Proseminar Maß und Integral im SS 03 – Übungsbeispiele

1. Zeige, daß eine stetige Funktion Riemann-integrierbar ist.

2. Zeige die Konvergenz der Trapez-Regel gegen das Riemann-Integral für Riemann-integrierbare Funktionen.

3. Seien $f \in C^2([0,1])$ und $f_n =$ Trapez-Approximation von f auf den Zellen $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \ldots, n$, wobei $x_i = ih$, $i = 0, \ldots, n$, und $h = 1/n$. Beweise die Fehler-Abschätzung:

$$\left| \int_0^1 f(x)dx - \int_0^1 f_n(x)dx \right| \leq \frac{h^2}{12} \|f''\|_\infty.$$

   Hinweis: Teile das Intervall $[0,1]$ in den Zellen, finde ein v mit $v'' = 1$ und

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} v''(x)f(x)dx - \int_{x_{i-1}}^{x_i} f_n(x)dx = \int_{x_{i-1}}^{x_i} v(x)f''(x)dx$$

   und schätze das letzte Integral ab.

4. Sei $\{f_n\}$ eine Folge von Riemann-integrierbaren Funktionen die gegen eine Riemann-integrierbare Funktion f gleichmäßig konvergieren. Zeige, daß die Integrale von den f_n gegen das Integral von f konvergieren.

5. Zeige, daß die folgende Gleichung für alle t gilt,

$$\frac{d}{dt} \int_0^t f(s)ds = f(t)$$

   wenn f stetig ist.

6. Zeige, dass $\psi_\varepsilon(x) \in C_0^\infty(\boldsymbol{R})$ gilt:

$$\psi_\varepsilon(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{c_\varepsilon} \exp\left[\dfrac{1}{x^2 - \varepsilon^2}\right], & |x| < \varepsilon, \\ 0, & \text{sonst}, \end{cases} \qquad c_\varepsilon = \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \exp\left[\frac{1}{x^2 - \varepsilon^2}\right] dx.$$

7. Zeige die folgende Konvergenz für beliebiges $\phi \in C^0([-1,1])$:

$$\int_{-1}^{+1} \phi(x)\psi_\varepsilon(x)dx \xrightarrow{\varepsilon \to 0} \phi(0).$$

8. Leite ein gleichmäßiges Wahrscheinlichkeitsmaß $P_0(\omega)$ auf dem Diskontinuum $\Omega_0 = \{0,1\}$ her. Leite eine gleichmäßige Wahrscheinlichkeitsdichte $P_1'(\omega)$ auf dem Kontinuum $\Omega_1 = [0,1]$ her. Pass auf die Bedingungen: $P_0(\Omega_0) = 1 = P_1(\Omega_1)$. Leite eine Wahrscheinlichkeitsdichte $P_\varepsilon'(\omega)$ auf dem Kontinuum Ω_1 her, so daß die Wahrscheinlichkeiten in Ω_0 konzentiert werden und so daß die Erwartungswerte so konvergieren:

$$\int_{\Omega_1} v(\omega)dP_\varepsilon(\omega) \xrightarrow{\varepsilon \to 0} \sum_{\omega=0}^{1} v(\omega)P_0(\omega).$$

9. Zeige, daß $u_0(x) = \frac{1}{2}(1 - |x|)$ die folgende Gleichung erfüllt:

$$-\int_{-1}^{+1} \phi''(x)u_0(x)dx = \phi(0) \qquad \text{für alle } \phi \in C_0^\infty([0,1]).$$

10. Seien $\mathcal{C} = \{A_1, A_2\} \subset \Omega$, $\mathcal{F} = \sigma(\mathcal{C})$, und $\mathcal{S}$ die endlichen Vereinigungen von den Mengen $\{B_n \cap B_m : B_n = A_n \text{ oder } A_n^c\}$. Zeige, daß $\mathcal{S} \subset \mathcal{F}$ gilt. Zeige, daß $\mathcal{S}$ eine σ-Algebra ist. Beschließe, daß $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{S}$ gilt.

11. Seien $A \subset \Omega$ und $\mathcal{C}$ eine Klasse von Mengen in Ω. Definiere $\mathcal{C} \cap A = \{B \cap A : B \in \mathcal{C}\}$ und zeige, daß $\sigma_A(\mathcal{C} \cap A) = \sigma_\Omega(\mathcal{C}) \cap A$ gilt. Hinweise: Zeige $\sigma_A(\mathcal{C} \cap A) \subset \sigma_\Omega(\mathcal{C}) \cap A$. Zeige $\sigma_A(\mathcal{C} \cap A) \supset \sigma_\Omega(\mathcal{C}) \cap A$ mit dem Brave-Mengen-Prinzip.

