = b$ für das Intervall $[a,b]$. Mit der stückweise linearen Funktion,

$$f_\mathrm{T}(x) = f(x_{n-1}) + \frac{x - x_{n-1}}{x_n - x_{n-1}}[f(x_n) - f(x_{n-1})], \qquad x \in [x_{n-1}, x_n], \qquad n = 1, \dots, N$$

   kann der Fehler der Trapez-Regel so dargestellt werden:

$$\left|\int_a^b f(x)dx - \sum_{n=1}^N \frac{f(x_n) + f(x_{n-1})}{2}(x_n - x_{n-1})\right| = \left|\int_a^b f(x)dx - \int_a^b f_\mathrm{T}(x)dx\right|$$

$$\le \int_a^b |f(x)dx - f_\mathrm{T}(x)|dx \le \int_a^b [f_\mathrm{o}(x) - f_\mathrm{u}(x)]dx = \int_a^b f_\mathrm{o}(x)dx - \int_a^b f_\mathrm{u}(x)dx.$$

   Die letzte Differenz verschwindet wenn $\max_{1\le n\le N}\{|x_n - x_{n-1}|\} \to 0$.

   Sei $\{f_n\}$ eine Funktionenfolge, die auf dem Intervall $[a,b]$ gleichmäßig gegen f konvergiert. Daher für gegebenes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $N = N(\varepsilon) > 0$, so daß $n \ge N$ impliziert $|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon/(b-a)$, für jedes $x \in [a,b]$. Dann gilt die Ungleichung:

$$\left|\int_a^b f(x)dx - \int_a^b f_n(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x) - f_n(x)|dx \le \sup_{a\le x\le b}[f(x) - f_n(x)]\int_a^b dx \le \varepsilon.$$

2. *Habe ich ein Beispiel einer unendlich differenzierbaren Funktion mit kompaktem Träger?*

   Definiere:

$$\phi_\varepsilon(x) = \begin{cases} \exp\left[\dfrac{1}{x^2 - \varepsilon^2}\right], & |x| < \varepsilon, \\ 0, & \text{sonst}, \end{cases} \qquad c_\varepsilon = \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \phi_\varepsilon(x)dx.$$

   und $\psi_\varepsilon(x) = \phi_\varepsilon(x)/c_\varepsilon$ so $\int_{-\infty}^{+\infty}\psi_\varepsilon(x)dx = 1$ und die Glattheit von ψ_ε folgt aus der von ϕ_ε. Zuerst ist ϕ_ε stetig:

$$\lim_{x\to\varepsilon^-}\phi_\varepsilon(x) = \lim_{x\to\varepsilon^-}\exp\left[\frac{1}{x^2 - \varepsilon^2}\right] = 0 = \lim_{x\to-\varepsilon^+}\exp\left[\frac{1}{x^2 - \varepsilon^2}\right] = \lim_{x\to-\varepsilon^+}\phi_\varepsilon(x)$$

   und nach der Riemann-Integrierbarkeit von stetigen Funktionen ist c_ε wohl definiert. Nun hat die k-te Ableitung von ϕ_ε die Gestalt,

$$\phi_\varepsilon^{(k)}(x) = p_k(x)q_k(x), \qquad q_k(x) = \frac{1}{(x^2 - \varepsilon^2)^{2k}}\exp\left[\frac{1}{x^2 - \varepsilon^2}\right],$$

wobei $p_k(x)$ ein Polynom ist. Wegen der Entwicklung

$$\frac{1}{x^2-\varepsilon^2} = \frac{1}{2\varepsilon}\frac{1}{x-\varepsilon} - \frac{1}{2\varepsilon}\frac{1}{x+\varepsilon}$$

kann q_k so dargestellt werden:

$$q_k(x) = f_k(x)g_k(x), \qquad f_k(x) = \frac{\exp\left[\frac{1}{2\varepsilon}\frac{1}{x-\varepsilon}\right]}{(x-\varepsilon)^{2k}}, \qquad g_k(x) = \frac{\exp\left[-\frac{1}{2\varepsilon}\frac{1}{x+\varepsilon}\right]}{(x+\varepsilon)^{2k}}.$$

Nun definiere $y = -1/(x-\varepsilon)$ so $y \to \infty$ wenn $x \to \varepsilon^-$. Dann mit der l'Hospital-Regel folgt:

$$\lim_{x\to\varepsilon^-} f_k(x) = \lim_{y\to\infty} \frac{y^{2k}}{e^{y/(2\varepsilon)}} = \cdots = \lim_{y\to\infty} \frac{(2k)!}{(2\varepsilon)^{-2k}e^{y/(2\varepsilon)}} = 0.$$

Schließlich definiere $z = 1/(x+\varepsilon)$ so $z \to \infty$ wenn $x \to -\varepsilon^+$. Dann mit der l'Hospital-Regel folgt:

$$\lim_{x\to-\varepsilon^+} g_k(x) = \lim_{z\to\infty} \frac{z^{2k}}{e^{z/(2\varepsilon)}} = \cdots = \lim_{z\to\infty} \frac{(2k)!}{(2\varepsilon)^{-2k}e^{z/(2\varepsilon)}} = 0.$$

Mit diesen Ergebnissen folgt:

$$\lim_{x\to\pm\varepsilon^\mp} \phi_\varepsilon^{(k)}(x) = \lim_{x\to\pm\varepsilon^\mp} p_k(x) \cdot \lim_{x\to\pm\varepsilon^\mp} q_k(x) = \lim_{x\to\pm\varepsilon^\mp} p_k(x) \cdot \lim_{x\to\pm\varepsilon^\mp} f_k(x) \cdot \lim_{x\to\pm\varepsilon^\mp} g_k(x) = 0.$$

Da $\phi_\varepsilon(x)$ analytisch für $|x| \neq \varepsilon$ und unendlich differenzierbar für $|x| = \varepsilon$ ist, ist $\phi_\varepsilon(x)$ überall unendlich differenzierbar.

3. *Kenne ich einen Faltungsoperator $L_\varepsilon : C^0 \to C^\infty$, und kann ich zeigen, daß $L_\varepsilon f \to f$ punktweise konvergiert, wenn $\varepsilon \to 0$?*

Definiere:

$$[L_\varepsilon f](x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_\varepsilon(x-y)f(y)dy$$

wobei ψ_ε oben definiert wird. Nimm an, daß f stetig ist. Die punktweise Konvergenz $L_\varepsilon f \to f$ wird wie folgt etabliert. Nach dem Mittelwertsatz gibt es ein $\sigma \in [-\varepsilon, \varepsilon]$ so daß:

$$[L_\varepsilon f](x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_\varepsilon(x-y)f(y)dy = \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \psi_\varepsilon(s)f(x-s)ds$$

$$= f(x-\sigma)\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \psi_\varepsilon(s)ds = f(x-\sigma) \to f(x), \qquad \varepsilon \to 0.$$

Betrachte nun die erste Ableitung von $[L_\varepsilon f](x)$:

$$\frac{[L_\varepsilon f](x+h) - [L_\varepsilon f](x)}{h} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\psi_\varepsilon(x+h-y) - \psi_\varepsilon(x-y)}{h} f(y)dy.$$

Nimm an, daß $h > 0$ gilt. Das folgende Argument ist ähnlich für $h < 0$. Nach dem Taylor-Satz gibt es ein $\xi(y,h) \in [x, x+h]$ so daß $\psi_\varepsilon(x+h-y) - \psi_\varepsilon(x-y) = h\phi_\varepsilon'(\xi(y,h)-y)$. Daher gilt:

$$\frac{[L_\varepsilon f](x+h) - [L_\varepsilon f](x)}{h} - \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_\varepsilon'(x-y)f(y)dy$$

$$= \int_{x-\varepsilon}^{x+h+\varepsilon} [\psi_\varepsilon'(\xi(y,h)-y) - \psi_\varepsilon'(x-y)]f(y)dy$$

wobei die Grenzen im letzten Integral den kompakten Träger von ψ_ε reflektieren. Beachte, daß ψ_ε und alle ihrer Ableitungen gleichmäßig stetig auf $\boldsymbol{R}$ sind. Daher für gegebenes $\delta > 0$ gibt es ein $\eta > 0$ klein genug so daß $0 \leq \xi(y,h) - x \leq h < \eta < 1$ impliziert:

$$|\psi'_\varepsilon(\xi(y,h) - y) - \psi'_\varepsilon(x-y)| \leq \delta/\alpha, \qquad \forall y \in [x-\varepsilon, x+1+\varepsilon], \qquad \alpha = \int_{x-\varepsilon}^{x+1+\varepsilon} |f(y)|dy.$$

Dann für $0 \leq \xi(y,h) - x \leq h < \eta < 1$ gilt:

$$\left|\frac{[L_\varepsilon f](x+h) - [L_\varepsilon f](x)}{h} - \int_{-\infty}^{+\infty} \psi'_\varepsilon(x-y)f(y)dy\right|$$

$$\leq \int_{x-\varepsilon}^{x+h+\varepsilon} |\psi'_\varepsilon(\xi(y,h) - y) - \psi'_\varepsilon(x-y)||f(y)|dy$$

$$\leq \left[\int_{x-\varepsilon}^{x+1+\varepsilon} |f(y)|dy\right] \sup_{x-\varepsilon \leq y \leq x+1+\varepsilon} |\psi'_\varepsilon(\xi(y,h) - y) - \psi'_\varepsilon(x-y)| \leq \delta.$$

Da jeder abgeleitete Kern $\psi_\varepsilon^{(k)}$ die oben verwendeten Eigenschaften hat, folgt:

$$[L_\varepsilon f]^{(k)}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_\varepsilon^{(k)}(x-y)f(y)dy.$$

4. *Kenne ich eine Klasse von glatten Maßen, die in gewissem Sinn gegen ein singuläres Maß konvergieren.*

   Für eine genugend brave Menge $A \subset \boldsymbol{R}$ definiere:

$$\mu_\varepsilon(A) = \int_A \psi_\varepsilon(x)dx, \qquad \mu_0(A) = \begin{cases} 1, & 0 \in A \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

   wobei $\psi_\varepsilon = \phi_\varepsilon/c_\varepsilon$ oben definiert wird. Die Maßen $\{\mu_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ sind glatt im Sinn, daß sie glatte Dichten $\{\psi_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ haben. Das Maß μ_0 ist singulär (bezüglich z.B. μ_ε, $\varepsilon > 0$) im Sinn, daß μ_0 in einem Punkt (in einer null Maß Menge N, d.h. $\mu_\varepsilon(N) = 0$, $N = \{0\}$, $\varepsilon > 0$) konzentriert wird. Die Maßen $\{\mu_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ konvergieren gegen μ_0 im folgenden Sinn:

$$\int_{\boldsymbol{R}} f(x)d\mu_\varepsilon(x) = \int_{\boldsymbol{R}} f(x)\psi_\varepsilon(x)dx = \int_{\boldsymbol{R}} \psi_\varepsilon(-x)f(x)dx$$

$$= [L_\varepsilon f](0) \stackrel{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} f(0) = \int_{\boldsymbol{R}} f(x)d\mu_0(x), \qquad \forall f \in C^0(\boldsymbol{R})$$

   wobei die punktweise Konvergenz $[L_\varepsilon f](x) \to f(x)$ vom letzten Beispiel verwendet wird.

5. *Kenne ich eine Differentialgleichung, die ich im schwachen Sinn formulieren und lösen kann?*

   Definiere $f(x) = \operatorname{sgn}(x)$ und betrachte die Differentialgleichung $F'(x) = f(x)$, $F(0) = 0$. Für $x \neq 0$ sieht die Differentialgleichung so aus:

$$F'(x) = \begin{cases} +1, & x > 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases} \quad \text{oder} \quad F(x) = \begin{cases} a + x, & x > 0 \\ b - x, & x < 0 \end{cases} \quad \text{und} \quad F(0) = 0 \;\Rightarrow\; a = b = 0.$$

   Es ist zu vermuten, daß $F(x) = |x|$ einer Art einer Lösung der Differentialgleichung ist. Die sogenannte schwache Formulierung der Differentialgleichung sieht so aus:

$$\int_{\boldsymbol{R}} f(x)\phi(x)dx = \int_{\boldsymbol{R}} F'(x)\phi(x)dx = -\int_{\boldsymbol{R}} F(x)\phi'(x)dx, \qquad \forall \phi \in C_0^\infty(\boldsymbol{R}).$$

Die Differentialgleichung $f = F'$ wurde mit ϕ multipliziert und partielle Integration wurde durchgeführt. Die Funktion $\phi \in C_0^\infty(\boldsymbol{R})$ *verschmiert* die Differentialgleichung in gewissem Sinn. Anderseits kann ϕ in einem Punkt konzentriert werden, und dadurch stimmt die schwache Formulierung mit der *starken* (punktweisen) Formulierung überein. Beachte, daß die Differentialgleichung $f = F'$ im schachen Sinn erfüllt wird:

$$\begin{aligned}
\int_{\boldsymbol{R}} f(x)\phi(x)dx &= \int_{x>0} \phi(x)dx - \int_{x\le 0} \phi(x)dx \\
(x|_{x=0} = 0 = \phi|^{x=+\infty}) &= \left[x\phi(x)|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} x\phi'(x)dx\right] \\
(x|^{x=0} = 0 = \phi|_{x=-\infty}) &- \left[x\phi(x)|_{-\infty}^0 - \int_{-\infty}^0 x\phi'(x)dx\right] = -\int_{\boldsymbol{R}} |x|\phi'(x)dx \\
&= -\int_{\boldsymbol{R}} F(x)\phi'(x)dx, \qquad \forall \phi \in C_0^\infty(\boldsymbol{R}).
\end{aligned}$$

Ähnlich kann man zeigen, daß $u_0(x) = \frac{1}{2}(1-|x|)$ die folgende Differentialgleichung im schwachen Sinn löst,

$$-u''(x) = \psi_0(x), \quad x \in (0,1), \qquad u(-1) = u(+1) = 0, \qquad \psi_0(x) = \text{“}\lim_{\varepsilon\to 0}\psi_\varepsilon(x)\text{”}$$

da u_0 die folgende Gleichung erfüllt:

$$-\int_{-1}^{+1} \phi''(x)u_0(x)dx = \phi(0), \qquad \forall \phi \in C_0^\infty([-1,1]).$$

6. *Habe ich Beispiele von Algebren, σ-Algebren, (signierten) Inhalten, (signierten) Maßen und (signierten) Prämaßen?*

Für $A \subset \Omega$, erfüllt $\mathcal{F} = \{\Omega, \emptyset, A, A^c\}$ alle Bedingungen für eine Algebra, sogar die für eine σ-Algebra. Deshalb gilt $\mathcal{F} = \sigma(A)$. Die Potenzmenge $\mathcal{P}(\Omega)$ erfüllt auch alle Bedingungen für eine Algebra und eine σ-Algebra. Auf der anderen Seite ist die Menge von offenen Mengen in $\boldsymbol{R}$ keine Algebra. Die Menge $\mathcal{F}_0$ von endlichen disjunkten Vereinigungen aus $\{(a,b], (a,\infty)$ oder $\emptyset : -\infty \le a < b < \infty\}$ ist eine Algebra über $\boldsymbol{R}$ aber keine σ-Algebra, da $\cup_{n=1}^\infty (0, 1-\frac{1}{n}] = (0,1) \notin \mathcal{F}_0$.

Sei $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\boldsymbol{Q})$ und für $A \subset \boldsymbol{Q}$ definiere $\mu_0(A) = 0$ wenn A endlich ist und $\mu_0(A) = \infty$ wenn A unendlich ist. Nach Beispiel 17, ist μ_0 ein Inhalt aber kein Prämaß oder Maß auf $\mathcal{F}$.

Sei $\mathcal{F}_0$ die oben definierte Algebra. Definiere λ_0 auf $\mathcal{F}_0$ wie folgt:

$$\begin{aligned}
\lambda_0(-\infty, a] &= a, \quad a \in \boldsymbol{R}, \qquad \lambda_0(a,b] = b-a, \quad a,b \in \boldsymbol{R},\ a < b, \\
\lambda_0(b,\infty) &= -b, \quad b \in \boldsymbol{R}, \qquad \lambda_0(\boldsymbol{R}) = 0,
\end{aligned}$$

$$\lambda_0\left(\cup_{n=1}^N I_n\right) = \sum_{n=1}^N \lambda_0(I_n), \quad I_n \cap I_m = \emptyset, \quad \{I_n\} \subset \{(a,b] \text{ oder } (a,\infty) : -\infty \le a < b < \infty\}.$$

Nach Beispiel 14 ist λ_0 ein signierter Inhalt aber kein Prämaß oder Maß.

Definiere $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\boldsymbol{R})$ und

$$\mu(A) = \sum_{\boldsymbol{N} \ni n \in A} 2^{-n}, \qquad A \in \mathcal{F}.$$

Nach Beispiel 12 ist μ ein Maß, und $\lambda = -\mu$ ist ein signiertes Maß.

Nach dem Satz 1.4.3 liefert jede Verteilungsfunktion ein Prämaß ν auf der oben definierten Algebra $\mathcal{F}_0$. Dieses Prämaß ν wird im Satz 1.4.3 nicht explizit auf $\sigma(\mathcal{F}_0) = \mathcal{B}(\boldsymbol{R})$ definiert, aber Satz 1.4.4 garantiert eine Ausdehnung zu einem Maß auf $\mathcal{B}(\boldsymbol{R})$. Natürlich ist $\lambda = -\nu$ ein signiertes Prämaß.

7. *Habe ich eine Anwendung des Brave-Mengen-Prinzips?*

Definiere $\mathcal{C} = \{A_n\}_{n=1}^N \subset \mathbf{\Omega}$ und $\mathcal{S}$ als verschiedene (und so notwendigerweise endliche) Vereinigungen von Mengen aus der endlichen Sammlung $\mathcal{D} = \{\cap_{n=1}^N B_n : B_n = A_n \text{ oder } A_n^{\mathrm{c}}\}$. Das Brave-Mengen-Prinzip wird verwendet, um zu zeigen, daß $\mathcal{S} = \sigma(\mathcal{C})$ gilt: (1) $\mathcal{C} \subset \mathcal{S}$, (2) $\mathcal{S}$ ist eine σ-Algebra, (3) $\mathcal{S} \subset \sigma(\mathcal{C}) \subset \sigma(\mathcal{S}) = \mathcal{S}$.

(1) Mit $N = 1$, gelten $\mathcal{C} = \{A_1\}$, $\mathcal{D} = \{A_1, A_1^{\mathrm{c}}\}$ und $\mathcal{S} = \{\Omega, \emptyset, A_1, A_1^{\mathrm{c}}\}$, so $\mathcal{C} \subset \mathcal{S}$ und "$\mathcal{C}^{\mathrm{c}}$"$= \{A_n^{\mathrm{c}}\}_{n=1}^N \subset \mathcal{S}$ gelten. Nimm induktiv an, daß $\mathcal{C}, \mathcal{C}^{\mathrm{c}} \subset \mathcal{S}$ gilt, wenn $\mathcal{C}$ genau $N-1$ Elemente enthält. Nun nimm an, daß $\mathcal{C}$ genau N Elemente enthält. Wähle ein k zwischen 1 und N. Dann für ein beliebiges $A_l \in \{A_n : 1 \le n \ne k \le N\}$ und $A_k \in \mathcal{C}$ gilt:

$$A_k = (A_k \cap A_l) \cup (A_k \cap A_l^{\mathrm{c}}).$$

Es wird induktiv angenommen, daß A_l mit einer Vereinigung $\cup_{i=1}^I D_i$,

$$D_i \in \mathcal{D}_k = \{\cap_{k \ne n=1}^N B_n : B_n = A_n \text{ oder } A_n^{\mathrm{c}}\}$$

dargestellt werden kann, und daher kann $A_k \cap A_l$ mit einer Vereinigung aus $\mathcal{D}$ dargestellt werden:

$$A_k \cap A_l = A_k \cap \cup_{i=1}^I D_i = \cup_{i=1}^I (A_k \cap D_i), \qquad (A_k \cap D_i) \in \mathcal{D}.$$

Es wird auch induktiv angenommen, daß A_l^{c} mit einer Vereinigung $\cup_{j=1}^J E_j$, $E_j \in \mathcal{D}_k$ dargestellt werden kann, und daher kann $A_k \cap A_l^{\mathrm{c}}$ mit einer Vereinigung aus $\mathcal{D}$ dargestellt werden:

$$A_k \cap A_l^{\mathrm{c}} = A_k \cap \cup_{j=1}^J E_j = \cup_{j=1}^J (A_k \cap E_j), \qquad (A_k \cap E_j) \in \mathcal{D}.$$

Daher kann A_k mit der folgenden Vereinigung aus $\mathcal{D}$ dargestellt werden:

$$A_k = [\cup_{i=1}^I (A_k \cap D_i)] \cup [\cup_{j=1}^J (A_k \cap E_j)] \qquad (A_k \cap D_i), (A_k \cap E_j) \in \mathcal{D}.$$

Das selbe Argument gibt auch eine solche Darstellung für A_k^{c}. Da k beliebig war, gilt $\mathcal{C}, \mathcal{C}^{\mathrm{c}} \subset \mathcal{S}$.

