Eine steigende konvergierende Folge von einfachen Funktionen

Sei $h(x)$ eine nicht negative Borel messbare Funktion und definiere:

$$h_n(x) = \begin{cases} \dfrac{k-1}{2^n}, & \dfrac{k-1}{2^n} \leq h(x) < \dfrac{k}{2^n}, \qquad k = 1, \ldots, n2^n, \qquad k = 1 + [\![2^n h(x)]\!] \\ \\ n, & n \leq h(x). \end{cases}$$

Es wird zuerst gezeigt, daß $0 \leq h_n(x) \leq h_{n+1}(x) \leq h(x)$ gilt. Nach der Definition der einfachen Funktionen ist es klar, daß $0 \leq h_n(x) \leq h(x)$, $\forall n$ gilt. Für die Ungleichung $h_n(x) \leq h_{n+1}(x)$ gibt es die folgenden Fälle.

- $h(x) \geq n+1$.

  Dann gilt $h_{n+1}(x) = n+1 > n = h_n(x)$.

- $n+1 > h(x) \geq n$.

  Dann gilt:

$$2^{n+1}h(x) \geq n2^{n+1} \quad \Rightarrow \quad [\![2^{n+1}h(x)]\!] \geq n2^{n+1} \quad \Rightarrow \quad \frac{[\![2^{n+1}h(x)]\!]}{2^{n+1}} \geq n.$$

  Nach der Definition von $h_n(x)$ gilt $h_n(x) = n \leq h(x)$. Nach der letzten Ungleichung und der Defintion von $h_{n+1}(x)$ gilt:

$$h_{n+1}(x) = \frac{[\![2^{n+1}h(x)]\!]}{2^{n+1}} \geq n = h_n(x).$$

- $(m-1)/2^{n+1} \leq h(x) < m/2^{n+1}$, $m = 1 + [\![2^{n+1}h(x)]\!]$ zwischen 1 und $n2^{n+1}$.

  Da m nicht größer als $(n+1)2^{n+1}$ ist, gilt:

$$h_{n+1}(x) = \frac{m-1}{2^{n+1}}.$$

  Nimm an, daß m gerade ist. Dann gilt:

$$\frac{(m-1)/2}{2^n} \leq h(x) < \frac{m/2}{2^n} \quad \Rightarrow \quad \frac{m/2-1}{2^n} \leq h(x) < \frac{m/2}{2^n}.$$

  Da $m/2$ für gerade m höchstens $n2^n$ ist, liefert die letzte Ungleichung den Wert von $h_n(x)$:

$$h_n(x) = \frac{m/2-1}{2^n} = \frac{m-2}{2^{n+1}} < \frac{m-1}{2^{n+1}} = h_{n+1}(x).$$

  Nimm an, daß m ungerade ist. Dann gilt:

$$\frac{(m-1)/2}{2^n} \leq h(x) < \frac{m/2}{2^n} \quad \Rightarrow \quad \frac{(m-1)/2}{2^n} \leq h(x) < \frac{(m-1)/2+1}{2^n}.$$

  Da $(m-1)/2+1$ für ungerade m höchstens $n2^n$ ist, liefert die letzte Ungleichung den Wert von $h_n(x)$:

$$h_n(x) = \frac{(m-1)/2}{2^n} = \frac{m-1}{2^{n+1}} = h_{n+1}(x).$$

Nun ist es zu zeigen, daß $h_n(x)$ punktweise gegen $h(x)$ konvergiert. Wenn $h(x_0) = \infty$ konvergiert $h_n(x_0) = n$ natürlich gegen $h(x_0)$. Nimm an, daß $h(x_0) < \infty$ gilt. Für $n > h(x_0)$ und $k = 1 + [\![2^n h(x)]\!]$ gilt

$$|h(x_0) - h_n(x_0)| \leq \frac{k}{2^n} - \frac{k-1}{2^n} = \frac{1}{2^n} \to 0$$

und daraus folgt punktweise Konvergenz.