12. Seien $\{x_n\} \subset \Omega$, $\{p_n\} \subset \boldsymbol{R}^+ = [0, \infty)$ und $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ (die *Potenzmenge* von Ω). Definiere

$$\mu(A) = \sum_{x_i \in A} p_i, \qquad A \subset \Omega$$

und zeige, daß μ ein Maß ist. Wenn $p_i = 1$ gilt, ist μ ein *Zählmaß*.

13. Zeige induktiv, daß eine Vereinigung als eine disjunkte Vereinigung dargestellt werden kann:

$$\bigcup_{n=1}^N A_n = \bigcup_{n=1}^N B_n, \qquad B_1 = A_1, \quad B_n = \bigcap_{m=1}^{n-1} A_m^c \bigcap A_n, \quad n \geq 2, \quad B_n \cap B_m = \emptyset.$$

14. Sei $\mathcal{F}_0$ die Algebra über $\boldsymbol{R}$ von endlichen disjunkten Vereinigungen aus $\{(a, b], (a, \infty) \text{ oder } \emptyset : -\infty \leq a < b < \infty\}$. Definiere λ_0 auf $\mathcal{F}_0$ wie folgt:

$$\lambda_0(-\infty, a] = a, \quad a \in \boldsymbol{R}, \qquad \lambda_0(a, b] = b - a, \quad a, b \in \boldsymbol{R}, \ a < b,$$

$$\lambda_0(b, \infty) = -b, \quad b \in \boldsymbol{R}, \qquad \lambda_0(\boldsymbol{R}) = 0,$$

$$\lambda_0\left(\bigcup_{n=1}^N I_n\right) = \sum_{n=1}^N \lambda_0(I_n), \quad I_n \cap I_m = \emptyset, \quad \{I_n\} \subset \{(a, b] \text{ oder } (a, \infty) : -\infty \leq a < b < \infty\}.$$

Zeige, (a) daß λ_0 auf $\mathcal{F}_0$ endlich additiv aber nicht abzählbar additiv ist, und (b) daß λ_0 auf $\mathcal{F}_0$ endlich aber nicht beschränkt ist.

15. Ein *äußeres Maß* $\kappa : \mathcal{P}(\Omega) \to \bar{\boldsymbol{R}}$ erfüllt:

 (a) $\kappa(\emptyset) = 0$,
 (b) $A \subset B \Rightarrow \kappa(A) \leq \kappa(B)$ (Monotonität),
 (c) $\kappa(\cup_{n=1}^\infty A_n) \leq \sum_{n=1}^\infty \kappa(A_n)$ (abzählbare Subadditivität).

 Zeige die folgenden.

 a. Sei κ ein äußeres Maß auf Ω. $E \subset \Omega$ heisst κ-messbar genau wenn:

$$\kappa(A) = \kappa(A \cap E) + \kappa(A \cap E^c), \qquad \forall A \subset \Omega.$$

 Wenn $\mathcal{M}$ die Klasse aller κ-messbaren Mengen ist, zeige daß $\mathcal{M}$ eine σ-Algebra ist, und daß die folgende Gleichung gilt:

$$\kappa(A \cap E) = \sum_{n=1}^\infty \kappa(A \cap E_n), \quad E_n \cap E_m = \emptyset, \quad \{E_n\} \subset \mathcal{M}, \quad \bigcup_{n=1}^\infty E_n = E, \quad A \subset \Omega.$$

 Insbesondere ist κ ein Maß. Hinweise: Wegen der Subadditivität eines äußeren Maßes mag das "=" in der Definition der κ-Messbarkeit mit "$\geq$" ersetzt werden. Verwende die Definition der κ-Messbarkeit und zeige, daß $\mathcal{M}$ eine Algebra ist, und daß die letzte Gleichung für endliche Folgen gilt. Mit Mengen $\{E_n\} \subset \mathcal{M}$, $E_n \cap E_m = \emptyset$, definiere $F_N = \cup_{n=1}^N E_n$, $F_N \uparrow E$, zeige die Ungleichung:

$$\kappa(A) \geq \kappa(A \cap F_N) + \kappa(A \cap E^c) = \sum_{n=1}^N \kappa(A \cap E_n) + \kappa(A \cap E^c)$$

 und laß $N \to \infty$.

b. Sei μ_0 ein Inhalt auf eine Algebra $\mathcal{F}_0 \subset \Omega$. Definiere:

$$\mu^*(A) = \inf\left\{\sum_n \mu_0(E_n) : A \subset \bigcup_n E_n,\ E_n \in \mathcal{F}_0\right\}, \qquad\qquad A \subset \Omega.$$

Zeige, daß μ^* ein äußeres Maß auf Ω ist, und daß $\mu^* = \mu_0$ auf $\mathcal{F}_0$ gilt.

c. Wenn $\mathcal{M}$ die Klasse von μ^*-messbaren Mengen ist, zeige daß $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{M}$ gilt. Daher mit (a) und (b) mag μ_0 zur $\sigma(\mathcal{F}_0)$ ausgedehnt werden.

d. Wenn μ_0 auf $\mathcal{F}_0$ σ-endlich ist, zeige daß $(\Omega, \mathcal{M}, \mu^*)$ die Vervollständigung von $(\Omega, \sigma(\mathcal{F}_0), \mu^*)$ ist.