(2) (a) Da A_1 und A_1^{c} mit Vereinigungen V_1 und V_2 aus $\mathcal{D}$ dargestellt werden können, kann Ω mit der Vereinigung $\Omega = A_1 \cup A_1^{\mathrm{c}} = V_1 \cup V_2$ aus $\mathcal{D}$ dargestellt werden. (b) Mit $N = 1$, gelten $\mathcal{C} = \{A_1\}$, $\mathcal{D} = \{A_1, A_1^{\mathrm{c}}\}$ und $\mathcal{S} = \{\Omega, \emptyset, A_1, A_1^{\mathrm{c}}\}$, so jede Vereinigung aus $\mathcal{S}$ liegt klar in $\mathcal{S}$. Nimm an, daß jede Vereinigung aus $\mathcal{S}$ in $\mathcal{S}$ liegt, wenn $\mathcal{C}$ genau $N-1$ Elemente enthält. Nun nimm an, daß $\mathcal{C}$ genau N Elemente enthält. Dann hat ein beliebiges $A \in \mathcal{S}$ eine solche Darstellung:

$$A = \cup_{m=1}^M D_m = \cup_{m=1}^M E_m \cap F_m, \qquad D_m \in \mathcal{D},\ \ E_m \in \mathcal{D}_N,\ \ F_m = A_N \text{ oder } A_N^{\mathrm{c}}.$$

Analog zu der algebraischen Entwicklung von $\Pi_{m=1}^M (a_m + b_m)$ gilt:

$$A^{\mathrm{c}} = \cap_{m=1}^M (E_m^{\mathrm{c}} \cup F_m^{\mathrm{c}}) = \cup_{\alpha \in \boldsymbol{R}^M, \alpha_m = 0,1} \{[\cap_{\alpha_m=0} E_m^{\mathrm{c}}] \cap [\cap_{\alpha_m=1} F_m^{\mathrm{c}}]\}$$

Es wird induktiv angenommen, daß Vereinigungen aus $\mathcal{D}_N$ unter Komplimentierung abgeschlossen sind, und daher gilt:

$$\alpha \in \boldsymbol{R}^M, \qquad [\cap_{\alpha_m=0} E_m^{\mathrm{c}}] = [\cup_{\alpha_m=0} E_m]^{\mathrm{c}} = \cup_{l=1}^{L_\alpha} G_{\alpha,l}, \qquad G_{\alpha,l} \in \mathcal{D}_N.$$

Weiterhin gilt:

$$\alpha \in \boldsymbol{R}^M, \qquad [\cap_{\alpha_m=1} F_m^{\mathrm{c}}] = A_N \text{ oder } A_N^{\mathrm{c}} \text{ oder } \emptyset.$$

Falls $[\cap_{\alpha_m=1} F_m^{\mathrm{c}}] = A_N$ oder A_N^{c} gilt, ist $\{[\cap_{\alpha_m=0} E_m^{\mathrm{c}}] \cap [\cap_{\alpha_m=1} F_m^{\mathrm{c}}]\}$ eine Vereinigung von Mengen $G_{\alpha,l} \cap A_N$ oder $G_{\alpha,l} \cap A_N^{\mathrm{c}}$ in $\mathcal{D}$. Falls $[\cap_{\alpha_m=1} F_m^{\mathrm{c}}] = \emptyset$, ist $\{[\cap_{\alpha_m=0} E_m^{\mathrm{c}}] \cap [\cap_{\alpha_m=1} F_m^{\mathrm{c}}]\}$ eine (leere) Vereinigung von Mengen aus $\mathcal{D}$. In jedem Fall kann A^{c} mit einer Vereinigung von Mengen aus $\mathcal{D}$ dargestellt werden, und $\mathcal{S}$ ist unter Komplementierung abgeschlossen. (c) Nimm an, daß $\{C_m\}$ verschiedene (notwendigerweise endlich viele) Mengen aus $\mathcal{S}$ sind, so daß

$$C_m = \cup_{l=1}^{L_m} D_{lm}, \quad D_{lm} \in \mathcal{D} \quad \Rightarrow \quad \cup_{m=1}^M C_m = \cup_{m=1}^M \cup_{l=1}^{L_m} D_{lm} \in \mathcal{S}.$$

Daher ist $\mathcal{S}$ eine σ-Algebra.

(3) folgt sofort von (1) und (2).

8. *Habe ich ein Beispiel eines stetigen und eines nicht stetigen Maßes oder Inhalts?*

   Laut Satz 1.2.7 ist jedes endliche Maß stetig. Sonst folgt Stetigkeit von oben nur für Mengen mit endlichem Maß. Zum Beispiel ist das Zählmaß

$$\mu(A) = \sum_{\boldsymbol{N} \ni n \in A} 1, \qquad A \in \mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega), \quad \Omega = \boldsymbol{N}$$

   nicht stetig in der Leermenge:

$$A_n \downarrow \emptyset \quad \text{aber} \quad +\infty = \mu(A_n) \not\to \mu(\emptyset) = 0.$$

   Ein nicht stetiger signierte Inhalt wird in Beispiel 14 definiert:

$$A_n = (-n, n] \uparrow \boldsymbol{R} \quad \text{aber} \quad \lambda_0(A_n) = 2n \to +\infty \neq 0 = \lambda_0(\boldsymbol{R}).$$

   Ein nicht stetiger Inhalt wird im Beispiel 17 definiert:

$$\boldsymbol{Q} = \{r_n\}_{n=1}^{\infty}, \qquad 0 = \mu_0(\{r_n\}_{n=1}^{N}) \not\to +\infty = \mu_0(\boldsymbol{Q}).$$

   Noch ein nicht stetiger Inhalt wird im Beispiel 19 definiert:

$$\boldsymbol{Q} = \{r_n\}_{n=1}^{\infty}, \qquad 0 = \mu_0(\{r_n\}_{n=1}^{N}) \not\to 1 = \mu_0(\boldsymbol{Q}).$$

   Laut Satz 1.2.8 ist ein Inhalt σ-additiv, wenn er von unten stetig ist oder wenn er von oben in der Leermenge stetig ist.

9. *Habe ich eine Anwendung der disjunkte Mengen Darstellung für eine Vereinigung?*

   Betrachte eine Algebra $\mathcal{F}_0$ und einen Inhalt $\mu_0 \geq 0$. Dann wissen wir bereits, daß

$$\mu_0(\cup_{n=1}^N B_n) = \sum_{n=1}^N \mu_0(B_n), \qquad \text{für } \{B_n\} \subset \mathcal{F}_0, \quad B_n \cap B_m = \emptyset.$$

   Um zu zeigen, daß für beliebige $\{A_n\} \subset \mathcal{F}_0$ gilt:

$$\mu_0(\cup_{n=1}^N A_n) \leq \sum_{n=1}^N \mu_0(A_n)$$

   verwenden wir die Darstellung von $\cup_{n=1}^N A_n$ als Vereinigung von disjunkten Mengen:

$$\cup_{n=1}^N A_n = \cup_{n=1}^N B_n, \qquad B_1 = A_1, \quad B_n = \cap_{m=1}^{n-1} A_m^c \cap A_n, \quad n \geq 2, \qquad B_n \cap B_m = \emptyset.$$

   Damit erhalten wir:

$$\mu_0(\cup_{n=1}^N A_n) = \mu_0(\cup_{n=1}^N B_n) \stackrel{B_n \cap B_m = \emptyset}{=} \sum_{n=1}^N \mu_0(B_n) \stackrel{B_n \subset A_n}{\leq} \sum_{n=1}^N \mu_0(A_n)$$

   wobei endliche Additivität in der zweiten Gleichung verwendent wird und Satz 1.2.5.c in der Ungleichung verwendet wird.

10. *Kann ich zeigen, daß ein Maß beschränkt ist, genau dann wenn es endlich ist? Habe ich eine Mengenfunktion, mit der die Äquivalenz nicht gilt?*

    Nimm an, daß ein Maß μ von einem Maßraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ beschränkt ist. Dann gilt:

$$\infty > \sup\{\mu(A) : A \in \mathcal{F}\} > \mu(A) \geq 0, \quad \forall A \in \mathcal{F}.$$

    Nun nimm an, daß μ endlich ist. Weiterhin nimm an, daß μ unbeschränkt ist. Dann für jedes $n \in \boldsymbol{N}$ gibt es ein A_n mit $\mu(A_n) \geq n$. Definere $B_N = \cup_{n=1}^N A_n$ und $A = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$. Da $A_N \subset B_N \subset A$ gilt, folgt die nächste Ungleichung nach Satz 1.2.5.c:

$$\mu(A) \geq \mu(B_N) \geq \mu(A_N) \geq N \to \infty.$$

    Der Widerspruch impliziert die Beschränktheit von μ. Die Äquivalenz gilt nicht für den Inhalt, der im Beispiel 14 definiert wird.

11. *Für eine Algebra $\mathcal{F}_0$, kann ich zeigen, daß $\mathcal{G} = \{G : A_n \uparrow G, A_n \subset \mathcal{F}_0\}$ nicht notwendigerweise eine σ-Algebra ist? Kann ich zeigen, daß $\mathcal{D} = \{D : A_n \downarrow D, A_n \subset \mathcal{F}_0\}$ nicht notwendigerweise eine σ-Algebra ist?*

Behauptung: $\mathcal{G}$ ist nicht notwendigerweise ein σ-Algebra. Betrachte die Algebra $\mathcal{F}_0$ über $\Omega = \boldsymbol{R}$ von endlichen disjunkten Vereinigungen aus $\{(a,b], (a,\infty)$ oder $\emptyset : -\infty \le a < b < \infty\}$. Dann gilt:

$$(-\infty, 1-1/n] \in \mathcal{F}_0, \quad \forall n \in \boldsymbol{N}, \qquad (-\infty, 1-1/n] \uparrow (-\infty, 1) \quad \Rightarrow \quad (-\infty, 1) \in \mathcal{G}.$$

Da $(-\infty,1)^c = [1,\infty) \notin \mathcal{G}$, ist $\mathcal{G}$ keine σ-Algebra.

Behauptung: $\mathcal{D}$ ist nicht notwendigerweise ein σ-Algebra. Mit $\mathcal{F}_0$ oben definiert, gilt:

$$(1-1/n, \infty) \in \mathcal{F}_0, \quad \forall n \in \boldsymbol{N}, \qquad (1-1/n,\infty) \downarrow [1,\infty) \quad \Rightarrow \quad [1,\infty) \in \mathcal{D}.$$

Da $[1,\infty)^c = (-\infty,1) \notin \mathcal{D}$, ist $\mathcal{D}$ keine σ-Algebra.

12. *Für eine Algebra $\mathcal{F}_0$ und $\mathcal{G} = \{G : A_n \uparrow G, A_n \subset \mathcal{F}_0\}$, kann ich zeigen, daß $\mathcal{G} \subset \mathcal{H}$ gilt, wobei die Menge $\mathcal{H}$ im Satz 1.3.5 definiert wird?*

Sei ν ein Wahrscheinlichkeitsprämaß auf $\mathcal{F}_0$ und definiere $\mathcal{G} = \{G : A_n \uparrow G, A_n \subset \mathcal{F}_0\}$. Für $\mathcal{F}_0 \ni A_n \uparrow A$ definiere $\kappa(A) = \lim_{n\to\infty} \nu(A_n)$. Für $A \in \Omega$ definiere $\kappa^*(A) = \inf\{\kappa(G) : G \in \mathcal{G}, A \subset G\}$. Schliesslich definiere $\mathcal{H} = \{H \subset \Omega : \kappa^*(H) + \kappa^*(H^c) = 1\}$. Dann gilt:

$$\mathcal{F}_0 \ni A_n \uparrow G \in \mathcal{G} \quad \Rightarrow \quad \kappa^*(A_n) = \kappa(A_n) = \nu(A_n) \to \kappa(G) = \kappa^*(G).$$

Es wird *nicht* garantiert, daß $G^c \in \mathcal{G}$ gilt, aber es gilt:

$$A_n \subset G \Rightarrow G^c \subset A_n^c \quad \overset{1.3.3.c}{\Rightarrow} \quad \kappa^*(G^c) \le \kappa^*(A_n^c) \quad \overset{A_n^c \subset \mathcal{G}}{=} \quad \kappa(A_n^c) \quad \overset{A_n^c \subset \mathcal{F}_0}{=} \quad \nu(A_n^c).$$

Da $A_n, A_n^c \in \mathcal{F}_0 \subset \mathcal{G}$ gilt, folgt die Gleichung $\nu(A_n) + \nu(A_n^c) = 1$ vom Satz 1.3.2.b und daher:

$$\kappa^*(G^c) \le \nu(A_n^c) \quad \overset{1.3.2.b}{=} \quad 1 - \nu(A_n) \quad \overset{A_n \uparrow G}{\longrightarrow} \quad 1 - \kappa^*(G) \qquad \text{oder} \qquad \kappa^*(G) + \kappa^*(G^c) \le 1.$$

Vom Satz 1.3.3.b folgt die Ungleichung $1 \le \kappa^*(G) + \kappa^*(G^c)$ und daher gilt $G \in \mathcal{H}$:

$$1 \le \kappa^*(G) + \kappa^*(G^c) \le 1.$$

13. *Habe ich ein Beispiel eines Maßes oder Inhalts, in dem $\mu(A \cap B) + \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$ nicht gilt?*

Nach dem Satz 1.2.5.b gilt die Gleichung $\mu_0(A \cap B) + \mu_0(A \cup B) = \mu_0(A) + \mu_0(B)$ immer, wenn μ_0 ein Inhalt auf einer Algebra $\mathcal{F}_0$ definiert wird, und $A, B \in \mathcal{F}_0$ gilt. Der Satz 1.2.5.b gilt auch für ein Maß auf einer σ-Algebra $\mathcal{F}$, da das Maß auch ein Inhalt auf einer Algebra ist. Daher nach dem Satz 1.2.5.b gilt die Gleichung $\mu(A \cap B) + \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$ auch immer, wenn μ ein Maß auf einer σ-Algebra $\mathcal{F}$ definiert wird, und $A, B \in \mathcal{F}$ gilt. Deshalb müssen die gesuchten Beispiele die Annahmen $A, B \in \mathcal{F}_0$ oder $A, B \in \mathcal{F}$ verletzen.

(1) Definiere:

$$\mu_0(A) = \begin{cases} 0, & A \text{ endlich} \\ 1, & A \text{ unendlich} \end{cases} \qquad A \subset \boldsymbol{Q}.$$

Nach dem Beispiel 19, ist μ_0 ein Inhalt auf der Algebra $\mathcal{F}_0$ von endlichen Teilmengen aus $\boldsymbol{Q}$ und ihren Komplementen. Daher nach dem Satz 1.2.5.b gilt die betreffende Gleichung auf $\mathcal{F}_0$. Trotzdem gilt sie nicht auf $\mathcal{P}(\boldsymbol{Q})$:

$$0 + 1 = \mu_0(A \cap B) + \mu_0(A \cup B) = \mu_0(A) + \mu_0(B) = 1 + 1 \qquad A = [0,1] \cap \boldsymbol{Q}, \quad B = [1,2] \cap \boldsymbol{Q}.$$

(2) Sei $A \subset [0,1)$ die nicht Lebesgue messbare Menge aus Beispiel 27. Trotz der nicht Messbarkeit von A, wird

$$\mu^*(A) = \inf\{\mu(G) : G \in \mathcal{G}, A \subset G\}, \quad \mathcal{G} = \{G : A_n \uparrow G, A_n \subset \mathcal{F}_0(\boldsymbol{R})\},$$
$$\mu = \text{ Lebesguesche Maß}$$

im Satz 1.3.3 wohl definiert. Mit dem selben Beweis daß $\boldsymbol{R} = \cup\{r + A : r \in \boldsymbol{Q}\}$ gilt, folgt $[0,1) = \cup_{n=1} A_n$, wobei $A_n = \{r_n \tilde{+} A\}$, $\{r_n\} = \boldsymbol{Q} \cap [0,1)$, und $\tilde{+}$ die Summe modulo 1 bezeichnet. Da μ^* ein äußeres Maß ist, ist es σ-subadditiv:

$$1 = \mu[0,1) = \mu^*[0,1) = \mu^*(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n).$$

Nach dem Satz 1.3.3.c gilt:

$$\cup_{n=1}^{N} A_n \subset A \subset [0,1) \qquad \Rightarrow \qquad \mu^*(\cup_{n=1}^{N} A_n) \leq \mu^*(A) \leq \mu^*[0,1) = \mu[0,1) = 1.$$

Da μ translationsinvariant auf $\mathcal{G} \subset \bar{\mathcal{B}}(\boldsymbol{R})$ ist, ist μ^* translationsinvariant auf $\boldsymbol{R}$:

$$\begin{aligned}\mu^*(A + c) &= \inf\{\mu(G) : G \in \mathcal{G}, A + c \subset G\} = \inf\{\mu(G) : G \in \mathcal{G}, A \subset G - c\} \\ &= \inf\{\mu(\tilde{G} + c) : \tilde{G} \in \mathcal{G}, A \subset \tilde{G}\} = \inf\{\mu(\tilde{G}) : \tilde{G} \in \mathcal{G}, A \subset \tilde{G}\} = \mu^*(A).\end{aligned}$$

Daher gilt:

$$1 \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A).$$

Es folgt, daß $\mu^*(A) \in (0,1]$ gilt. Nach der σ-Subadditivität gilt:

$$\mu^*(\cup_{n=1}^{N} A_n) \leq \sum_{n=1}^{N} \mu^*(A_n) = \sum_{n=1}^{N} \mu^*(A).$$

Die linke Seite ist nie größer als 1, aber die rechte Seite steigt mit N. Nimm an, daß N gross genug ist, daß die linke Seite streng kleiner als die rechte Seite ist. Wenn die betreffende Gleichung gilt, dann folgt:

$$\mu^*(A_k \cup B_{k-1}) + \mu^*(A_k \cap B_{k-1}) = \mu^*(A_k) + \mu^*(B_{k-1}), \qquad k = 2, \ldots, N \quad B_m = \cup_{n=1}^{m} A_n.$$

Da $A_k \cup B_{k-1} = B_k$ und $A_k \cap B_{k-1} = \emptyset$ $(A_n \cap A_m = \emptyset)$ gelten, folgt:

$$\mu^*(B_k) = \mu^*(A_k) + \mu^*(B_{k-1}), \qquad k = 1, \ldots, N, \quad B_0 = \emptyset$$

oder:

$$\mu^*(\cup_{n=1}^{N} A_n) = \mu^*(B_N) = \sum_{k=1}^{N} [\mu^*(B_k) - \mu^*(B_{k-1})] = \sum_{k=1}^{N} \mu^*(A_k).$$

Der Widerspruch impliziert, daß es mindestens ein k gibt, mit dem die Ungleichung gilt:

$$\mu^*(A_k \cup B_{k-1}) + \mu^*(A_k \cap B_{k-1}) < \mu^*(A_k) + \mu^*(B_{k-1}).$$

14. *Kann ich zeigen, daß die im Satz 1.3.3 definierte Mengenfunktion κ^* ein äußeres Maß ist?*

Sei ν ein Wahrscheinlichkeitsprämaß auf $\mathcal{F}_0$ und definiere $\mathcal{G} = \{G : A_n \uparrow G, A_n \subset \mathcal{F}_0\}$. Für $\mathcal{F}_0 \ni A_n \uparrow A$ definiere $\kappa(A) = \lim_{n\to\infty} \nu(A_n)$. Für $A \in \Omega$ definiere $\kappa^*(A) = \inf\{\kappa(G) : G \in \mathcal{G}, A \subset G\}$. Dann ist κ^* nicht nur ein Maß auf $\mathcal{H} = \{H \subset \Omega : \kappa^*(H) + \kappa^*(H^c) = 1\}$ (siehe 16 unten, aber auch ein äußeres Maß auf Ω.