16. Seien $\Omega = \boldsymbol{Q}$ und $\mathcal{F} = \sigma(\mathcal{F}_0)$, wobei $\mathcal{F}_0$ die Algebra über Ω von endlichen disjunkten Vereinigungen aus $\{(a,b], (a,\infty)$ oder $\emptyset : -\infty \le a < b < \infty,\quad a, b \in \boldsymbol{Q}\}$ ist. Zeige die folgenden.

   a. $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$.

   b. Wenn μ das Zählmaß auf Ω ist, ist μ σ-endlich auf $\mathcal{F}$ aber nicht auf $\mathcal{F}_0$.

   c. Es gibt Mengen $A \in \mathcal{F}$ mit endlichen Maß, die mit Mengen in $\mathcal{F}_0$ nicht approximiert werden können, d.h. es gibt keine Folge $\{A_n\} \subset \mathcal{F}_0$ mit $\mu(A \,\Delta\, A_n) \to 0$.

   d. Wenn $\lambda = 2\mu$ gilt, gilt $\lambda = \mu$ auf $\mathcal{F}_0$ aber nicht auf $\mathcal{F}$.

   Siehe Sätze 1.3.10 und 1.3.11.

17. Sei Ω abzählbar unendlich und definiere $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$. Definiere $\mu_0(A) = 0$ wenn A endlich ist und $\mu_0(A) = \infty$ wenn A unendlich ist.

   a. Zeige, μ_0 ist endlich additiv aber nicht abzählbar additiv.

   b. Zeige, Ω ist ein Limes einer steigenden Folge $\{A_n\}$ mit $\mu(A_n) = 0$ und $\mu_0(\Omega) = \infty$.

   Siehe Sätze 1.2.7, 1.2.8 und 1.3.10.

18. Sei μ das Zählmaß auf Ω, wobei Ω unendlich ist. Zeige, es gibt eine Folge $\{A_n\}$ mit $A_n \downarrow \emptyset$ und $\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) \neq 0$. Siehe Sätze 1.2.7 und 1.2.8.

19. Seien Ω abzählbar unendlich und $\mathcal{F}_0$ die Algebra mit endlichen Teilmengen aus Ω und ihren Komplementen. Definiere $\mu_0(A) = 0$ wenn A endlich ist und $\mu_0(A) = 1$ wenn A^c endlich ist.

   a. Zeige, μ_0 ist endlich additiv aber nicht abzählbar additiv auf $\mathcal{F}_0$.

   b. Zeige, Ω ist ein Limes einer steigenden Folge $\{A_n\} \subset \mathcal{F}_0$ mit $\mu(A_n) = 0$ und $\mu_0(\Omega) = 1$.

   Siehe Sätze 1.2.7, 1.2.8 und 1.3.10.

20. Sei μ_0 ein Inhalt auf der Algebra $\mathcal{F}_0$. Wenn $\{A_n\} \subset \mathcal{F}_0$ disjunkt sind, und $\cup_{n=1}^\infty A_n \in \mathcal{F}_0$ gilt, zeige:

$$\mu_0(\bigcup_{n=1}^\infty A_n) \ge \sum_{n=1}^\infty \mu_0(A_n).$$

21. Sei μ ein endliches Maß auf einer σ-Algebra $\mathcal{F}$. Wenn $\{A_n\} \subset \mathcal{F}$ und $\lim_{n\to\infty} A_n = A$ gelten, d.h.

$$\bigcup_{n=1}^\infty \bigcap_{k=n}^\infty A_k = \liminf_{n\to\infty} A_n = A = \limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^\infty \bigcup_{k=n}^\infty A_k$$

zeige, daß $\mu(A) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$ gilt. Siehe Sätze 1.2.7 und 1.2.8.

22. Seien $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ ein Maßraum und $\mathcal{F}_\mu$ die Vervollständigung bezüglich μ. Für $A \subset \Omega$ definiere:

$$\mu_o(A) = \sup\{\mu(B) : B \in \mathcal{F}, B \subset A\} \qquad \text{und} \qquad \mu^o(A) = \inf\{\mu(B) : B \in \mathcal{F}, B \supset A\}.$$

Für $A \in \mathcal{F}_\mu$ zeige, daß $\mu_o(A) = \mu(A) = \mu^o(A)$ gilt. Anderseits wenn $\mu_o(A) = \mu(A) = \mu^o(A)$ und $\mu(A) < \infty$ gelten, zeige, daß $A \in \mathcal{F}_\mu$ gilt.