Daß $\kappa^*(\emptyset) = 0$ gilt, folgt aus 1.3.3.a ($\kappa^* = \kappa$ auf $\mathcal{G}$) und 1.3.2.a ($\emptyset \in \mathcal{G}$, $\kappa(\emptyset) = 0$). Daß κ^* monoton ist, folgt aus 1.3.3.c ($A, B \subset \Omega$, $A \subset B \Rightarrow \kappa^*(A) \leq \kappa^*(B)$). Die σ-Additivität von

κ^* wird wie folgt etabliert. Wenn $\cup_{n=1}^N A_n \uparrow \cup_{n=1}^\infty A_n = A$, ist κ^* in A stetig nach 1.3.3.d, und daher gilt:

$$\kappa^*(\cup_{n=1}^\infty A_n) \stackrel{1.3.3.d}{=} \lim_{N\to\infty} \kappa^*(\cup_{n=1}^N A_n) \stackrel{1.3.3.b}{\leq} \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^N \kappa^*(A_n)$$

wobei endlich Subadditivität aus 1.3.3.b folgt.

15. *Kann ich das* boot-strapping *Argument für den Monotone Klassen Satz durchführen?*

Das Gefühl eines bootstrapping Arguments ist wie das beim Bergsteigen. Der Beweis ist wenig pyramidal und mehr stufenweise. Ein Punkt wird erreicht und im nächsten Schritt verwendet. Zum Beispiel wird eine Behauptung auf einer Menge etabliert und im nächsten Schritt verwendet, um die Behauptung auf einer noch größeren Menge zu etablieren. Man sieht solche boot-strapping Argumente in Beweisen von Sätzen über messbare Funktionen, in denen eine Eigenschaft zuerst für Indikatorfunktionen etabliert wird, um die Eigenschaft für nicht negative einfache Funktionen zu zeigen, um die Eigenschaft für nicht negative Borel messbare Funktionen zu zeigen, um die Eigenschaft für allgemeine Borel messbare Funktionen zu zeigen.

Monotone Klasse Satz. Wenn eine Algebra $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{C}$ in einer monotonen Klasse $\mathcal{C} \subset \Omega$ liegt, dann gilt $\sigma(\mathcal{F}_0) \subset \mathcal{C}$. Beweis. Sei $\mathcal{M}$ die kleinste monotone Klasse die $\mathcal{F}_0$ enthält. Zu zeigen ist, daß $\mathcal{M} = \sigma(\mathcal{F}_0)$ gilt. Da die monotone Klasse $\mathcal{C}$ nicht kleiner als $\mathcal{M}$ sein kann, folgt $\sigma(\mathcal{F}_0) = \mathcal{M} \subset \mathcal{C}$.

Für fixiertes $A \in \mathcal{M}$, definiere $\mathcal{M}_A = \{B \in \mathcal{M} : A \cap B, A \cap B^c, A^c \cap B \in \mathcal{M}\}$. Zu zeigen ist, daß $\mathcal{M} = \mathcal{M}_A$, $\forall A \in \mathcal{M}$ gilt. Dann ist es leichter zu zeigen, daß $\mathcal{M}$ eine σ-Algebra ist.

Nun ist es zu zeigen, daß $\mathcal{M}_A, \forall A \in \mathcal{M}$ eine monotone Klasse ist. Seien $A \in \mathcal{M}$ und $\{B_n\} \subset \mathcal{M}_A$ eine Folge mit $B_n \uparrow B$. Auf Grund der folgenden:

$$\begin{array}{lll} \mathcal{M} & \ni & B_n \uparrow B \\ \mathcal{M} & \ni & A^c \cap B_n \uparrow A^c \cap B \end{array} \qquad \begin{array}{lll} \mathcal{M} & \ni & A \cap B_n \uparrow A \cap B \\ \mathcal{M} & \ni & A \cap B_n^c \downarrow A \cap B^c \end{array}$$

gelten $B, A \cap B, A^c \cap B, A \cap B^c \in \mathcal{M}$, da $\mathcal{M}$ eine monotone Klasse ist. Daher gilt $B \in \mathcal{M}_A$. Nun sei $\{B_n\} \subset \mathcal{M}_A$ eine Folge mit $B_n \downarrow B$. Auf Grund der folgenden:

$$\begin{array}{lll} \mathcal{M} & \ni & B_n \downarrow B \\ \mathcal{M} & \ni & A^c \cap B_n \downarrow A^c \cap B \end{array} \qquad \begin{array}{lll} \mathcal{M} & \ni & A \cap B_n \downarrow A \cap B \\ \mathcal{M} & \ni & A \cap B_n^c \uparrow A \cap B^c \end{array}$$

gelten $B, A \cap B, A^c \cap B, A \cap B^c \in \mathcal{M}$, da $\mathcal{M}$ eine monotone Klasse ist. Daher gilt $B \in \mathcal{M}_A$. Das heisst, $\mathcal{M}_A$ ist eine monotone Klasse $\forall A \in \mathcal{M}$.

Nun ist es zu zeigen, daß $\mathcal{M}_A = \mathcal{M}$, $\forall A \in \mathcal{F}_0$ gilt. Sei $A \in \mathcal{F}_0$. Sei $C \in \mathcal{F}_0$. Da $\mathcal{F}_0$ eine Algebra ist, gelten $A \cap C, A \cap C^c, A^c \cap C \in \mathcal{F}_0$. Da $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{M}$ gilt, folgt $C \in \mathcal{M}_A$. Das heisst, $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{M}_A$ gilt. Nach der Definition von $\mathcal{M}_A$ gilt $\mathcal{M}_A \subset \mathcal{M}$. Da $\mathcal{M}$ und $\mathcal{M}_A$ monotone Klassen sind (siehe letzten Absatz), die $\mathcal{F}_0$ enthalten, und $\mathcal{M}$ die kleinste solche monotone Klasse ist, gilt $\mathcal{M} \subset \mathcal{M}_A$. Aber $\mathcal{M}_A \subset \mathcal{M}$ und $\mathcal{M} \subset \mathcal{M}_A$ implizieren $\mathcal{M} = \mathcal{M}_A$.

Nun ist es zu zeigen, daß $\mathcal{M}_B = \mathcal{M}$, $\forall B \in \mathcal{M}\backslash\mathcal{F}_0$ gilt. Sei $B \in \mathcal{M}\backslash\mathcal{F}_0$. Nach der Definition von $\mathcal{M}_B$ und dem Einschluss $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{M}$ gilt:

$$\mathcal{M}_B = \{A \in \mathcal{M} : A \cap B, A \cap B^c, A^c \cap B \in \mathcal{M}\} \supset \{A \in \mathcal{F}_0 : A \cap B, A \cap B^c, A^c \cap B \in \mathcal{M}\}.$$

Es wurde oben bewiesen (siehe letzten Absatz), daß $\mathcal{M}_A = \mathcal{M}$, $\forall A \in \mathcal{F}_0$ gilt. Daher gelten $A \cap B, A \cap B^c, A^c \cap B \in \mathcal{M}$, $\forall A \in \mathcal{F}_0$, $\forall B \in \mathcal{M}$ und

$$\mathcal{M}_B \supset \{A \in \mathcal{F}_0 : A \cap B, A \cap B^c, A^c \cap B \in \mathcal{M}\} = \mathcal{F}_0.$$

Nach der Definition von $\mathcal{M}_B$ gilt $\mathcal{M}_B \subset \mathcal{M}$. Da $\mathcal{M}$ und $\mathcal{M}_B$ monotone Klassen sind (siehe vorletzten Absatz), die $\mathcal{F}_0$ enthalten, und $\mathcal{M}$ die kleinste solche monotone Klasse ist, gilt $\mathcal{M} \subset \mathcal{M}_B$. Aber $\mathcal{M}_B \subset \mathcal{M}$ und $\mathcal{M} \subset \mathcal{M}_B$ implizieren $\mathcal{M} = \mathcal{M}_B$. Daher gilt $\mathcal{M} = \mathcal{M}_A$, $\forall A \in \mathcal{M}$.

Nun ist es zu zeigen, daß $\mathcal{M}$ eine σ-Algebra ist. a. $\emptyset, \Omega \in \mathcal{F}_0 \subset \mathcal{M}$. b. Wenn $A \in \mathcal{M}$ gilt, folgt $A \in \mathcal{M}_\Omega$ und daher $A^c = A^c \cap \Omega \in \mathcal{M}$. c. Wenn $A, B \in \mathcal{M}$ gilt, impliziert (b) die folgende: $A^c, B^c \in \mathcal{M} = \mathcal{M}_{A^c}$ und daher $A^c \cap B^c \subset \mathcal{M}$. Aus (b) folgt $A \cup B = [(A \cup B)^c]^c = [A^c \cap B^c]^c \in \mathcal{M}$. Das heisst, $\mathcal{M}$ ist mindestens eine Algebra. Nun sei $\{A_n\} \subset \mathcal{M}$. Da $\mathcal{M}$ eine Algebra ist, gilt $\sum_{n=1}^N A_n \in \mathcal{M}$. Da $\mathcal{M}$ eine monotone Klasse ist, gilt $\mathcal{M} \ni \sum_{n=1}^N A_n \uparrow \sum_{n=1}^\infty A_n \in \mathcal{M}$.

Da $\sigma(\mathcal{F}_0)$ die kleinste σ-Algebra ist, die $\mathcal{F}_0$ enthält, gilt $\sigma(\mathcal{F}_0) \subset \mathcal{M}$. Die σ-Algebra $\sigma(\mathcal{F}_0)$ ist auch eine monotone Klasse, die $\mathcal{F}_0$ enthält. Da $\mathcal{M}$ die kleinste monotone Klasse ist, die $\mathcal{F}_0$ enthält, gilt $\mathcal{M} \subset \sigma(\mathcal{F}_0)$. Aber $\sigma(\mathcal{F}_0) \subset \mathcal{M}$ und $\mathcal{M} \subset \sigma(\mathcal{F}_0)$ implizieren $\mathcal{M} = \sigma(\mathcal{F}_0)$.

16. *Kann ich den Carathéodory Ausdehnung Satz für ein* endliches *Prämaß beweisen?*

Die Existenz der Ausdehnung wird wie folgt (wie im Satz 1.3.6 zusammengefasst) etabliert. Sei ν ein endliches (und so beschränktes) Prämaß auf einer Algebra $\mathcal{F}_0$ über Ω. Wenn das Resultat für das Wahrscheinlichkeitsprämaß $\tilde{\nu} = \nu/\nu(\Omega)$ etabliert wird, gilt der Satz dann für $\nu = \tilde{\nu} \cdot \nu(\Omega)$, und daher kann es angenommen werden, daß ν ein Wahrscheinlichkeitsprämaß ist. Definiere $\mathcal{G} = \{G : A_n \uparrow G, A_n \subset \mathcal{F}_0\}$. Für $\mathcal{F}_0 \ni A_n \uparrow A$ definiere $\kappa(A) = \lim_{n\to\infty} \nu(A_n)$. Nach dem Satz 1.3.2 erfüllen κ und $\mathcal{G}$ die Voraussetzungen vom Satz 1.3.3. Für $A \in \Omega$ definiere $\kappa^*(A) = \inf\{\kappa(G) : G \in \mathcal{G}, A \subset G\}$. Nach dem Satz 1.3.5 ist $\mathcal{H} = \{H \subset \Omega : \kappa^*(H) + \kappa^*(H^c) = 1\}$ eine σ-Algebra, und κ^* ist ein Maß auf $\mathcal{H}$. Da $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{G} \subset \mathcal{H}$ gilt, ist κ^* ein Maß auf $\sigma(\mathcal{F}_0) \subset \mathcal{H}$.

Für Eindeutigkeit nimm an, daß λ eine andere Ausdehnung auf $\mathcal{F} = \sigma(\mathcal{F}_0)$ ist, wobei $\lambda = \mu$ auf $\mathcal{F}_0$ gilt. Dann ist λ auch endlich, da $\lambda(A) \le \lambda(\Omega) = \mu(\Omega)$ für $A \in \mathcal{F}$ gilt, wobei der Einschluss $\Omega \in \mathcal{F}_0$ verwendet wird. Sei $\mathcal{C} = \{A \in \mathcal{F} : \lambda(A) = \mu(A)\}$. Für $\{C_n\} \subset \mathcal{C}$, $C_n \uparrow C$, gelten $\lambda(C_n) \to \lambda(C)$ und $\mu(C_n) \to \mu(C)$ nach dem Satz 1.2.7.a. Dann gilt $C \in \mathcal{C}$. Für $\{C_n\} \subset \mathcal{C}$, $C_n \downarrow C$, gelten $\lambda(C_n) \to \lambda(C)$ und $\mu(C_n) \to \mu(C)$ nach dem Satz 1.2.7.b, da λ und μ endlich sind. Dann gilt $C \in \mathcal{C}$. Daher ist $\mathcal{C}$ eine montone Klasse. Da $\lambda = \mu$ auf $\mathcal{F}_0$ gilt, gilt $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{C}$. Nach dem Satz 1.3.9 gilt $\sigma(\mathcal{F}_0) \subset \mathcal{C}$. Nach der Definition von $\mathcal{C}$ gilt $\mathcal{C} \subset \mathcal{F} = \sigma(\mathcal{F}_0)$, und daher gilt $\mathcal{C} = \sigma(\mathcal{F}_0)$. Das heisst, $\lambda = \mu$ gilt auf $\mathcal{F} = \sigma(\mathcal{F}_0)$.

17. *Kann ich den Approximation Satz 1.3.11 für ein* endliches *Maß beweisen?*

Sei $B \in \mathcal{F} = \sigma(\mathcal{F}_0)$. Nimm an, daß es ein $G_\varepsilon \in \mathcal{G} = \{G : A_n \uparrow G, A_n \subset \mathcal{F}_0\}$ gibt, wobei $\mu(B \cap G_\varepsilon^c) + \mu(B^c \cap G_\varepsilon) = \mu(B \Delta G_\varepsilon) < \varepsilon$ gilt. Wenn $\mathcal{F}_0 \ni A_n \uparrow G_\varepsilon$ gilt, folgt $B^c \cap A_n \uparrow B^c \cap G$ und $\mu(B^c \cap A_n) \to \mu(B^c \cap G)$ nach 1.2.7.a, sowie $B \cap A_n^c \downarrow B \cap G^c$ und $\mu(B \cap A_n^c) \to \mu(B \cap G^c)$ nach 1.2.7.b. Daher gibt es ein $N(\varepsilon)$, so daß $\mu(B \Delta A_{N(\varepsilon)}) < \varepsilon$ gilt.

Nun wird ein $G_\varepsilon \in \mathcal{G} = \{G : A_n \uparrow G, A_n \subset \mathcal{F}_0\}$ gesucht, wobei $\mu(B \Delta G_\varepsilon) < \varepsilon$ gilt. Definiere $\kappa^*(A) = \inf\{\mu(G) : G \in \mathcal{G}, A \subset G\}$ für $A \subset \Omega$. Die Eindeutigkeit der Ausdehnung des endlichen Maßes μ von $\mathcal{F}_0$ zu $\sigma(\mathcal{F}_0)$ impliziert, daß $\mu = \kappa^*$ auf $\sigma(\mathcal{F}_0)$ gilt. Daher für $B \in \sigma(\mathcal{F}_0)$ gibt es ein $G_\varepsilon \in \mathcal{G}$, $B \subset G_\varepsilon$, so daß $0 < \mu(G_\varepsilon) - \mu(B) = \mu(G_\varepsilon) - \kappa^*(B) < \varepsilon$ gilt. Nach dem Satz 1.2.5.c (μ ist auch ein Inhalt auf einer Algebra) gilt $\mu(G_\varepsilon \cap B^c) + \mu(G_\varepsilon \cap B) = \mu(G_\varepsilon - B) + \mu(B) = \mu(G_\varepsilon)$ oder $\mu(B \Delta G_\varepsilon) = \mu(G_\varepsilon - B) = \mu(G_\varepsilon) - \mu(B) < \varepsilon$.

18. *Habe ich ein Verfahren, das ich durchführen kann, mit dem eine Eigenschaft für ein endliches Maß auch für ein σ-endliches Maß etabliert werden kann?*

Das allemeine Verfahren ist, Maßen $\mu_n(A) = \mu(A \cap A_n)$ auf $\mathcal{F}$ zu definieren, wobei $\cup_{n=1}^\infty A_n = \Omega$, $A_n \cap A_m = \emptyset$ und $\mu(A_n) < \infty$ gelten. Dann ist μ_n endlich, da $\mu_n(A) \le \mu(A_n) < 0$, $\forall A \in \mathcal{F}$ gilt. Dann muss man die gewünschte Eigenschaft für $\mu = \sum_{n=1}^\infty \mu_n$ etablieren.

Zum Beispiel betrachte den Carathéodory Ausdehnungssatz für die Ausdehnung eines σ-endliches Prämaßes ν. Definiere $\nu_n(A) = \nu(A \cap A_n)$, wobei $\{A_n\} \subset \mathcal{F}_0$ (wichtig!), $\cup_{n=1}^\infty A_n = \Omega$, $A_n \cap A_m = \emptyset$ und $\nu(A_n) < \infty$ gelten. Dann ist ν_n endlich auf $\mathcal{F}_0$, da $\nu_n(A) \le \nu(A_n) < \infty$, $\forall A \in \mathcal{F}_0$ gilt. Nach 16 oben, gibt es für ν_n eine eindeutige Ausdehnung μ_n auf $\sigma(\mathcal{F}_0)$. Dann ist $\mu = \sum_{n=1}^\infty \mu_n$ eine Ausdehnung auf $\sigma(\mathcal{F}_0)$ von ν auf $\mathcal{F}_0$, da $\mu = \nu$ auf $\mathcal{F}_0$ gilt. Zu zeigen ist, daß

μ ein Maß ist, d.h. daß μ σ-additiv ist. Sei $\{B_n\} \subset \sigma(\mathcal{F}_0)$, $B_n \cap B_m = \emptyset$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\mu(\cup_{m=1}^{\infty} B_m) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n(\cup_{m=1}^{\infty} B_m) &\overset{\mu_n\ \sigma\text{-add}}{=} \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \mu_n(B_m) \\
&\overset{\mu_n \geq 0}{=} \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n(B_m) = \sum_{m=1}^{\infty} \mu(B_m).
\end{aligned}$$

Nimm an, daß λ eine andere Ausdehnung auf $\sigma(\mathcal{F}_0)$ von ν auf $\mathcal{F}_0$ ist. Dann ist $\lambda_n(A) = \lambda(A \cap A_n)$ eine endliche Ausdehnung auf $\sigma(\mathcal{F}_0)$ von ν_n auf $\mathcal{F}_0$. Aber μ_n ist die eindeutige endliche Ausdehnung auf $\sigma(\mathcal{F}_0)$ von ν_n auf $\mathcal{F}_0$, und $\lambda = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n = \mu$. Das heisst, μ ist die eindeutige Ausdehnung auf $\sigma(\mathcal{F}_0)$ von ν auf $\mathcal{F}_0$.

Schliesslich betrachte den Approximationssatz für Approximationen mit einem σ-endlichen Maß μ. Definiere $\mu_n(A) = \mu(A \cap A_n)$ wobei $\{A_n\} \subset \mathcal{F}_0$ (wichtig!), $\cup_{n=1}^{\infty} A_n = \Omega$, $A_n \cap A_m = \emptyset$ und $\mu(A_n) < \infty$ gelten. Dann ist μ_n endlich auf $\mathcal{F} = \sigma(\mathcal{F}_0)$, da $\mu_n(A) \leq \mu(A_n) < \infty$, $\forall A \in \mathcal{F}$ gilt. Nach 17 oben, gibt es ein $\tilde{B}_n \in \mathcal{F}_0$ so daß $\mu_n(A\Delta\tilde{B}_n) < \varepsilon 2^{-n}$. Nach der Definition von μ_n gilt:

$$\mu_n(A\Delta\tilde{B}_n) = \mu((A\Delta\tilde{B}_n) \cap A_n)$$

Nach der Rechnung,

$$\begin{aligned}
[A\Delta(\tilde{B}_n \cap A_n)] \cap A_n &= [A \cap (\tilde{B}_n \cap A_n)^{\mathrm{c}}] \cup [A^{\mathrm{c}} \cap (\tilde{B}_n \cap A_n)]\} \cap A_n \\
&= \{[A \cap (\tilde{B}_n^{\mathrm{c}} \cup A_n^{\mathrm{c}})] \cap A_n\} \cup \{[A^{\mathrm{c}} \cap (\tilde{B}_n \cap A_n)] \cap A_n\} \\
&= \{[(A \cap \tilde{B}_n^{\mathrm{c}}) \cup (A \cap A_n^{\mathrm{c}})] \cap A_n\} \cup \{A^{\mathrm{c}} \cap \tilde{B}_n \cap A_n\} \\
&= \{(A \cap \tilde{B}_n^{\mathrm{c}}) \cap A_n\} \cup \{(A \cap A_n^{\mathrm{c}}) \cap A_n\} \cup \{A^{\mathrm{c}} \cap \tilde{B}_n \cap A_n\} \\
&= \{A \cap \tilde{B}_n^{\mathrm{c}} \cap A_n\} \cup \emptyset \cup \{A^{\mathrm{c}} \cap \tilde{B}_n \cap A_n\} \\
&= \{[A \cap \tilde{B}_n^{\mathrm{c}}] \cup [A^{\mathrm{c}} \cap \tilde{B}_n]\} \cap A_n \\
&= (A\Delta\tilde{B}_n) \cap A_n
\end{aligned}$$

gilt:

$$\mu((A\Delta\tilde{B}_n) \cap A_n) = \mu((A\Delta(\tilde{B}_n \cap A_n)) \cap A_n).$$

Nach der Definition von μ_n gilt:

$$\mu((A\Delta(\tilde{B}_n \cap A_n)) \cap A_n) = \mu_n(A\Delta(\tilde{B}_n \cap A_n)).$$

Aus den letzten Gleichungen folgt $\mu_n(A\Delta\tilde{B}_n) = \mu_n(A\Delta(\tilde{B}_n \cap A_n))$. Nun definiere $B_n = \tilde{B}_n \cap A_n \in \mathcal{F}_0$ so daß $\mu_n(A\Delta B_n) = \mu_n(A\Delta(\tilde{B}_n \cap A_n)) = \mu_n(A\Delta\tilde{B}_n) < \varepsilon 2^{-n}$ gilt. Da $B_n = \tilde{B}_n \cap A_n \subset A_n$ gilt, folgt $B_n \cap B_m = \emptyset$ aus $A_n \cap A_m = \emptyset$. Definiere $C_N = \cup_{n=1}^{N} B_n$ und $C = \cup_{n=1}^{\infty} B_n$ und bemerke, daß $C \cap A_n = B_n$ gilt. Ebenso ähnliche Gleichungen oben bewiesen wurden, folgt es jetzt:

$$\mu_n(A\Delta C) = \mu((A\Delta C) \cap A_n) = \mu((A\Delta(C \cap A_n)) \cap A_n) = \mu((A\Delta B_n) \cap A_n) = \mu_n(A\Delta B_n) < \varepsilon 2^{-n}$$

oder

$$\mu(A\Delta C) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n(A\Delta C) < \varepsilon.$$

Nach Additivität folgt:

$$\mu(A\Delta C_N) = \mu((A - C_N) \cup (C_N - A)) = \mu(A - C_N) + \mu(C_N - A)$$

aus $(A \cap C_N^c) \cap (A^c \cap C_N) = \emptyset$ und

$$\mu(A\Delta C) = \mu((A - C) \cup (C - A)) = \mu(A - C) + \mu(C - A)$$

aus $(A \cap C^c) \cap (A^c \cap C) = \emptyset$. Bemerke, daß $(C_N - A) \uparrow (C - A)$ und $(A - C_N) \downarrow (A - C)$ gelten. Wenn $\mu(A) < \infty$ gilt, folgt $\mu(A - C) \leq \mu(A) < \infty$. Nach dem Satz 1.2.7 gelten

$$\mu(C_N - A) \to \mu(C - A) \qquad \text{und} \qquad \mu(A - C_N) \to \mu(A - C),$$

und daher folgt

$$\mu(A\Delta C_N) = \mu(C_N - A) + \mu(A - C_N) \to \mu(C - A) + \mu(A - C) = \mu(A\Delta C) < \varepsilon.$$

Nimm $N = N(\varepsilon)$ gross genug, so daß $\mu(A\Delta C_{N(\varepsilon)}) < \varepsilon$ gilt.

19. *Habe ich ein Beispiel eines nicht vollständigen Maßraumes, und kann ich zeigen, daß er nicht vollständig ist?*

    $(\boldsymbol{R}, \mathcal{B}(\boldsymbol{R}))$ kann nicht vollständig sein, da $|\mathcal{B}(\boldsymbol{R})| = c$ und $|\bar{\mathcal{B}}(\boldsymbol{R})| = 2^c$ gelten; siehe unten.

    Explizitere Details: Sei $A \subset [0, 1]$ eine nicht Lebesgue messbare Menge; siehe unten. Obwohl $A \in \bar{\mathcal{B}}(\boldsymbol{R})$ nicht gilt, gilt $A \in \bar{\mathcal{B}}(\boldsymbol{R}^2)$, da A null Maß in $\boldsymbol{R}^2$ hat. Nach dem Brave-Mengen-Prinzip gilt $\sigma_A(C \cap A) = \sigma_\Omega(C) \cap A$. Insbesondere gilt $\sigma_{\boldsymbol{R}}(\mathcal{F}_0(\boldsymbol{R}^2) \cap \boldsymbol{R}) = \sigma_{\boldsymbol{R}^2}(\mathcal{F}_0(\boldsymbol{R}^2)) \cap \boldsymbol{R}$ oder $\mathcal{B}(\boldsymbol{R}) = \mathcal{B}(\boldsymbol{R}^2) \cap \boldsymbol{R}$. Falls $A \in \mathcal{B}(\boldsymbol{R}^2)$ gilt, dann gilt $A \in \mathcal{B}(\boldsymbol{R}^2) \cap \boldsymbol{R} = \mathcal{B}(\boldsymbol{R})$. Aber $A \notin \bar{\mathcal{B}}(\boldsymbol{R}) \Rightarrow A \notin \mathcal{B}(\boldsymbol{R})$. Daher gilt $A \in \bar{\mathcal{B}}(\boldsymbol{R}^2) \backslash \mathcal{B}(\boldsymbol{R}^2)$.

20. *Für eine gegebene beschränkte Verteilungsfunktion $F : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ kann ich zeigen, daß der durch $\nu(a, b] = F(b) - F(a)$ (und die natürliche Formel für disjunkte Intervalle) Inhalt ν ein Prämaß auf $\mathcal{F}_0(\boldsymbol{R})$ ist?*

    Es wird zuerst gezeigt, daß ν ein Prämaß auf $\mathcal{F}_0(\bar{\boldsymbol{R}})$ ist. Nach dem Satz 1.2.8.b folgt die gewünschte σ-Additivität auf $\mathcal{F}_0(\bar{\boldsymbol{R}})$, wenn für jede Folge $\mathcal{F}_0(\bar{\boldsymbol{R}}) \ni A_n \downarrow \emptyset$ die Konvergenz $\nu(A_n) \to 0$ gilt.

    Sei $\{A_n\} \subset \mathcal{F}_0(\bar{\boldsymbol{R}})$ eine Folge mit $A_n \downarrow \emptyset$. Dann für beliebes n folgt die Darstellung $A_n = \cup_{k=1}^N (a_k, b_k]$, wobei $\{a_k, b_k\} \subset \bar{\boldsymbol{R}}$ und $(a_k, b_k] \cap (a_l, b_l] = \emptyset$ gelten. Fixiere $A = (a, b]$ von den disjunkten Intervallen $\{(a_n, b_n]\}$. Dann kann $B = (a', b]$, $a' \in (a, b)$, gewählt werden, so daß $a' \downarrow a$ und $B \subset \bar{B} \subset A$ gelten. Nach der rechtseitig Stetigkeit von F gilt $\nu(B) = F(b) - F(a') \to F(b) - F(a) = \nu(A)$. Nach dem Satz 1.2.5.c gilt $\nu(A - B) = \nu(A) - \nu(B) \to 0$, da ν beschränkt ist. In dieser Weise, können Mengen $\{B_n\} \subset \mathcal{F}_0(\bar{\boldsymbol{R}})$ gewählt werden, so daß für $\varepsilon > 0$, $\bar{B}_n \subset A_n$ und $\nu(A_n - B_n) = \nu(A_n) - \nu(B_n) < \varepsilon 2^{-n}$ gelten. Dann folgt $\cap_{n=1}^\infty B_n \subset \cap_{n=1}^\infty \bar{B}_n \subset \cap_{n=1}^\infty A_n = \emptyset$ oder $\cup_{n=1}^\infty \bar{B}_n^c = \cup_{n=1}^\infty [\bar{\boldsymbol{R}} - \bar{B}_n] = \bar{\boldsymbol{R}}$. Da $\{\bar{B}_n^c\}_{n=1}^\infty$ eine offene Überdeckung vom kompakten Raum $\bar{\boldsymbol{R}}$ ist, gibt es ein endliche Überdeckung $\cup_{n=1}^N \bar{B}_n^c = \bar{\boldsymbol{R}}$. Es folgt $\cap_{n=1}^N B_n \subset \cap_{n=1}^N \bar{B}_n = [\cup_{n=1}^N \bar{B}_n^c]^c = \emptyset$. Bemerke, daß $A_N \subset A_{N-1} \subset \cdots$ oder $A_N - B_n \subset A_n - B_n \subset \cdots$, $n \leq N$, und $\cap_{n=1}^N B_n (= \emptyset) \subset A_N$ gelten. Daher gilt die folgende nach dem Satz 1.2.5.c:

$$\begin{aligned} \nu(A_N) &= \nu(A_N - \cap_{n=1}^N B_n) + \underbrace{\nu(\cap_{n=1}^N B_n)}_{=0} = \nu(\cap_{n=1}^N [A_N - B_n]) \\ &\leq \nu(\cap_{n=1}^N [A_n - B_n]) \\ &\leq \varepsilon \sum_{n=1}^N 2^{-n} \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Das heisst, $\nu(A_n) \to 0$, und die σ-Additivität von ν auf $\mathcal{F}_0(\bar{\boldsymbol{R}})$ folgt.

Es bleibt noch zu zeigen, daß ν σ-additiv auf $\mathcal{F}_0(\boldsymbol{R})$ ist. Wir erinnern uns daran, daß $\mathcal{F}_0(\boldsymbol{R})$ endliche (sogar leere) disjunkte Vereinigungen aus $\{(a,b],(a,\infty) : -\infty \le a < b < \infty\}$ ist, und daß $\mathcal{F}_0(\bar{\boldsymbol{R}})$ endliche (sogar leere) disjunkte Vereinigungen aus $\{(a,b], -\infty \le a < b \le \infty, [-\infty,b], -\infty \le b \le \infty\}$ ist. Sei $\{A_n\} \subset \mathcal{F}_0(\boldsymbol{R})$ eine Folge mit $A_n \downarrow \emptyset$. Dann für beliebes n folgt die Darstellung $A_n = \tilde{A}_n \cup (a_n,\infty)$, wobei $\tilde{A}_n \in \mathcal{F}_0(\bar{\boldsymbol{R}})(\cap \mathcal{F}_0(\boldsymbol{R}))$, $\tilde{A}_n \downarrow \emptyset$ und $(a_n,\infty) \downarrow \emptyset$ gelten. Aus dem obigen Argument folgt $\nu(\tilde{A}_n) \to 0$. Da $a_n \to \infty$ gilt, folgt $\nu(a_n,\infty) = F(\infty) - F(a_n) \to 0$ nach der Definition, $F(\infty) = \lim_{x\to\infty} F(x)$. Nach dem Satz 1.2.5.c folgt $\nu(A_n) = \nu(\tilde{A}_n) + \nu(a_n,\infty) \to 0$.

21. *Kann ich zeigen, daß μ_ε und μ_0 (vom letzten Zusammenfassungsblatt) Maßen auf $(\boldsymbol{R},\mathcal{B}(\boldsymbol{R}))$ sind?*

    Für jedes $\varepsilon \ge 0$ definiere $F_\varepsilon(x) = \mu_\varepsilon(-\infty,x]$. Für $\varepsilon > 0$ ist F_ε nicht nur stetig aber auch differenzierbar mit $F'_\varepsilon(x) = \psi_\varepsilon(x)$. Für $\varepsilon = 0$ erfüllt F_0 die Gleichungen $F_0(x) = 0,\ x < 0$ und $F_0(x) = 1,\ x \ge 0$, und daher ist F_0 rechtseitig stetig überall. Für jedes $\varepsilon \ge 0$ ist F_ε klar wachsend und daher ist jedes F_ε eine Verteilungsfunktion. Nach dem Satz 1.4.4 gibt es eine eindeutige Ausdehnung von μ_ε auf $\mathcal{F}_0(\boldsymbol{R})$ zu einem Lebesgue-Stieltjesschen Maß auf $\mathcal{B}(\boldsymbol{R})$.

    Weitere Details: Sei $\varepsilon \ge 0$. Die Mengenfunktion μ_ε und die Verteilungsfunktion F_ε sind beschränkt. Nach dem letzten Beispiel ist μ_ε ein Prämaß auf $\mathcal{F}_0(\boldsymbol{R})$. Da $\mu_\varepsilon(-n,n] < \infty$ gilt, ist das Prämaß μ_ε σ-endlich. Nach dem Carathéodory Satz 1.3.10 gibt es eine eindeutige Ausdehnung von μ_ε auf $\mathcal{F}_0(\boldsymbol{R})$ zu einem Maß auf $\mathcal{B}(\boldsymbol{R})$. Das Maß ist Lebesgue-Stieltjes, da $\mu_\varepsilon(I) < \infty$ für jedes beschränktes Intervall gilt.

22. *Kann ich Lebesguesche Maß auf $\boldsymbol{R}$ und $\boldsymbol{R}^n$ definieren?*

    Definiere die Verteilungsfunktion $F(a,b] = \prod_{k=1}^n (b_k - a_k)$, $n \ge 1$. Nach den Sätzen 1.4.4 und 1.4.9 gibt es eine eindeutige Ausdehnung von $\mu(a,b] = F(a,b]$ zu einem Lebesgue-Stieltjesschen Maß auf $\mathcal{B}(\boldsymbol{R}^n)$, $n \ge 1$. Das sogenannte Lebesguesche Maß ist μ auf $\mathcal{B}(\boldsymbol{R}^n)$ sowohl die Vervollständigung auf $\bar{\mathcal{B}}(\boldsymbol{R}^n)$.

23. *Habe ich ein Beispiel einer nicht Lebesgue messbaren Menge, und kann ich zeigen, daß sie nicht messbar ist?*

    Schreibe $x \sim y$ wenn $x - y \in \boldsymbol{Q}$ gilt und definiere $B_x = \{y : y - x \in \boldsymbol{Q}\}$. Konstruiere A indem aus jedem B_x ein Vertreter zwischen $[0,1]$ gewählt wird. Also gilt $A \subset [0,1]$. Zu zeigen sind: (a) $\boldsymbol{R} = \cup\{r + A : r \in \boldsymbol{Q}\}$, (b) $(r+A) \cap (s+A) = \emptyset$ für $r \ne s$, $r,s \in \boldsymbol{Q}$, (c) A ist nicht Lebesgue messbar.

    (a) $x \in \boldsymbol{R} \Rightarrow x \in B_x$. Sei z der Vertreter von B_x aus A. Also gilt $z \in B_x \cap A$. $x,z \in B_x \Rightarrow x - z = r \in \boldsymbol{Q} \Rightarrow x = r + z \in r + A$, $r \in \boldsymbol{Q}$, oder $\boldsymbol{R} \subset \cup\{r + A : r \in \boldsymbol{Q}\}$. Es ist klar, daß $\cup\{r + A : r \in \boldsymbol{Q}\} \subset \boldsymbol{R}$ gilt. Also folgt $\boldsymbol{R} = \cup\{r + A : r \in \boldsymbol{Q}\}$.

    (b) Wähle $r,s \in \boldsymbol{Q}$, $r \ne s$ und $a_1,a_2 \in A$ mit $r + a_1 = s + a_2$. Dann gilt $a_1 - a_2 = s - r \in \boldsymbol{Q}$ oder $a_1 \sim a_2$. Da es nur einen Vertreter aus B_{a_1} in A gibt, folgt $a_1 = a_2$ oder $r = s$, ein Widerspruch.

    (c) Wenn $0 \le r \le 1$ gilt, folgt $r + A \subset [0,2]$. Daher mit $\Lambda = \boldsymbol{Q} \cap [0,1]$ gilt

    $$\sum_{r\in\Lambda} \mu(A) = \sum_{r\in\Lambda} \mu(r + A) = \mu\left(\cup\{r + A : r \in \Lambda\}\right) \le \mu[0,2] < \infty$$

    wobei die Translationinvarianz und dann die Disjunktheit der Mengen $\{r + A : r \in \boldsymbol{Q}\}$ verwendet wurden. Es folgt $\mu(A) = 0$. Wegen der Darstellung $\boldsymbol{R} = \cup\{r + A : r \in \boldsymbol{Q}\}$ folgt

    $$\mu(\boldsymbol{R}) = \mu\left(\cup\{r + A : r \in \boldsymbol{Q}\}\right) = \sum_{r\in\boldsymbol{Q}} \mu(r + A) = \sum_{r\in\boldsymbol{Q}} \mu(A) = 0$$

    ein Widerspruch. Daher kann A nicht Lebesgue messbar sein.

24. *Kann ich in ein paar Zeilen erklären, warum $|\mathcal{B}(\boldsymbol{R})| = c = |\boldsymbol{R}|$ und $|\bar{\mathcal{B}}(\boldsymbol{R})| = 2^c$ gelten?*

Definiere $a = |\boldsymbol{N}|$ und $c = |\boldsymbol{R}|$. Sei E_0 die Sammlung von offenen Intervallen, so daß $\sigma(E_0) = \mathcal{B}(\boldsymbol{R})$ gilt. Von der Darstellung $E_0 = \cup_{a,b\in\bar{\boldsymbol{R}}}(a,b)$ gilt $|E_0| = |\boldsymbol{R}^2| = c^2 = c$. Definiere $E_1 = \{\cup_{n=1}^{\infty} A_n : A_n \in E_0 \text{ oder } A_n^{\mathrm{c}} \in E_0\}$. Es gilt $E_1 \simeq E_0^a = \{\{A_n\}_{n\in\boldsymbol{N}} : A_n \in E_0 \text{ oder } A_n^{\mathrm{c}} \in E_0\}$, und daher gilt $|E_1| = |E_0^a| = c^a = c$. Es gilt auch offensichtlich $E_0, E_1 \subset \mathcal{B}(\boldsymbol{R})$.

Für $1 \le \beta < \alpha < c$ nimm induktiv an, daß $E_\beta \in \mathcal{B}(\boldsymbol{R})$ und $|E_\beta| = c$ gelten, und definiere $E_\alpha = \{\cup_{n=1}^{\infty} A_n : A_n \in E_\beta \text{ oder } A_n^{\mathrm{c}} \in E_\beta, 1 \le \beta < \alpha\}$ und $E_{<\alpha} = \cup\{E_\beta : 1 \le \beta < \alpha\}$. Es gilt $c = |E_1| \le |E_{<\alpha}| \le \alpha |E_\beta|_{\beta\in[1,\alpha)} = \alpha c \le c$. Es gilt auch $E_\alpha \simeq E_{<\alpha}^a = \{\{A_n\}_{n\in\boldsymbol{N}} : A_n \in E_\beta \text{ oder } A_n^{\mathrm{c}} \in E_\beta, 1 \le \beta < \alpha\}$, und daher gilt $|E_\alpha| = |E_{<\alpha}^a| = c^a = c$. Wenn $A \in E_\alpha$ gilt, hat A die Darstellung $A = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$ wobei für $1 \le \beta < \alpha$, $A_n \in E_\beta \subset \mathcal{B}(\boldsymbol{R})$ oder $A_n^{\mathrm{c}} \in E_\beta \subset \mathcal{B}(\boldsymbol{R})$ gelten, und daher gilt $A \in \mathcal{B}(\boldsymbol{R})$ und $E_\alpha \subset \mathcal{B}(\boldsymbol{R})$.

Es folgt aus der transfiniten Induktion, daß $|E_\alpha| = c$ und $E_\alpha \subset \mathcal{B}(\boldsymbol{R})$ gelten für $1 \le \alpha < c$. Schließlich definiere $E = E_{<c} = \cup\{E_\alpha : 1 \le \alpha < c\}$. Dann folgt $c = |E_1| \le |E| \le c|E_\alpha|_{\alpha\in[1,c)} \le c \cdot c = c$. Wenn $A \in E$ gilt, hat A die Darstellung $A = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$ wobei für $1 \le \alpha < c$, $A_n \in E_\alpha \subset \mathcal{B}(\boldsymbol{R})$ oder $A_n^{\mathrm{c}} \in E_\alpha \subset \mathcal{B}(\boldsymbol{R})$ gelten, und daher gilt $A \in \mathcal{B}(\boldsymbol{R})$ und $E \subset \mathcal{B}(\boldsymbol{R})$.

Wenn E eine σ-Algebra ist, gilt $\mathcal{B}(\boldsymbol{R}) \subset E$ und daher $E = \mathcal{B}(\boldsymbol{R})$. (a) $\boldsymbol{R} \subset E_1 \subset E$. (b) $A \in E \Rightarrow \exists \alpha < c$ so daß $A \in E_\alpha$. Dann gilt $A^{\mathrm{c}} \in E_{\alpha+1} \subset E$. (c) $\{A_n\} \subset E \Rightarrow \exists\{\alpha_n\}$, $\alpha_n < c$, so daß $A_n \subset E_{\alpha_n}$. Es gilt $\forall n$, $|\alpha_n| \le |\{\alpha_n\}| < c^a = c$. Wenn $\alpha = |\{\alpha_n\}|$ definiert wird, folgt $\cup_{n=1}^{\infty} A_n \in E_{\alpha+1} \subset E$. Daher ist E eine σ-Algebra und es folgt $E = \mathcal{B}(\boldsymbol{R})$.

Die Cantorsche Menge C erfüllt $C \in \mathcal{B}(\boldsymbol{R})$, da sie durch abzählbare Operationen gebildet wird. Da $\mu(C) = 0$ gilt, folgt $\mathcal{P}(C) \subset \bar{\mathcal{B}}(\boldsymbol{R})$. Trotz der null Maß gilt $|C| = c$, und daher folgt $2^c = |\mathcal{P}(C)| \le |\bar{\mathcal{B}}(\boldsymbol{R})| \le |\mathcal{P}(\boldsymbol{R})| \le 2^c$.

25. *Habe ich ein Beispiel einer messbaren Funktion $h : (\Omega_1, \mathcal{F}_1) \to (\Omega_2, \mathcal{F}_2)$, mit der $h(\mathcal{F}_1) \subset \mathcal{F}_2$ nicht gilt?*

Definiere $h(x) = x$, so daß $h^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ und $h^{-1}(\boldsymbol{R}) = \boldsymbol{R}$ gelten. Also ist $h : (\boldsymbol{R}, \mathcal{F}_1) \to (\boldsymbol{R}, \mathcal{F}_2)$ messbar mit $\mathcal{F}_1 = \mathcal{P}(\boldsymbol{R})$ und $\mathcal{F}_2 = \{\emptyset, \boldsymbol{R}\}$. Nun wähle $A = [0,1] \in \mathcal{P}(\boldsymbol{R})$ so daß $h(A) = A \notin \{\emptyset, \boldsymbol{R}\} = \mathcal{F}_2$. Also gilt $h(\mathcal{F}_1) \not\subset \mathcal{F}_2$.

26. *Kann ich (mit dem Brave-Mengen-Prinzip) zeigen, daß eine stetige Funktion $h : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ Borel messbar ist?*

Sei $h : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ eine stetige Funktion. Wenn $\mathcal{C}$ die Sammlung von offenen Mengen in $\boldsymbol{R}$ ist, sind die Mengen $h^{-1}(\mathcal{C})$ offen, d.h. $h^{-1}(\mathcal{C}) \subset \mathcal{B}(\boldsymbol{R})$ gilt. Obwohl $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{B}(\boldsymbol{R})$ gilt, bleibt es noch zu zeigen, daß $h^{-1}(\mathcal{B}(\boldsymbol{R})) \subset \mathcal{B}(\boldsymbol{R})$ gilt. Aus $h^{-1}(\mathcal{C}) \subset \mathcal{B}(\boldsymbol{R})$ folgt die Inklusion $\sigma(h^{-1}(\mathcal{C})) \subset \mathcal{B}(\boldsymbol{R})$. Nimm an, daß $\sigma(h^{-1}(\mathcal{C})) = h^{-1}(\sigma(\mathcal{C}))$ etabliert worden ist. Dann gilt $h^{-1}(\mathcal{B}(\boldsymbol{R})) = h^{-1}(\sigma(\mathcal{C})) = \sigma(h^{-1}(\mathcal{C})) \subset \mathcal{B}(\boldsymbol{R})$.

Es bleibt noch zu zeigen, daß $\sigma(f^{-1}(\mathcal{C})) = f^{-1}(\sigma(\mathcal{C}))$ gilt, wenn $f : \Omega \to \Omega'$ und $\mathcal{C}$ eine Klasse von Teilmengen aus Ω' ist.

Da $\mathcal{C} \subset \sigma(\mathcal{C})$ gilt, folgt $f^{-1}(\mathcal{C}) \subset f^{-1}(\sigma(\mathcal{C}))$. Wenn $f^{-1}(\sigma(\mathcal{C}))$ eine σ-Algebra ist, folgt $\sigma(f^{-1}(\mathcal{C})) \subset f^{-1}(\sigma(\mathcal{C}))$. (a) $f(\Omega) = \Omega' \in \sigma(\mathcal{C}) \Rightarrow \Omega \in f^{-1}(\Omega') \in f^{-1}(\sigma(\mathcal{C}))$. (b) $A \in f^{-1}(\sigma(\mathcal{C})) \Rightarrow \exists B \in \sigma(\mathcal{C})$ mit $A = f^{-1}(B)$. Da $B^{\mathrm{c}} \in \sigma(\mathcal{C})$ gilt, folgt $A^{\mathrm{c}} = \{x \in \Omega : f(x) \notin B\} = f^{-1}(B^{\mathrm{c}}) \in f^{-1}(\sigma(\mathcal{C}))$. (c) $\{A_n\} \subset f^{-1}(\sigma(\mathcal{C})) \Rightarrow \exists\{B_n\} \subset \sigma(\mathcal{C})$ mit $A_n = f^{-1}(B_n)$. Da $\cup_n B_n \in \sigma(\mathcal{C})$ gilt, folgt $\cup_n A_n = \{x \in \Omega : f(x) \in \cup_n B_n\} = \cup_n\{x \in \Omega : f(x) \in B_n\} = \cup f^{-1}(B_n) \in f^{-1}(\sigma(\mathcal{C}))$. Daher folgt $\sigma(f^{-1}(\mathcal{C})) \subset f^{-1}(\sigma(\mathcal{C}))$.

Das Brave-Mengen-Prinzip wird verwendet, um zu zeigen, daß $f^{-1}(\sigma(\mathcal{C})) \subset \sigma(f^{-1}(\mathcal{C}))$ gilt: (0) $\mathcal{S} = \{B \in \sigma(\mathcal{C}) : f^{-1}(B) \in \sigma(f^{-1}(\mathcal{C}))\}$, (1) $\mathcal{C} \subset \mathcal{S}$ (offensichtlich), (2) $\mathcal{S}$ ist eine σ-Algebra, und (3) $\sigma(\mathcal{C}) \subset \sigma(\mathcal{S}) = \mathcal{S}$ (folgt sofort). Es bleibt noch zu zeigen, daß $\mathcal{S}$ eine σ-Algebra ist. (a) $f^{-1}(\Omega') = \Omega \in \sigma(f^{-1}(\mathcal{C})) \Rightarrow \Omega' \in \mathcal{S}$. (b) $B \in \mathcal{S} \Rightarrow A = f^{-1}(B) \in \sigma(f^{-1}(\mathcal{C}))$. Da $A^{\mathrm{c}} \in \sigma(f^{-1}(\mathcal{C}))$ gilt, folgt $f^{-1}(B^{\mathrm{c}}) = \{x \in \Omega : f(x) \notin B\} = A^{\mathrm{c}} \in \sigma(f^{-1}(\mathcal{C}))$ oder $B^{\mathrm{c}} \in \mathcal{S}$. (c)

$\{B_n\} \in \mathcal{S} \Rightarrow \{A_n\} = \{f^{-1}(B_n)\} \in \sigma(f^{-1}(\mathcal{C}))$. Da $\cup_n A_n \in \sigma(f^{-1}(\mathcal{C}))$ gilt, folgt $f^{-1}(\cup_n B_n) = \{x \in \Omega : f(x) \in \cup_n B_n\} = \cup_n \{x \in \Omega : f(x) \in B_n\} = \cup_n A_n \in \sigma(f^{-1}(\mathcal{C}))$ oder $\cup_n B_n \in \mathcal{S}$.

27. *Kann ich zwei einfache Funktionen mit der selben Basis darstellen und dadurch zeigen, (1) daß das Integral (bezüglich eines Maßes) einer einfachen Funktion wohl definiert wird und (2) daß binäre punktweise Operationen, z.B. Arithmetik, max, min, usw, einfache Funktionen liefern?*

Sei f eine einfache Funktion, $f = \sum_{n=1}^N a_n I_{A_n}$, wobei die Mengen $\{A_n\}$ nicht notwendigerweise disjunkt sind. Dann definiere die disjunkten Mengen $\mathcal{D} = \{\cap_{n=1}^N C_n : C_n = A_n \text{ oder } A_n^{\mathrm{c}}\} = \{B_m\}$. Dann gilt

$$f = \sum_{n=1}^N a_n I_{A_n} = \sum_{m=1}^M \left(\sum_{B_m \subset A_n} a_n \right) I_{B_m} = \sum_{m=1}^M b_m I_{B_m}$$

und daher kann jede einfache Funktion bezüglich einer Sammlung von disjunkten Mengen dargestellt werden. Nimm nun an, daß

$$f = \sum_{n=1}^N a_n I_{A_n} \qquad \text{und} \qquad g = \sum_{n=1}^M b_m I_{B_m}$$

zwei einfache Funktionen sind, wobei

$$\begin{aligned} a_N &= 0 & A_N &= [\cup_{n=1}^{N-1} A_n]^{\mathrm{c}} & A_n \cap A_m &= \emptyset \\ b_M &= 0 & B_M &= [\cup_{m=1}^{M-1} B_n]^{\mathrm{c}} & B_n \cap B_m &= \emptyset \end{aligned}$$

gelten. Da $\cup_{n=1}^N A_n = \Omega = \cup_{m=1}^M B_n$ gelten, folgen

$$A_n = \cup_{m=1}^M (A_n \cap B_m) \qquad B_m = \cup_{n=1}^N (A_n \cap B_m)$$

und:

$$f = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M a_n I_{A_n \cap B_m} \qquad g = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N b_m I_{A_n \cap B_m}.$$

Da die zwei Funktionen bezüglich der selben Basis dargestellt worden sind, kann die erwähnten Operationen leicht durchgeführt werden:

$$(f \otimes g) = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M (a_n \otimes b_m) I_{A_n \cap B_m}$$

wobei $\otimes = \pm$, min, max, usw., und das Ergebnis ist klar noch eine einfache Funktion. Diese Darstellung kann auch verwendet werden, um zu zeigen, daß das Integral einer einfachen Funktion unabhängig von den Definitionsmengen ist:

$$f = g \Rightarrow a_n = b_m = c_{nm} \text{ auf } A_n \cap B_m$$

und:

$$\int_\Omega f d\mu = \sum_{n=1}^N a_n \mu(A_n) = \sum_{n=1}^N a_n \sum_{m=1}^M \mu(A_n \cap B_m) = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M c_{nm} \mu(A_n \cap B_m) =$$

$$\int_\Omega g d\mu = \sum_{m=1}^M b_m \mu(B_m) = \sum_{m=1}^M b_m \sum_{n=1}^N \mu(A_n \cap B_m) = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N c_{nm} \mu(A_n \cap B_m).$$

28. *Kann ich zeigen, daß Arithmetik mit Borel messbaren Funktionen eine Borel messbare Funktion liefert?*

Seien $f, g : \Omega \to \bar{\boldsymbol{R}}$ Borel messbar. Nach dem Satz 1.5.5.b gibt es einfache Funktionen $\{f_n\}$ und $\{g_n\}$, so daß $|f_n|, |g_n| < \infty$, $f_n \to f$ und $g_n \to g$ gelten. Dann sind $f_n \pm g_n$, $f_n g_n I_{\{f \neq 0\}} I_{\{g \neq 0\}}$, und $f_n [g_n + n^{-1} I_{\{g_n = 0\}}]^{-1}$ einfache Funktionen. Da die folgenden gelten,

$$\begin{aligned} f_n \pm g_n &\to f \pm g \\ f_n g_n I_{\{f \neq 0\}} I_{\{g \neq 0\}} &\to f \cdot g \\ f_n [g_n + n^{-1} I_{\{g_n = 0\}}]^{-1} &\to f/g \end{aligned}$$

sind die Limiten Borel messbar nach dem Satz 1.5.4.

29. *Kann ich zeigen, daß eine Borel messbare Funktion ein Limes von endlich wertigen einfachen Funktionen ist?*

Es wird zuerst gezeigt, daß eine Borel messbare Funktion $h \geq 0$ als ein Limes einer steigenden Folge von endlich wertigen einfachen Funktionen dargestellt werden kann. Definiere

$$h_n(x) = \begin{cases} \dfrac{k-1}{2^n}, \quad \dfrac{k-1}{2^n} \leq h(x) < \dfrac{k}{2^n}, \qquad k = 1, \ldots, n2^n, \qquad k = 1 + [\![2^n h(x)]\!] \\ \\ \qquad n, \quad n \leq h(x). \end{cases}$$

Es wird nun gezeigt, daß $0 \leq h_n(x) \leq h_{n+1}(x) \leq h(x)$ gilt. Nach der Definition der einfachen Funktionen ist es klar, daß $0 \leq h_n(x) \leq h(x)$, $\forall n$ gilt. Für die Ungleichung $h_n(x) \leq h_{n+1}(x)$ gibt es die folgenden Fälle.

(a) $h(x) \geq n+1$. Dann gilt $h_{n+1}(x) = n+1 > n = h_n(x)$.

(b) $n+1 > h(x) \geq n$. Dann gilt:

$$2^{n+1} h(x) \geq n 2^{n+1} \quad \Rightarrow \quad [\![2^{n+1} h(x)]\!] \geq n 2^{n+1} \quad \Rightarrow \quad \frac{[\![2^{n+1} h(x)]\!]}{2^{n+1}} \geq n.$$

Nach der Definition von $h_n(x)$ gilt $h_n(x) = n \leq h(x)$. Nach der letzten Ungleichung und der Defintion von $h_{n+1}(x)$ gilt:

$$h_{n+1}(x) = \frac{[\![2^{n+1} h(x)]\!]}{2^{n+1}} \geq n = h_n(x).$$

(c) $(m-1)/2^{n+1} \leq h(x) < m/2^{n+1}$, $m = 1 + [\![2^{n+1} h(x)]\!]$ zwischen 1 und $n 2^{n+1}$. Da m nicht größer als $(n+1)2^{n+1}$ ist, gilt:

$$h_{n+1}(x) = \frac{m-1}{2^{n+1}}.$$

Nimm an, daß m gerade ist. Dann gilt:

$$\frac{(m-1)/2}{2^n} \leq h(x) < \frac{m/2}{2^n} \quad \Rightarrow \quad \frac{m/2 - 1}{2^n} \leq h(x) < \frac{m/2}{2^n}.$$

Da $m/2$ für gerade m höchstens $n 2^n$ ist, liefert die letzte Ungleichung den Wert von $h_n(x)$:

$$h_n(x) = \frac{m/2 - 1}{2^n} = \frac{m-2}{2^{n+1}} < \frac{m-1}{2^{n+1}} = h_{n+1}(x).$$

Nimm an, daß m ungerade ist. Dann gilt:

$$\frac{(m-1)/2}{2^n} \leq h(x) < \frac{m/2}{2^n} \quad \Rightarrow \quad \frac{(m-1)/2}{2^n} \leq h(x) < \frac{(m-1)/2 + 1}{2^n}.$$

Da $(m-1)/2+1$ für ungerade m höchstens $n2^n$ ist, liefert die letzte Ungleichung den Wert von $h_n(x)$:

$$h_n(x) = \frac{(m-1)/2}{2^n} = \frac{m-1}{2^{n+1}} = h_{n+1}(x).$$

Nun ist es zu zeigen, daß $h_n(x)$ punktweise gegen $h(x)$ konvergiert. Wenn $h(x_0) = \infty$ konvergiert $h_n(x_0) = n$ natürlich gegen $h(x_0)$. Nimm an, daß $h(x_0) < \infty$ gilt. Für $n > h(x_0)$ und $k = 1 + [\![2^n h(x)]\!]$ gilt

$$|h(x_0) - h_n(x_0)| \leq \frac{k}{2^n} - \frac{k-1}{2^n} = \frac{1}{2^n} \to 0$$

und daraus folgt punktweise Konvergenz.

Nun sei h eine allgemeine Borel messbare Funktion. Dann kann das obige Argument für h^+ und h^- verwendet. Seien f_n und g_n einfache Funktionen, wobei $f_n \uparrow h^+$ und $g_n \uparrow h^-$ gelten, und definiere $h_n = f_n - g_n$. Dann gelten $|h| = h^+ + h^- \geq f_n + g_n = |h_n|$ und $h_n = f_n - g_n \to h^+ - h^- = h$.

30. *Habe ich ein Beispiel einer Funktion h, mit der ein Integral $\int_\Omega h d\mu$ nicht existiert? Habe ich ein Beispiel einer Funktion f, die nicht μ-integrierbar ist?*

    Sei $h : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$. Wenn das Integral existiert, gilt $\int_{\boldsymbol{R}} h d\mu = \int_{\boldsymbol{R}} h^+ d\mu - \int_{\boldsymbol{R}} h^- d\mu$. Mit $h(x) = 1/x$ hat man $\int_{\boldsymbol{R}} h^+ d\mu = \int_0^\infty dx/x = \infty = \int_{-\infty}^0 dx/|x| = \int_{\boldsymbol{R}} h^- d\mu$, so das Integral existiert nicht.

    Sei $f(x) = 1/|x|$ so daß $\int_{\boldsymbol{R}} f d\mu = \infty$ gilt.

31. *Für einen gegebenen Maßraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ und eine Borel messbare μ-integrierbare Funktion f, kann ich zeigen, daß $\int_B f d\mu = \int_B f^+ d\mu - \int_B f^- d\mu$, $\forall B \in \mathcal{F}$ gilt?*

    Nach der Definitionen gelten:

    $$\int_B f d\mu = \int_\Omega f \cdot I_B d\mu = \int_\Omega (f \cdot I_B)^+ d\mu - \int_\Omega (f \cdot I_B)^- d\mu$$

    und

    $$\int_\Omega f^+ \cdot I_B d\mu - \int_\Omega f^- \cdot I_B d\mu = \int_B f^+ d\mu - \int_B f^- d\mu.$$

    Aus den Gleichungen $(f \cdot I_B)^+ = f^+ I_B$ und $(f \cdot I_B)^- = f^- I_B$ folgt

    $$\int_\Omega (f \cdot I_B)^+ d\mu - \int_\Omega (f \cdot I_B)^- d\mu = \int_\Omega f^+ \cdot I_B d\mu - \int_\Omega f^- \cdot I_B d\mu$$

    und daher gilt die gewünschte Gleichung.

32. *Kann ich den Additivitätssatz beweisen, sogar in dem Fall, daß die punktweise Summe nicht notwendigerweise wohl definiert wird?*

    Zuerst wird es gezeigt, daß $\int_\Omega (f+g) d\mu = \int_\Omega f d\mu + \int_\Omega g d\mu$ gilt, wenn $f+g$ und $\int_\Omega f d\mu + \int_\Omega g d\mu$ wohl definiert werden. Nachher wird es gezeigt, daß $\int_\Omega (f+g) d\mu = \int_\Omega f d\mu + \int_\Omega g d\mu$ gilt, wenn $\int_\Omega f d\mu + \int_\Omega g d\mu$ wohl definiert wird, sogar wenn $f+g$ nicht notwendigerweise wohl definiert wird.

    i. Seien

    $$f = \sum_{n=1}^N a_n I_{A_n} \qquad \text{und} \qquad g = \sum_{n=1}^M b_m I_{B_m}$$

    zwei nicht negative einfache Funktionen, wobei

    $$\begin{array}{rclrclrcl} a_N &=& 0 & A_N &=& [\cup_{n=1}^{N-1} A_n]^c & A_n \cap A_m &=& \emptyset \\ b_M &=& 0 & B_M &=& [\cup_{m=1}^{M-1} B_n]^c & B_n \cap B_m &=& \emptyset \end{array}$$

gelten. Da $\cup_{n=1}^N A_n = \Omega = \cup_{m=1}^M B_n$ gelten, folgen

$$A_n = \cup_{m=1}^M (A_n \cap B_m) \qquad B_m = \cup_{n=1}^N (A_n \cap B_m)$$

und:

$$f = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M a_n I_{A_n \cap B_m} \qquad g = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N b_m I_{A_n \cap B_m}.$$

Da die zwei Funktionen bezüglich der selben Basis dargestellt worden sind, folgt

$$\begin{aligned}
\int_\Omega (f+g)d\mu &= \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M (a_n + b_m)\mu(A_n \cap B_m) \\
&= \sum_{n=1}^N a_n \sum_{m=1}^M \mu(A_n \cap B_m) + \sum_{m=1}^M b_m \sum_{n=1}^N \mu(A_n \cap B_m) \\
&= \sum_{n=1}^N a_n \mu(A_n) + \sum_{m=1}^M b_m \mu(B_m) = \int_\Omega f d\mu + \int_\Omega g d\mu
\end{aligned}$$

ii. Nun seien f, g nicht negative Borel messbare Funktionen. Wegen des Satzes 1.5.5.a existieren einfache Funktionen $\{t_n\}$ und $\{u_n\}$ mit $0 \le t_n \le f$, $0 \le u_n \le g$ und $t_n \uparrow f$, $u_n \uparrow g$. Es folgt $0 \le s_n = (t_n + u_n) \uparrow (f+g)$. Wegen (i) gilt

$$\begin{array}{ccccc}
\int_\Omega s_n d\mu & = & \int_\Omega t_n d\mu & + & \int_\Omega u_n d\mu \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\int_\Omega (f+g) d\mu & = & \int_\Omega f d\mu & + & \int_\Omega g d\mu
\end{array}$$

wobei die angegebene Konvergenz aus dem Monotone Konvergenz Satz 1.6.2 folgt.

iii. Seien $f \ge 0$, $g \le 0$, $h = f + g \ge 0$. Da $f + g$ wohl definiert wird, folgt $g > -\infty$ aus $h \ge 0$. Dann hat f die Gestalt $f = h + (-g)$, und es gilt

$$\int_\Omega f d\mu = \int_\Omega h d\mu + \int_\Omega (-g) d\mu = \int_\Omega h d\mu - \int_\Omega g d\mu,$$

wobei die letzte Gleichung aus dem Satz 1.5.9.a folgt. Wenn $\int_\Omega g d\mu > -\infty$ gilt, kann das Integral auf beiden Seiten der obigen Gleichung summiert werden:

$$\int_\Omega h d\mu = \int_\Omega (f+g) d\mu = \int_\Omega f d\mu + \int_\Omega g d\mu.$$

Wenn $\int_\Omega g d\mu = -\infty$ gilt, folgt ein Widerspruch $\int_\Omega f d\mu \ge -\int_\Omega g d\mu = \infty$, da $\int_\Omega f d\mu + \int_\Omega g d\mu$ wohl definiert sein muss.

iv. Seien $f \ge 0$, $g \le 0$, $h = f + g \le 0$. Wenn (iii) an $\tilde{f} = -g \ge 0$, $\tilde{g} = -f \le 0$ und $\tilde{h} = -h \ge 0$ angewandt wird, folgt

$$-\int_\Omega (f+g) d\mu = -\int_\Omega h d\mu = \int_\Omega \tilde{h} d\mu = \int_\Omega (\tilde{f} + \tilde{g}) d\mu = \int_\Omega \tilde{f} d\mu + \int_\Omega \tilde{g} d\mu = -\int_\Omega f d\mu - \int_\Omega g d\mu,$$

wobei der Satz 1.5.9.a verwendet wurde.

Nun definiere:

$$\begin{aligned}
E_1 &= \{x : f(x) \ge 0, g(x) \ge 0\} & E_4 &= \{x : f(x) < 0, g(x) \ge 0, h(x) \ge 0\} \\
E_2 &= \{x : f(x) \ge 0, g(x) < 0, h(x) \ge 0\} & E_5 &= \{x : f(x) < 0, g(x) \ge 0, h(x) < 0\} \\
E_3 &= \{x : f(x) \ge 0, g(x) < 0, h(x) < 0\} & E_6 &= \{x : f(x) < 0, g(x) < 0\}
\end{aligned}$$

Die Argumente in (iii) und (iv) implizieren:

$$\int_{E_i} hd\mu = \int_{E_i} fd\mu + \int_{E_i} gd\mu$$

für $i = 2, 3$. Wenn f und g vertauscht werden, implizieren die Argumente in (iii) und (iv) die obige Gleichung für $i = 4, 5$. Das Argument in (i) impliziert die obige Gleichung für $i = 1$. Wenn es an $-f$ und $-g$ angewandt wird, impliziert das Argument in (i) die obige Gleichung für $i = 6$. Nun definiere $\lambda_f(B) = \int_B fd\mu$ $\lambda_g(B) = \int_B gd\mu$. Nach dem Satz 1.6.1 sind λ_f und λ_g σ-additiv, da $\int_\Omega fd\mu$ und $\int_\Omega gd\mu$ existieren. Daher gelten $\lambda_f(\Omega) = \sum_{i=1}^6 \lambda_f(E_i)$ und $\lambda_g(\Omega) = \sum_{i=1}^6 \lambda_g(E_i)$. Sei jetzt außerdem $\lambda_h(B) = \int_B hd\mu$. Dann gilt

$$\int_\Omega fd\mu + \int_\Omega gd\mu = \lambda_f(\Omega) + \lambda_g(\Omega) = \sum_{i=1}^6 \lambda_f(E_i) + \sum_{i=1}^6 \lambda_g(E_i)$$

$$= \sum_{i=1}^6 [\lambda_f(E_i) + \lambda_g(E_i)] = \sum_{i=1}^6 \int_{E_i} fd\mu + \int_{E_i} gd\mu$$

$$= \sum_{i=1}^6 \int_{E_i} (f+g)d\mu = \sum_{i=1}^6 \int_{E_i} hd\mu = \sum_{i=1}^6 \lambda_h(E_i).$$

Wenn $\int_\Omega hd\mu$ existiert, dann gilt

$$\int_\Omega fd\mu + \int_\Omega gd\mu = \sum_{i=1}^6 \lambda_h(E_i) = \lambda_h(\Omega) = \int_\Omega hd\mu$$

nach dem Satz 1.6.1.

Es ist noch zu zeigen, daß entweder $\int_\Omega h^+ d\mu < \infty$ oder $\int_\Omega h^- d\mu < \infty$ gilt. Da $h^+, h^+ \geq 0$ gilt, exitieren $\int_\Omega h^+ d\mu$ und $\int_\Omega h^- d\mu$. Daher nach dem Satz 1.6.1 gelten

$$\sum_{i=1}^6 \lambda_{h^+}(E_i) = \lambda_{h^+}(\Omega) \quad \text{und} \quad \sum_{i=1}^6 \lambda_{h^-}(E_i) = \lambda_{h^-}(\Omega),$$

wobei λ_{h^+} und λ_{h^-} wie oben definiert werden. Nimm an, daß $\lambda_{h^+}(\Omega) = \infty = \lambda_{h^-}(\Omega)$ gilt. Dann gibt es ein E_i und ein E_j, so daß

$$\lambda_{h^+}(E_i) = \infty, \quad \lambda_{h^-}(E_i) = 0, \quad \text{und} \quad \lambda_{h^-}(E_j) = \infty, \quad \lambda_{h^+}(E_j) = 0$$

gelten, da h das selbe Vorzeichen auf jedes E_k hat. Daher gelten

$$\int_{E_i} fd\mu + \int_{E_i} gd\mu = \int_{E_i} hd\mu = \int_{E_i} h^+ d\mu = \infty$$

und

$$\int_{E_j} fd\mu + \int_{E_j} gd\mu = \int_{E_j} hd\mu = -\int_{E_j} h^- d\mu = -\infty.$$

Da f und g die selben Vorzeichen auf jedes E_k haben, folgen

$$\int_{E_i} fd\mu = \infty \text{ oder } \int_{E_i} gd\mu = \infty \quad \text{und} \quad \int_{E_j} fd\mu = -\infty \text{ oder } \int_{E_j} gd\mu = -\infty.$$

Falls $\infty = \int_{E_i} fd\mu = \int_{E_i} f^+ d\mu$ gilt, folgt $\int_\Omega fd\mu = \infty$,

$$\int_\Omega fd\mu = \int_\Omega f^+ d\mu - \int_\Omega f^- d\mu \geq \underbrace{\int_{E_i} f^+ d\mu}_{=\infty} - \int_\Omega f^- d\mu.$$

Falls $\int_{E_i} g d\mu = \infty$ gilt, folgt ähnlich $\int_\Omega g d\mu = \infty$. Also gilt entweder $\int_\Omega f d\mu = \infty$ oder $\int_\Omega g d\mu = \infty$.

Falls $-\infty = \int_{E_j} f d\mu = -\int_{E_j} f^- d\mu$ gilt, folgt $\int_\Omega f d\mu = -\infty$,

$$-\int_\Omega f d\mu = -\int_\Omega f^+ d\mu + \int_\Omega f^- d\mu \geq -\int_\Omega f^+ d\mu + \underbrace{\int_{E_j} f^- d\mu}_{=\infty}.$$

Falls $\int_{E_j} g d\mu = -\infty$ gilt, folgt ähnlich $\int_\Omega g d\mu = -\infty$. Also gilt entweder $\int_\Omega f d\mu = -\infty$ oder $\int_\Omega g d\mu = -\infty$.

Es folgt, genau eines von den Integralen $\int_\Omega f d\mu$ und $\int_\Omega g d\mu$ ist $+\infty$ und genau eines ist $-\infty$, aber $\int_\Omega f d\mu + \int_\Omega g d\mu$ muss wohl definiert sein. Der Widerspruch impliziert, daß entweder $\int_\Omega h^+ d\mu < \infty$ oder $\int_\Omega h^- d\mu < \infty$ gilt.

Es wird nun gezeigt, daß $\int_\Omega (f+g) d\mu = \int_\Omega f d\mu + \int_\Omega g d\mu$ gilt, wenn $\int_\Omega f d\mu + \int_\Omega g d\mu$ wohl definiert wird, sogar wenn $f+g$ nicht notwendigerweise wohl definiert wird.

Zuerst nimm an, daß f und g integrierbar sind. Nach dem Satz 1.5.5.b existieren endlich wertige einfache Funktionen $\{f_n\}$ und $\{g_n\}$ mit $|f_n| \leq |f|$, $|g_n| \leq |g|$, $f_n \to f$ und $g_n \to g$. Nach dem Majorsierte Konvergenz Satz 1.6.9 gelten

$$\int_\Omega f_n d\mu \to \int_\Omega f d\mu \quad \text{und} \quad \int_\Omega g_n d\mu \to \int_\Omega g d\mu.$$

Es gilt auch $|f_n + g_n| \leq |f_n| + |g_n| \leq |f| + |g|$. Da $|f| + |g|$ integrierbar ist, folgt

$$\int_\Omega (f_n + g_n) d\mu \to \int_\Omega (f+g) d\mu$$

auch mit dem Majorsierte Konvergenz Satz 1.6.9. Da die einfachen Funktionen endlich wertig sind, ist die oben bewiesene Version des Additivitätssatzes anwendbar,

$$\int_\Omega f_n d\mu + \int_\Omega g_n d\mu = \int_\Omega (f_n + g_n) d\mu.$$

Aus den letzten drei Gleichungen folgt $\int_\Omega f d\mu + \int_\Omega f d\mu = \int_\Omega (f+g) d\mu$.

Nun nimm an, daß f und g nicht notwendigerweise integrierbar sind. Da die Summe $\int_\Omega f d\mu + \int_\Omega g d\mu$ wohl definiert sein muss, wird es ausgeschlossen, daß $\int_\Omega f d\mu = -\int_\Omega g d\mu = \pm\infty$ gilt. Nimm jetzt an, daß $\int_\Omega f^+ d\mu + \int_\Omega g^+ d\mu = \infty$ und $\int_\Omega f^- d\mu + \int_\Omega g^- d\mu < \infty$ gelten. Es ist zu zeigen, daß $\int_\Omega (f+g) d\mu = \infty = \int_\Omega f d\mu + \int_\Omega g d\mu$. Nach dem Satz 1.5.5.a existieren endlich wertige einfache Funktionen $\{f_n^+\}$, $\{g_n^+\}$ mit $0 \leq f_n^+ \leq f^+$, $0 \leq g_n^+ \leq g^+$ und $f_n^+ \uparrow f^+$, $g_n^+ \uparrow g^+$. Es gilt, $(f_n^+ - f^- + g_n^+ - g^-) \uparrow (f+g)$ und $(f_n^+ - f^- + g_n^- - g^-) \geq (-f^- - g^-)$ mit $\int_\Omega (-f^- - g^-) d\mu > -\infty$. Nach dem Verallgemeinerten Monotone Konvergenz Satz 1.6.7.a gilt

$$\int_\Omega (f_n^+ - f^- + g_n^+ - g^-) d\mu \uparrow \int_\Omega (f+g) d\mu.$$

Da f_n^+, f^-, g_n^+ und g^- integrierbar sind, liefert eine schon beweisene Version des Additivitätssatzes die Zerlegung,

$$\int_\Omega (f_n^+ + g_n^+) d\mu - \int_\Omega (f^- + g^-) d\mu = \int_\Omega (f_n^+ - f^- + g_n^+ - g^-) d\mu.$$

Nach dem Monotone Konvergenz Satz 1.6.2 gilt

$$\int_\Omega (f_n^+ + g_n^+) d\mu \uparrow \int_\Omega (f^+ + g^+) d\mu = \int_\Omega f^+ d\mu + \int_\Omega g^+ d\mu = \infty$$

wobei die letzte Gleichung mit einer schon bewiesenen Version des Additivitätssatzes folgt. Aus den letzten drei Gleichungen folgt $\int_\Omega (f+g) d\mu = \infty = \int_\Omega f d\mu + \int_\Omega g d\mu$. Mit einem ähnlichen Argument folgt $\int_\Omega (f+g) d\mu = -\infty = \int_\Omega f d\mu + \int_\Omega g d\mu$, wenn $\int_\Omega f^+ d\mu + \int_\Omega g^+ d\mu < \infty$ und $\int_\Omega f^- d\mu + \int_\Omega g^- d\mu = \infty$ gelten.

33. *Kann ich den Monotone Konvergenz Satz beweisen?*

Sei $\{h_n\}$ eine steigende Folge von nicht negativen Borel messbaren Funktionen und definiere $h(x) = \lim_{n\to\infty} h_n(x)$, $x \in \Omega$. Nach dem Satz 1.5.9.b folgt $\int_\Omega h_n d\mu \le \int_\Omega h d\mu$, $\forall n$, aus der Ungleichung $h_n \le h$. Daher gilt $k = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega h_n d\mu \le \int_\Omega h d\mu$. Sei $0 < b < 1$. Sei s eine nicht negative, endlich wertige einfache Funktion mit $s \le h$. Definiere $B_n = \{x : h_n(x) \ge bs(x)\}$. Dann gilt $B_n \uparrow \Omega$, da $h_n \uparrow h$ gilt und s endlich wertig ist. Nach dem Satz 1.5.9.b gilt $k \ge \int_\Omega h_n d\mu \ge \int_{B_n} h_n d\mu$. Nach den Sätzen 1.5.9.b und 1.5.9.a gilt $\int_{B_n} h_n d\mu \ge \int_{B_n} bs d\mu = b \int_{B_n} s d\mu$. Nach dem Satz 1.6.1 ist $\lambda(B) = \int_B s d\mu$ σ-additiv. Nach dem Satz 1.2.7 gilt $\int_{B_n} s d\mu = \lambda(B_n) \to \lambda(\Omega) = \int_\Omega s d\mu$. Nimm $b \to 1^-$ und bekomme $k \ge \int_\Omega s d\mu$. Mit dem Supremum über solche einfachen Funktionen s folgt $k \ge \int_\Omega h d\mu$. Das heisst, $\int_\Omega h_n d\mu \to \int_\Omega h d\mu$.

34. *Wenn μ σ-endlich ist, g, h Borel messbar sind, und $\int_\Omega g d\mu$ und $\int_\Omega h d\mu$ existieren, kann ich zeigen, daß $\int_A g d\mu \le \int_A h d\mu$, $\forall A \in \mathcal{F}$, gilt genau dann wenn $g \le h$ f.ü. $[\mu]$ gilt. Was kann ich dann über die Fälle $g = 0$ f.ü. $[\mu]$ und $g = h$ f.ü. $[\mu]$ sagen?*

Zuerst nimm an, daß $g \le h$ f.ü. gilt. Für ein gegebenes $A \in \mathcal{F}$ definiere $B = \{x \in A : g(x) > h(x)\}$, so daß $\mu(B) = 0$ und $B^c = \{x \in A : g(x) \le h(x)\}$ gelten. Nach dem Satz 1.6.5 gilt

$$\int_B g d\mu = \int_\Omega g I_B d\mu = 0 = \int_\Omega h I_B d\mu = \int_B h d\mu$$

da $gI_B = 0$, f.ü. $hI_B = 0$, f.ü. gelten. Nach dem Additivitätssatz gelten

$$\int_A g d\mu = \int_A (gI_B + gI_{B^c}) d\mu = \int_A gI_B + \int_A gI_{B^c} d\mu = \int_B g + \int_{B^c} g d\mu$$

und

$$\int_A h d\mu = \int_A (hI_B + hI_{B^c}) d\mu = \int_A hI_B + \int_A hI_{B^c} d\mu = \int_B h + \int_{B^c} h d\mu.$$

Weil $g \le h$ auf B^c gilt, folgt

$$\int_A g d\mu = \int_B g d\mu + \int_{B^c} g d\mu = \int_{B^c} g d\mu \le \int_{B^c} h d\mu = \int_B h d\mu + \int_{B^c} h d\mu = \int_A h d\mu.$$

Nun nimm an, daß $\int_A g d\mu \le \int_A h d\mu$, $\forall A \in \mathcal{F}$ gilt. Es ist zu zeigen, daß $g \le h$ f.ü. gilt. Zuerst nimm an, daß μ endlich ist. Daß $g \le h$, f.ü. gilt, folgt aus den folgenden:

i. $g \le h$ gilt auf $\{x : h(x) = \infty\}$.
ii. $g \le h$ f.ü. gilt auf $\{x : h(x) \text{ endlich}\}$, oder $\mu(C) = 0$, $C = \{x : g(x) > h(x), h \text{ endlich}\}$.
iii. $g \le h$ f.ü. gilt auf $\{x : h(x) = -\infty\}$, oder $\mu(D) = 0$, $D = \{x : g(x) > h(x), h(x) = -\infty\}$.

Die Behauptung (i) gilt sowieso. Um (ii) zu beweisen, definiere $C_n = \{x : g(x) \ge h(x) + 1/n, |h(x)| \le n\}$. Dann gilt

$$\int_{C_n} h d\mu \ge \int_{C_n} g d\mu \overset{\text{auf } C_n}{\ge} \int_{C_n} h d\mu + \frac{1}{n}\mu(C_n).$$

Da die linke Seite endlich ist,

$$\left|\int_{C_n} h d\mu\right| \le \int_{C_n} |h| d\mu \overset{\text{auf } C_n}{\le} n\mu(C_n) < \infty$$

folgt $0 \ge \mu(C_n)/n \ge 0$ oder $\mu(C_n) = 0$. Wegen der Subadditivität des Lebesgueschen Maßes, die aus Satz 1.2.5.d folgt, gilt

$$\mu(\cup_{n=1}^\infty C_n) \le \sum_{n=1}^\infty \mu(C_n) = 0.$$

Da $C \subset \cup_{n=1}^{\infty} C_n$ gilt, folgt $\mu(C) = 0$ aus dem Satz 1.2.5.c. Um (iii) zu beweisen, definiere $D_n = \{x : h(x) = -\infty, g(x) \geq -n\}$. Dann gilt:

$$-\infty \cdot \mu(D_n) = \int_{D_n} h d\mu \geq \int_{D_n} g d\mu \geq -n\mu(D_n)$$

und aus der Ungleichung $\infty \cdot \mu(D_n) \leq n \cdot \mu(D_n) < \infty$ folgt $\mu(D_n) = 0$. Damit gilt auch

$$\mu(\cup_{n=1}^{\infty} D_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(D_n) = 0$$

wegen der Subadditivität. Da $D \subset \cup_{n=1}^{\infty} D_n$ gilt, folgt $\mu(D) = 0$ aus dem Satz 1.2.5.c.

Nun nimm an, daß μ nur σ-endlich ist. Sei weiters $\{A_n\}$ eine Folge mit $\mu(A_n) < \infty$, $\cup_{n=1}^{N} A_n \uparrow \Omega$ und $A_n \cap A_m = \emptyset$, und definiere $\mu_n(A) = \mu(A_n \cap A)$. Aus der Ungleichung,

$$\int_A g d\mu_n = \int_{A \cap A_n} g d\mu \leq \int_{A \cap A_n} h d\mu \leq \int_A h d\mu_n$$

folgt $\int_A g d\mu_n \leq \int_A h d\mu_n$, $\forall A \in \mathcal{F}$. Nach dem obigen Beweis gilt $g \leq h$ f.ü. bezüglich μ_n. Dann gilt

$$0 = \mu_n\{x \in \Omega : g(x) > h(x)\} = \mu\{x \in \Omega : g(x) > h(x)\} \cap A_n$$

$$= \mu\{x \in A_n : g(x) > h(x)\} = \mu\{x \in \Omega : g(x) \cdot I_{A_n} > h(x) \cdot I_{A_n}\}.$$

Also gilt $g \cdot I_{A_n} \leq h \cdot I_{A_n}$ f.ü. bezüglich μ. Es folgt,

$$g = \sum_{n=1}^{\infty} g \cdot I_{A_n} \leq \sum_{n=1}^{\infty} h \cdot I_{A_n} = h \quad \text{f.ü.}$$

Wenn die Rollen von g und h in der Ungleichung, $g \leq h$ f.ü., vertauscht werden, gilt $\int_A g d\mu = \int_A h d\mu$, $\forall A \in \mathcal{F}$ genau dann wenn $g = h$ f.ü. $[\mu]$. Im bestimmten Fall, daß $h = 0$ gilt, gilt $\int_A g d\mu = 0$, $\forall A \in \mathcal{F}$ genau dann wenn $g = 0$ f.ü. $[\mu]$.

35. *Kann ich unter den Voraussetzungen von der 44.Aufgabe und mit Hilfe des obigen verallgemeinerten Additivitätssatzes die Gleichung* $\frac{d}{dx}\int_a^b f(x,y)dy = \int_a^b f_x(x,y)dy$ *beweisen?*

Sei $f(x,y) : (c,d) \times (a,b) \to \boldsymbol{R}$ eine Borel messbare Funktion von $y \in (a,b)$ für jedes $x \in (c,d)$. Nimm an, $f(x,y)$ ist Lebesgue integrierbar über $a < y < b$ für jedes $x \in (c,d)$. Nimm an, daß die partielle Ableitung $f_x(x,y)$, $\forall(x,y) \in (c,d) \times (a,b)$ existiert, und daß $f_x(x,y)$ und eine Borel messbare und Lebesgue integrierbare Funktion $h(y) : (a,b) \to \boldsymbol{R}$ die Ungleichung $|f_x(x,y)| \leq h(y)$, $\forall(x,y) \in (c,d) \times (a,b)$ erfüllen. Die folgenden sind zu zeigen: $f_x(x,y)$ ist eine Borel messbare Funktion von $y \in (a,b)$ für jedes $x \in (c,d)$, $\frac{d}{dx}\int_a^b f(x,y)dy$ existiert $\forall x \in (c,d)$, und die folgende Gleichung gilt,

$$\frac{d}{dx}\int_a^b f(x,y)dy = \int_a^b f_x(x,y)dy.$$

Wähle $x_0 \in (c,d)$ und sei $\{x_n\}$ eine Folge, wobei $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ und $x_n \neq x_0$, $\forall n \in \boldsymbol{N}$ gelten. Da $f(x,y)$ eine Borel messbare Funktion von $y \in (a,b)$ für jedes $x \in (c,d)$ ist, ist

$$g_n(y) = \frac{f(x_n,y) - f(x_0,y)}{x_n - x_0}.$$

Borel messbar. Da $f(x,y)$ Lebesgue integrierbar über $a < y < b$ für jedes $x \in (c,d)$ ist, ergibt der oben bewiesene Additivitätssatz die Gleichung,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{x_n - x_0}\left[\int_a^b f(x_n,y)dy - \int_a^b f(x_0,y)dy\right] = \lim_{n\to\infty}\int_a^b g_n(y)dy.$$

Da die Funktionen $\{g_n\}$ Borel messbar sind, ist

$$f_x(x_0, y) = \lim_{n\to\infty} g_n(y)$$

Borel messbar nach dem Satz 1.5.4. Laut der Mittelwertssatz, existiert λ_n zwischen x_n und x_0, so daß

$$g_n(y) = \frac{f(x_n, y) - f(x_0, y)}{x_n - x_0} = f_x(\lambda_n, y)$$

gilt, und daher gilt $g_n(y) = |f_x(\lambda_n, y)| \le h(y)$. Da h integrierbar ist, laut der Majorsierte Konvergenz Satz, daß der Limes $\lim_{n\to\infty} g_n(y) = f_x(x_0, y)$ integrierbar ist und daß die Gleichung

$$\lim_{n\to} \int_a^b g_n(y)dy = \int_a^b f_x(x_0, y)dy$$

gilt. Weil $x_0 \in (c, d)$ beliebig ist, folgt

$$\frac{d}{dx}\int_a^b f(x,y)dy = \int_a^b f_x(x,y)dy.$$

36. *Kann ich zeigen, daß das Riemannsche Integral mit dem Lebesgueschen Integral übereinstimmt, wenn die beiden existieren?*

Sei $f : [a, b] \to \boldsymbol{R}$ beschränkt auf $[a, b]$ mit $|f| \le M$. Sei $P_N = \{x_n\}_{n=1}^N$ eine Teilung von $[a, b]$. Definiere

$$\begin{aligned} \alpha_N(x) &= \sup_{\xi\in[x_{n-1},x_n]} f(\xi), \quad x \in [x_{n-1}, x_n], \quad 1 \le n \le N, \qquad & U_N &= \int_a^b \alpha_N(x)d\mu(x) \\ \beta_N(x) &= \inf_{\xi\in[x_{n-1},x_n]} f(\xi), \quad x \in [x_{n-1}, x_n], \quad 1 \le n \le N, \qquad & L_N &= \int_a^b \beta_N(x)d\mu(x). \end{aligned}$$

Ist $P_{N+1} \supset P_N$ eingebettet, dann gilt $\alpha_1 \ge \alpha_2 \ge \cdots \ge f \ge \cdots \ge \beta_2 \ge \beta_1$ und

$$\alpha = \lim_{N\to\infty} \alpha_N, \qquad \beta = \lim_{N\to\infty} \beta_N$$

existieren. Da α und β Limiten von einfachen Funktionen sind, sind sie Borel messbar. Die einfachen Funktionen $|\alpha_N|$ und $|\beta_N|$ werden von der integrierbaren (konstanten) Funktion M majorsiert. Nach dem Majorsierte Konvergenz Satz sind die Limiten α und β integrierbar, und die folgenden gelten,

$$\begin{aligned} \lim_{N\to\infty} U_N &= \lim_{N\to\infty}\int_a^b \alpha_N(x)d\mu(x) = \int_a^b \lim_{N\to\infty} \alpha_N(x)d\mu(x) = \int_a^b \alpha(x)d\mu(x) \\ \lim_{N\to\infty} L_N &= \lim_{N\to\infty}\int_a^b \beta_N(x)d\mu(x) = \int_a^b \lim_{N\to\infty} \beta_N(x)d\mu(x) = \int_a^b \beta(x)d\mu(x). \end{aligned}$$

Da f Riemann integrierbar ist, sind die zwei obigen Limiten der selbe Limes unabhängig von $\{P_N\}$, und der wird mit $r_{a,b}(f)$ bezeichnet. Da α und β integrierbar sind, ergibt der Additivitätssatz 1.6.3 die Gleichung,

$$\int_a^b [\alpha(x) - \beta(x)]d\mu(x) = \int_a^b \alpha(x)d\mu(x) - \int_a^b \beta(x)d\mu(x) = 0.$$

Nach dem Satz 1.6.6.b folgt $\alpha - \beta = 0$, f.ü. $[\mu]$ aus der letzten Gleichung und der Ungleichung $\alpha - \beta \ge 0$. Also gilt sogar $\alpha = f = \beta$ f.ü. $[\mu]$. Nach dem Satz 1.6.5.b ist das Lebesguesche Integral von f gleich $r_{a,b}(f)$.

37. *Kann ich den Jordan-Hahn Satz beweisen?*

Sei λ ein signiertes Maß auf $(\Omega, \mathcal{F})$ und definiere

$$\lambda^+(A) = \sup\{\lambda(B) : B \in \mathcal{F}, B \subset A\} \qquad \lambda^-(A) = -\inf\{\lambda(B) : B \in \mathcal{F}, B \subset A\}.$$

Es ist zu zeigen, daß λ^+ und λ^- Maßen sind, und $\lambda = \lambda^+ - \lambda^-$ gilt.

Nach dem Satz 2.1.1 gibt es ein D, so daß $\lambda(D) = \inf\{\lambda(A) : A \in \mathcal{F}\}$. Nach dem Satz 1.2.5.a gilt $\lambda(\emptyset) = 0$. Da λ die beiden Werte $\pm\infty$ nicht annimmt, genügt es anzunehmen, daß $\lambda(D) > -\infty$ gilt. Ansonsten ist das folgende Argument an $-\lambda$ anwendbar. Es gilt dann, $-\infty < \lambda(D) \leq 0 = \lambda(\emptyset)$. Es wird nun gezeigt, daß die folgenden gelten,

$$\lambda(A \cap D) \leq 0, \qquad \lambda(A \cap D^c) \geq 0, \qquad A \in \mathcal{F}.$$

Nimm an, daß $\lambda(A \cap D) > 0$ gilt. Aus Additivität folgt $\lambda(D) = \lambda(A \cap D) + \lambda(A^c \cap D)$ und daher $-\infty < \lambda(A \cap D) + \lambda(A^c \cap D) \leq 0$. Da $\lambda(A \cap D) > 0$ angenommen wird, folgt $-\infty < \lambda(D) \leq \lambda(A^c \cap D) \leq 0$. Es folgt, $0 < \lambda(A \cap D) < \infty$. Daher kann $\lambda(A \cap D)$ in der Additivitätsgleichung subtrahiert werden,

$$\lambda(A^c \cap D) = \lambda(D) - \lambda(A \cap D) < \lambda(D),$$

und die Ungleichung widerspricht, daß λ in D minimiert wird. Nun nimm an, daß $\lambda(A \cap D^c) < 0$ gilt. Aus Additivität folgt den Widerspruch

$$\lambda(D \cup (A \cap D^c)) = \lambda(D) + \lambda(A \cap D^c) < \lambda(D),$$

da D und $A \cap D^c$ disjunkt sind. Es wird nun gezeigt, daß

$$\lambda^+ = \lambda(A \cap D^c), \qquad \lambda^- = -\lambda(A \cap D)$$

gelten. Für $B \in \mathcal{F}$, $B \subset A$ gelten

$$\begin{aligned} \lambda(B) &= \underbrace{\lambda(B \cap D)}_{\leq 0} + \lambda(B \cap D^c) &&\leq \lambda(B \cap D^c) \\ &\leq \lambda(B \cap D^c) + \underbrace{\lambda((A - B) \cap D^c)}_{\geq 0} &&= \lambda(A \cap D^c) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \lambda(B) &= \lambda(B \cap D) + \underbrace{\lambda(B \cap D^c)}_{\geq 0} &&\geq \lambda(B \cap D) \\ &\geq \lambda(B \cap D) + \underbrace{\lambda((A - B) \cap D)}_{\leq 0} &&= \lambda(A \cap D). \end{aligned}$$

Es folgen,

$$\begin{array}{c} \lambda^+(A) = \\ \sup\{\lambda(B) : B \in \mathcal{F}, B \subset A\} \end{array} \overset{\lambda(B) \leq \lambda(A \cap D^c)}{\leq} \lambda(A \cap D^c) \overset{A \cap D^c \subset A}{\leq} \begin{array}{c} \lambda^+(A) = \\ \sup\{\lambda(B) : B \in \mathcal{F}, B \subset A\} \end{array}$$

und

$$\begin{array}{c} -\lambda^-(A) = \\ \inf\{\lambda(B) : B \in \mathcal{F}, B \subset A\} \end{array} \overset{\lambda(B) \geq \lambda(A \cap D)}{\geq} \lambda(A \cap D) \overset{A \cap D \subset A}{\leq} \begin{array}{c} -\lambda^-(A) = \\ \inf\{\lambda(B) : B \in \mathcal{F}, B \subset A\}. \end{array}$$

Da $\lambda^+(A) = \lambda(A \cap D^c)$ und $\lambda^-(A) = -\lambda(A \cap D)$ nicht negativ und σ-additiv sind, sind sie Maßen. Schließlich folgt die gewünschte Zerlegung aus $\lambda(A) = \lambda(A \cap D^c) + \lambda(A \cap D) = \lambda^+(A) - \lambda^-(A)$.

38. *Für eine beschränkte Verteilungsfunktion F_0 auf $\boldsymbol{R}$, kann ich eine eindeutige (bis auf additive Konstanten) Zerlegung von Verteilungsfunktionen $F_0 = F_1 + F_2 + F_3$, $\lambda_i(a, b] = F_i(b) - F_i(a)$, $i = 0, 3$, beweisen, wobei λ_1 ein Zählmaß ist, λ_2 absolut stetig $[\mu]$ (Lebesguesches Maß) ist, und λ_3 stetig und singulär $[\mu]$ ist? Habe ich ein explizites Beispiel $\{F_i\}$, wofür ich entsprechende Dichtefunktionen $\{f_i\}$ geben kann?*

Nach dem Satz 1.4.4 gibt es ein eindeutiges Lebesgue-Stieltjessches Maß λ_0 auf $\mathcal{F} = \mathcal{B}(\boldsymbol{R})$ mit $\lambda_0(a, b] = F_0(b) - F_0(a)$. Da F_0 beschränkt ist, ist λ_0 endlich (und so σ-endlich) auf $\boldsymbol{R}$. Nach dem Lebesguesche Zerlegung Satz gibt es eine eindeutige Zerlegung $\lambda_0 = \lambda_2 + \lambda$, wobei λ_2 und λ Maßen sind und $\lambda_2 \ll \mu$ und $\lambda \perp \mu$ gelten. (Die Zerlegung $\lambda_0 = \lambda_2 + \lambda$ liefert zwei Maßen λ_2, λ, wenn λ_0 ein Maß ist. Wenn λ_0 ein signiertes Maß ist, wird das Argument an λ_0^+ und λ_0^- angewandt, und dann sind λ_2, λ signierte Maßen.) Daher gibt es eine Menge N, wobei $\lambda(N^c) = 0$ und $\mu(N) = 0$ gelten. Nach dem Satz 1.2.5.c gilt $\lambda(A \cap N^c) = 0$, $\forall A \in \mathcal{F}$. Wegen der Ungleichung $0 \le \lambda_2, \lambda \le \lambda_0$ sind λ_2 und λ endliche (und so Lebesgue-Stieltjessche) Maßen. Nach dem Satz 1.4.2 gibt es eindeutige (bis auf additive Konstanten) Verteilungsfunktionen F_2 und F mit $\lambda_2(a, b] = F_2(b) - F_2(a)$ und $\lambda(a, b] = F(b) - F(a)$. Wegen der Ungleichung $0 \le \lambda(\boldsymbol{R}) \le \lambda_0(\boldsymbol{R})$, ist F beschränkt. Da F steigend und beschränkt ist, ist F unstetig nur auf einer abzählbaren Menge S. Sei λ_1 das Zählmaß auf S mit $\lambda_1\{x\} = F(x) - F(x^-) = \lambda\{x\}$, $x \in S$, oder $\lambda_1(A) = \lambda(A \cap S)$, $A \in \mathcal{F}$. Wegen der Ungleichung $0 \le \lambda_1(\boldsymbol{R}) = \lambda_1(S) = \lambda(S) \le \lambda(\boldsymbol{R})$, ist λ_1 ein endliches (und so ein Lebesgue-Stieltjessches) Maß. Nach dem Satz 1.4.2 gibt es eine eindeutige (bis auf additive Konstanten) Verteilungsfunktion F_1 mit $\lambda_1(a, b] = F_1(b) - F_1(a)$. Dann ist die Funktion $F_3 = F - F_1$ eine stetige Verteilungsfunktion. Nach dem Satz 1.4.4 gibt es ein eindeutiges Lebesgue-Stieltjessches Maß λ_3 auf $\mathcal{F}$ mit $\lambda_3(a, b] = F_3(b) - F_3(a)$. Nach dem Satz 1.4.4 ist $\lambda = \lambda_1 + \lambda_3$ das eindeutige zu $F = F_1 + F_3$ gehörige Lebesgue-Stieltjessche Maß. Also gilt $\lambda_3(A) = \lambda(A) - \lambda_1(A) = \lambda(A) - \lambda(A \cap S) = \lambda(A \cap S^c)$, $A \in \mathcal{F}$. Daher gelten $\lambda_1(N^c) = \lambda(N^c \cap S) = 0$ und $\lambda_3(N^c) = \lambda(N^c \cap S^c) = 0$ oder $\lambda_1 \perp \mu$ und $\lambda_3 \perp \mu$. Schließlich gilt $\lambda_0 = \lambda_2 + \lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$ und daher gilt $F_0 = F_1 + F_2 + F_3$.

Nach dem Radon-Nikodym Satz gibt es eine Borel messbare Funktion f_2, so daß $\lambda_2(A) = \int_A f_2 d\mu$, $A \in \mathcal{F}$. Da λ_1 und λ_3 nicht absolut stetig bezüglich μ sind, liefert der Radon-Nikodym Satz keine Dichtefunktionen f_1 und f_3. Für ein explizites Beispiel sei $\lambda_2(A) = \mu(A \cap [0, 1])$ (so gelten $f_2 = \chi_{[0,1]}$ und $F_2(x) = \int_{-\infty}^x f_2(t)dt$), sei F_3 die Cantorsche Funktion und definiere

$$\lambda_1\{x\} = \begin{cases} 1/4^{n+1}, & x \in \partial I_{n,m} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \qquad C = [0,1] - \bigcup_{n=0}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{2^n} I_{n,m}, \qquad I_{n,m} = (a_{n,m}, b_{n,m})$$

wobei C die Cantorsche Menge ist und $\{I_{n,m}\}$ die entfernten mittleren Dritteln sind,

$$\begin{array}{c} I_{0,1} = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}) \\ I_{1,1} = (\frac{1}{9}, \frac{2}{9}) \quad I_{1,2} = (\frac{7}{9}, \frac{8}{9}) \\ I_{2,1} = (\frac{1}{27}, \frac{2}{27}) \quad I_{2,2} = (\frac{7}{27}, \frac{8}{27}) \quad I_{2,3} = (\frac{19}{27}, \frac{20}{27}) \quad I_{2,4} = (\frac{25}{27}, \frac{26}{27}) \end{array}$$

und so weiter. Dann hat F_0 Sprünge am Rand jedes Intervalls $I_{n,m}$, in dem die Cantorsche Funktion F_3 konstant ist, und die Summe der Sprünge im $n$ten Niveau (d.h. in $\{I_{n,m}\}_{m=1}^{2^n}$) ist $2^{n+1}/4^{n+1} = 1/2^{n+1}$, $n \in \boldsymbol{N}_0$. Daher gelten $F_0(x) = 0$, $x \le 0$ und $F_0(x) = 3$, $x \ge 1$.

39. *Kann ich zeigen, die Cantorsche Funktion F ist stetig und wachsend, $F' = 0$ gilt f.ü. $[\mu]$ (Lebesguesches Maß), F ist nicht absolut stetig, und das Maß $\lambda(a, b] = F(b) - F(a)$ ist singulär $[\mu]$ (Lebesguesches Maß)?*

Die Cantorsche Funktion F wird als ein Limes der folgenden Funktionen $\{F_n\}$ definiert:

$$F_n(x) = \begin{cases} 0, \quad x \le 0, \qquad 1, \quad x \ge 1 \\ m/2^n, \quad x \in I_{n,m} \\ \text{linear interpoliert, sonst.} \end{cases}$$

Die größte Differenz zwischen F_n und F_{n+1} wird im Intervall $[0, 1/3^n]$ angenommen: F_n hat die Steigung $[F_n(1/3^n) - F_n(0)]/[(1/3^n) - 0] = (1/2^n)/(1/3^n)$ auf $[0, 1/3^n]$ und den Wert $F_n(1/3^{n+1}) = (1/2^n)/(1/3^n) \cdot (1/3^{n+1})$, und F_{n+1} ist konstant auf $[1/3^{n+1}, 2/3^{n+1}]$ mit dem Wert $F_{n+1}(1/3^{n+1}) = 1/2^{n+1}$. Daher erfüllt die Sup-Norm $\|F_{n+1} - F_n\|_{C^0} = F_{n+1}(1/3^{n+1}) - F_n(1/3^{n+1}) = 1/(6 \cdot 2^n)$ und

$$\|F_{n+k} - F_n\|_{C^0} \leq \sum_{m=0}^{k-1} \|F_{n+m+1} - F_{n+m}\|_{C^0} = \frac{1 - 2^{-k}}{6 \cdot 2^{n-1}} \overset{n,k\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Daher ist $\{F_n\}$ eine Cauchy-Folge in C^0. Wegen der Vollständigkeit des Banachraumes, ist der Limes stetig, d.h. die Cantorsche Funktion F ist stetig. Da $F(x) = F_n(x) = m/2^n$, $x \in I_{n,m}$ gilt, folgt $F'(x) = 0$, $x \in I_{n,m}$, $m = 1, \ldots, 2^n$, $\forall n \in \boldsymbol{N}$. Das heisst, $F'(x) = 0$, $x \in [0,1] - C$ oder $F'(x) = 0$ f.ü. Nun seien $\{K_{n,m}\}_{m=1}^{2^{n+1}}$ die Intervalle, die von $[0,1]$ verblieben sind, nachdem die Intervalle $\{I_{n,m}\}_{m=1}^{2^n}$ entfernt werden,

$$\bigcup_{m=1}^{2^{N+1}} K_{N,m} = [0,1] - \bigcup_{n=0}^{N} \bigcup_{m=1}^{2^n} I_{n,m}, \qquad C = \bigcap_{N=0}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{2^{N+1}} K_{n,m}, \qquad K_{N,m} = [\alpha_{N,m}, \beta_{N,m}].$$

Da F und F_N auf jedes $I_{n,m}$, $1 \leq m \leq 2^n$, $1 \leq n \leq N$ konstant sind, gilt

$$\sum_{m=1}^{2^{N+1}} |F(\beta_{N,m}) - F(\alpha_{N,m})| = \sum_{m=1}^{2^{N+1}} F_N(\beta_{N,m}) - F_N(\alpha_{N,m}) = 1.$$

Das heisst, die Länge von $\cup_{m=1}^{2^{N+1}} K_{N,m}$ verschwindet wenn $N \to \infty$, aber die obige Summe wird nie kleiner als 1. Daher ist F nicht absolut stetig. Nach dem Satz 1.4.4 gibt es ein eindeutiges Lebesgue-Stieltjessches Maß λ auf $\mathcal{B}(\boldsymbol{R})$ mit $\lambda(a,b] = F(b) - F(a)$, da F eine Verteilungsfunktion ist. Nach dem Satz 1.2.7 gilt

$$\lambda([0,1] - C) = \lim_{N\to\infty} \lambda(\cup_{n=0}^{N} \cup_{m=1}^{2^n} I_{n,m}),$$

da $\cup_{n=0}^{N} \cup_{m=1}^{2^n} I_{n,m} \uparrow [0,1] - C$, $N \to \infty$ gilt. Aus der Gleichung,

$$\lambda(\cup_{n=0}^{\infty} \cup_{m=1}^{2^n} I_{n,m}) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{2^n} F(b_{n,m}) - F(a_{n,m}) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{2^n} F_n(b_{n,m}) - F_n(a_{n,m}) = 0$$

folgt $\lambda([0,1] - C) = 0$. Da $F(x) = 0$, $x \leq 0$, und $F(x) = 1$, $x \geq 1$, gelten, folgt $\lambda(\boldsymbol{R} - C) = \lambda(C^c) = 0$. Da $\mu(C) = 0$ gilt, folgt $\lambda \perp \mu$.

40. *Kann ich zeigen, daß eine reelle Funktion einer reellen Variable absolut stetig ist, genau dann wenn sie ein unbestimmtes Integral ihrer Ableitung ist?*

Nimm an, daß f absolut stetig auf $[a,b]$ ist. Nach dem Satz 2.3.2 hat f beschränkte Variation. Nach dem Satz 2.3.3 folgt die Gestalt $f = F - G$, wobei F und G absolut stetige und steigende Funktionen Sind. Es genügt anzunehmen, daß f steigend ist. Sei ν das zu der Verteilungsfunktion f gehörige Maß, und sei μ das Lebesguesche Maß. Nach dem Satz 2.3.1 (mit $G = 0$) gilt $\nu \ll \mu$. Nach dem Radon-Nikodym Satz gibt es eine ν-integrierbare Funktion g, so daß $\nu(A) = \int_A g d\mu$, $\forall A \in \mathcal{B}([a,b])$. Mit $A = [a,x]$ folgt $f(x) - f(a) = \int_a^x g(t)dt$.

Nimm an, daß $f(x) - f(a) = \int_a^x g(t)dt$ gilt. Es genügt anzunehmen, daß $g \geq 0$ gilt. Ansonsten betrachte g^+ und g^- getrennt. Definiere $\nu(A) = \int_A g d\mu$, $A \in \mathcal{B}([a,b])$. Dann gilt $\nu \ll \mu$. Wenn F die zu ν gehörige Verteilungsfunktion ist, ist F absolut stetig nach dem Satz 2.3.1. Dann gilt

$$F(x) - F(a) = \nu(a,x] = \int_a^x g(t)dt = f(x) - f(a).$$

Also ist f absolut stetig.

41. *Kann ich zeigen, daß die $L^p(\Omega)$-Räume $(1 \le p \le \infty)$ Banachräume sind?*

Sei $1 \le p < \infty$. Sei $\{f_n\}$ eine Cauchy-Folge in $L^p(\Omega)$. Wähle n_k, so daß $\|f_n - f_m\|_{L^p(\Omega)} < (\frac{1}{4})^{k+1}$ für $n, m \ge n_k$, und fixiere $g_k = f_{n_k}$. Definiere $A_k = \{x : |g_k(x) - g_{k+1}(x)| \ge 2^{-k}\}$. Von der Chebyshevschen Ungleichung 2.4.9 folgt $\mu(A_k) \le 2^{kp}\|g_k - g_{k+1}\|^p_{L^p(\Omega)} < 2^{-kp}$. Nach dem Borel-Cantelli Lemma 2.2.4 gilt $\mu(\limsup_n A_n) = 0$. Wenn $\hat{x} \notin \limsup_n A_n$, dann gilt $|g_k(\hat{x}) - g_{k+1}(\hat{x})| < 2^{-k}$ für k groß genug, und $\{g_k(\hat{x})\}$ ist eine konvergierende Cauchy Folge. Daher konvergiert $\{g_k\}$ f.ü. gegen einen Limes f. Für $\varepsilon > 0$ wähle N, so daß $\|f_n - f_m\|^p_{L^p(\Omega)} < \varepsilon$ für $n, m \ge N$. Fixiere $n \ge N$ und nimm $m = n_k$, $k \to \infty$. Dann mit Fatou's Lemma 1.6.8 gilt:

$$\begin{aligned} \varepsilon \ &\ge\ \liminf_{k\to\infty} \|f_n - f_{n_k}\|^p_{L^p(\Omega)} \ = \ \liminf_{k\to\infty} \int_\Omega |f_n - f_{n_k}|^p d\mu \\ &\ge\ \int_\Omega \liminf_{k\to\infty} |f_n - g_k|^p d\mu \ = \ \|f_n - f\|^p_{L^p(\Omega)}. \end{aligned}$$

Daher gilt $\|f_n - f\|_{L^p(\Omega)} \to 0$. Da $f - f_n, f_n \in L^p(\Omega)$, gilt $f = (f - f_n) + f_n \in L^p(\Omega)$, und $L^p(\Omega)$ ist vollständig.

Nun sei $p = \infty$. Sei $\{f_n\}$ eine Cauchy-Folge in $L^\infty(\Omega)$. Für ein gegebenes N gilt $\|f_n - f_m\| \le 1/N$ für n, m groß genug. In anderen Wörtern gilt $|f_n(x) - f_m(x)| \le 1/N$ f.ü. oder für $x \notin A_N$, $\mu(A_N) = 0$. Wenn $A = \cup_{N=1}^\infty A_N$, dann gilt $\mu(A) = 0$, und $f_n - f_m$ konvergiert gleichmäßig gegen 0 auf A^c. Dann für jedes $\hat{x} \in A^c$ konvergiert $f_n(\hat{x})$ gegen einen Limes $f(\hat{x})$, und die Konvergenz ist gleichmäßig auf A^c. Definiere $f(x) = 0$ für $x \in A$. Es folgt, $f \in L^\infty(\Omega)$ und $\|f - f_n\|_{L^\infty(\Omega)} \to 0$.

42. *Kann ich zeigen, daß $C_0^\infty(\Omega)$ dicht in $L^p(\Omega)$ $(1 \le p < \infty)$ ist?*

Sei $f \in L^p(\Omega)$ mit $1 \le p < \infty$. Nach dem Satz 2.4.13 gibt es eine einfache Funktion h, so daß $\|f - h\|_{L^p(\Omega)} < \varepsilon/2$ gilt für beliebiges $\varepsilon > 0$. Wenn es gezeigt werden kann, daß es ein $g \in C_0^\infty(\Omega)$ gibt, so daß $\|h - g\|_{L^p(\Omega)} < \varepsilon/2$ gilt, dann folgt $\|f - g\|_{L^p(\Omega)} < \varepsilon$.

Nimm an, daß es gezeigt werden kann, es gibt ein $g_A \in C_0^\infty(\Omega)$, so daß $\|I_A - g_A\| < \delta$ für beliebiges $\delta > 0$. Wenn $h = \sum_{n=1}^N a_n I_{A_n}$ und $g = \sum_{n=1}^N a_n g_{A_n}$ gelten, wobei $\|I_{A_n} - g_{A_n}\|_{L^p(\Omega)} < \varepsilon/(2N|a_n|)$ gilt, dann folgt:

$$\|h - g\|_{L^p(\Omega)} = \|\sum_{n=1}^N a_n(I_{A_n} - g_{A_n})\|_{L^p(\Omega)} \le \sum_{n=1}^N |a_n|\|I_{A_n} - g_{A_n}\|_{L^p(\Omega)} < \varepsilon/2.$$

Also kann es angenommen werden, daß $h = I_A$ gilt.

Da $h = I_A \in L^p(\Omega)$ gilt, folgt $\mu(A) < \infty$. Nach den Beispielen 46 und 47 gibt es eine kompakte Menge K und eine offene Menge V so daß $K \subset A \subset V$ und $\mu(V - K) < \varepsilon/4$ gelten. Gesucht wird eine Funktion g, so daß $g = 1$ auf K, $g = 0$ auf V^c, und $0 \le g \le 1$ auf $V - K$ gelten. Dann folgt $\|h - g\|_{L^p(\Omega)} \le \|I_A - I_K\|_{L^p(\Omega)} + \|I_K - g\|_{L^p(\Omega)} \le 2\|I_V - I_K\|_{L^p(\Omega)} = 2\mu(V - K) < \varepsilon/2$.

Für jedes x in der offenen Menge V gibt es ein $r(x)$, so daß $B(x, 4r(x)) \subset V$. Von der Überdeckung $K \subset \cup_{x\in K} B(x, r(x))$ gibt es eine endliche Überdeckung

$$K \subset \cup_{n=1}^N B(x_n, r_n),$$

da K kompakt ist. Für jedes y in der offenen Menge

$$S = \cup_{n=1}^N B(x_n, 4r_n) - \cup_{n=1}^N \bar{B}(x_n, r_n)$$

gibt es ein $\rho(y)$, so daß $B(y, \rho(y)) \subset S \subset V$. Definiere die kompakte Menge

$$C = \cup_{n=1}^N \bar{B}(x_n, 3r_n) - \cup_{n=1}^N B(x_n, 2r_n).$$

Von der Überdeckung $C \subset \cup_{y \in C} B(y, \rho(y))$ gibt es eine endliche Überdeckung

$$C \subset \cup_{m=1}^{M} B(y_n, \rho_m),$$

da C kompakt ist. Definiere

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{\sum_{n=1}^{N} \psi_{2r_n}(x - x_n)}{\sum_{n=1}^{N} \psi_{2r_n}(x - x_n) + \sum_{m=1}^{M} \psi_{\rho_m}(x - y_m)}, & x \in \cup_{n=1}^{N} \bar{B}(x_n, 2r_n) \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

wobei

$$\psi_\varepsilon(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{c_\varepsilon} \exp\left[\dfrac{1}{x^2 - \varepsilon^2}\right], & |x| < \varepsilon, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases} \qquad c_\varepsilon = \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \exp\left[\frac{1}{x^2 - \varepsilon^2}\right] dx.$$

Fixiere $x \in \cup_{n=1}^{N} \bar{B}(x_n, r_n)$. Dann gilt auch $x \in K$. Aus

$$\cup_{m=1}^{M} B(y_m, \rho_m) \subset S = \cup_{n=1}^{N} B(x_n, 4r_n) - \cup_{n=1}^{N} \bar{B}(x_n, r_n)$$

folgen $\cup_{m=1}^{M} B(y_m, \rho_m) \not\subset \cup_{n=1}^{N} \bar{B}(x_n, r_n)$ und $x \notin \cup_{m=1}^{M} B(y_m, \rho_m)$. Daher gilt $\psi_{\rho_m}(x - y_m) = 0$, $m = 1, \ldots, M$. Da es irgendein $\hat{n}$ gibt, so daß $x \in \bar{B}(x_{\hat{n}}, r_{\hat{n}})$ und $\psi_{2r_{\hat{n}}}(x - x_{\hat{n}}) \neq 0$ gelten, folgt $g(x) = 1$.

Fixiere $x \in \cup_{n=1}^{N} B(x_n, 2r_n) - \cup_{n=1}^{N} \bar{B}(x_n, r_n)$. Dann gibt es ein $\hat{n}$, so daß $x \in B(x_{\hat{n}}, 2r_{\hat{n}})$ und $\psi_{2r_{\hat{n}}}(x - x_{\hat{n}}) \neq 0$ gelten. Daher ist $g(x)$ wohl definiert.

Fixiere $x \in \partial[\cup_{n=1}^{N} B(x_n, 2r_n)]$. Dann gilt auch $x \in C$, und es gibt irgendein $\hat{m}$, so daß $x \in B(y_{\hat{m}}, \rho_{\hat{m}})$ und $\psi_{\rho_{\hat{m}}}(x - y_{\hat{m}}) \neq 0$ gelten. Daher ist $g(x)$ wohl definiert. Anderseits gilt $x \in B(x_n, 2r_n)$ für kein n, und daher gilt $\psi_{2r_n}^{(k)}(x - x_n) = 0$, $n = 1, \ldots, N$, $\forall k \in \boldsymbol{N}_0$. Also gilt $g^{(k)}(x) = 0$, $\forall k \in \boldsymbol{N}_0$.

43. *Habe ich ein Beispiel einer Funktion χ, wobei $\|\chi - \phi_n\|_{L^\infty(\Omega)} \to 0$ für keine Folge $\{\phi_n\} \subset C^0(\Omega)$ gilt?*

Nimm an, daß $\|\chi - \phi_n\|_{L^\infty(\Omega)} \to 0$ gilt für eine Folge $\{\phi_n\} \subset C^0(\Omega)$ und eine Funktion χ. Dann gilt:

$$\|\phi_n - \phi_m\|_{C^0(\Omega)} = \|\phi_n - \phi_m\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \|\phi_n - \chi\|_{L^\infty(\Omega)} + \|\phi_m - \chi\|_{L^\infty(\Omega)} \overset{n,m \to \infty}{\longrightarrow} 0.$$

Das heisst, $\{\phi_n\}$ ist eine Cauchy-Folge in C^0. Wegen der Vollständigkeit des Banachraumes, ist der Limes stetig. Daher gilt $\|\chi - \phi_n\|_{L^\infty(\Omega)} \to 0$ nicht, wenn χ unstetig ist.

44. *Habe ich ein Beispiel einer Folge $\{f_n\}$ und einer Funktion f, wobei $f_n \xrightarrow{\mu} f$ und $f_n \xrightarrow{L^p} f$ gelten, aber $f_n \longrightarrow f$ f.ü. gilt nicht? Kann ich eine Teilfolge $\{f_{n'}\}$ finden, wobei $f_{n'} \longrightarrow f$ f.ü. $[\mu]$ (Lebesguesches Maß) gilt?*

Auf $[0, 1]$ definiere $f = 0$ und

$$f_{n,m}(x) = \begin{cases} 1, & (m-1)/n < x \leq m/n, \quad m = 1, \ldots, n \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann für $p \in (0, \infty)$ gilt

$$\|f_{n,m} - f\|_{L^p}^p = \int_{(m-1)/n}^{m/n} d\mu = 1/n \overset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0.$$

Nach dem Satz 2.5.1 gilt $f_{n,m} \stackrel{\mu}{\longrightarrow} f$. Jedoch für jedes $\hat{x} \in (0,1]$ kommen 1 und 0 in der Folge $\{f_{n,m}(\hat{x})\}$ unendlich oft vor, und daher konvergiert die Folge punktweise nur in $x = 0$. Anderseits gilt $f_{n,1}(\hat{x}) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} f(\hat{x}) = 0$, $\forall \hat{x} \in (0,1]$.

45. *Kann ich zeigen, daß die Sobolevräume $W^{m,p}(\Omega)$ $(1 \leq p \leq \infty, m \in \boldsymbol{N}_0)$ Banachräume sind?*

Sei $\{u_n\}$ eine Cauchy-Folge in $W^{m,p}(\Omega)$. Dann ist $\{D^\alpha u_n\}$ eine Cauchy-Folge in $L^p(\Omega)$ für $0 \leq |\alpha| \leq m$. Nach der Vollständigkeit von $L^p(\Omega)$ gibt es ein $u_\alpha \in L^p(\Omega)$, $0 \leq |\alpha| \leq m$, so daß $D^\alpha u_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} u_\alpha$. Nun für $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ und $0 \leq |\alpha| \leq m$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} \langle u_\alpha - D^\alpha u_n, \phi \rangle_{L^2(\Omega)} \leq \lim_{n\to\infty} \|u_\alpha - D^\alpha u_n\|_{L^p(\Omega)} \cdot \|\phi\|_{L^q(\Omega)} = 0$$

wobei die Höldersche Ungleichung verwendet wurde. Sei $u = u_\alpha$ wenn $|\alpha| = 0$ gilt. Aus der obigen Abschätzung und der Inklusion $u_n \in W^{m,p}(\Omega)$ folgt:

$$\langle u, D^\alpha \psi \rangle_{L^2(\Omega)} = \lim_{n\to\infty} \langle u_n, D^\alpha \psi \rangle_{L^2(\Omega)} = \lim_{n\to\infty} (-1)^{|\alpha|} \langle D^\alpha u_n, \psi \rangle_{L^2(\Omega)} = (-1)^{|\alpha|} \langle u_\alpha, \psi \rangle_{L^2(\Omega)}$$

für $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$ und $0 \leq |\alpha| \leq m$. (Bemerke, daß $\psi \in C_0^\infty(\Omega) \Rightarrow D^\alpha \psi \in C_0^\infty(\Omega)$.) Nach der Definition der schwachen Ableitung, folgt $D^\alpha u = u_\alpha \in L^p(\Omega)$. Daher gilt $u \in W^{m,p}(\Omega)$, und $W^{m,p}(\Omega)$ ist vollständig.