23. Konstruiere eine Verteilungsfunktion F mit entsprechendem Lebesgue-Stieltjes Maß $\mu(a,b] = F(a,b]$, wofür $\mu(\boldsymbol{R} - S) = 0$, $S = \boldsymbol{Q} \cap [0,1]$, $F(-\infty) = 0$ und $F(+\infty) = 1$ gelten.

24. Sei F die Verteilungsfunktion:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < -1 \\ 1+x, & -1 \leq x < 0 \\ 2+x^2, & 0 \leq x < 2 \\ 9, & x \geq 2 \end{cases}$$

Wenn μ das entsprechende Lebesgue-Stieltjes Maß ist, berechne das Maß der folgenden Mengen:

a. $\{2\}$,
b. $[-\frac{1}{2}, 3)$,
c. $(-1, 0] \cup (1, 2)$,
d. $[0, \frac{1}{2}) \cup (1, 2]$,
e. $\{x : |x| + 2x^2 > 1\}$.

25. Sei μ ein Lebesgue-Stieltjes Maß auf $\boldsymbol{R}$ mit einer stetigen entsprechenden Verteilungsfunktion.

a. Wenn $A \subset \boldsymbol{R}$ abzählbar ist, zeige, daß $\mu(A) = 0$ gilt.
b. Wenn $\mu(A) > 0$ gilt, muss A ein offenes Intervall enthalten?
c. Wenn $\mu(A) > 0$ und $\mu(\boldsymbol{R} - A) = 0$ gelten, muss A dicht in $\boldsymbol{R}$ sein?
d. Gibt es in (b) oder (c) einen Unterschied, wenn μ das Lebesguesche Maß ist?

26. Wenn $B \in \bar{\mathcal{B}}(\boldsymbol{R}^n)$, $a \in \boldsymbol{R}^n$ gelten, verwende das Brave-Mengen-Prinzip um zu zeigen, daß $a+B \in \bar{\mathcal{B}}(\boldsymbol{R}^n)$ und $\mu(a+B) = \mu(B)$ gelten, wobei μ das Lebesguesche Maß ist, d.h. Lebesguesches Maß ist Translation-invariant.

27. *Eine nicht Lebesgue messbare Menge.* Nenne 2 Zahlen x und y äquivalent genau dann wenn $x-y$ rational ist. Wähle einen Vertreter aus jeder Äquivalenz-Klasse $B_x = \{y : y - x \text{ rational}\}$, um eine Menge A zu konstruieren. Nimm an, daß die Vertreter gewählt werden, so daß $A \subset [0,1]$ gilt. Zeige die folgenden.

a. Wenn r und s verschiedene rationalen Zahlen sind, gilt $(r + A) \cap (s + A) = \emptyset$. Weiterhin gilt $\boldsymbol{R} = \cup\{r + A : r \text{ rational}\}$.
b. Wenn A Lebesgue messbar ist (also nach dem letzten Beispiel ist $r + A$ Lebesgue messbar), dann gilt $\mu(r + A) = 0$ für alle rationalen Zahlen, wobei μ das Lebesguesche Maß ist. Beschließe, daß A nicht Lebesgue messbar sein kann.

Die einzigen benötigten Eigenschaften von Lebesgueschen Maß sind Translation-invarianz und Endlichkeit auf beschränkten Intervallen. Deshalb gilt das Ergebnis für alle solchen Maßen (neben $\mu \equiv 0$).

28. Zeige, daß die Cantorsche Menge C unabzählbar ist, und daß $\mu(C) = 0$ gilt.

29. Gib ein Beispiel einer Funktion $F : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}$, wobei F rechtseitig stetig und steigend in jeder Variable ist, aber F ist keine Verteilungsfunktion.

30. Wenn $c = \text{Kard}(\boldsymbol{R})$ gilt, zeige, daß $c = \text{Kard}(\mathcal{B}(\boldsymbol{R}))$ und $2^c = \text{Kard}(\bar{\mathcal{B}}(\boldsymbol{R}))$ gelten.

31. Seien $f : \Omega \to \Omega'$ und $\mathcal{C}$ eine Klasse von Teilmengen aus Ω'. Verwende das Brave-Mengen-Prinzip um zu zeigen, daß
$$\sigma(f^{-1}(\mathcal{C})) = f^{-1}(\sigma(\mathcal{C}))$$
gilt, wobei $f^{-1}(\mathcal{C}) = \{f^{-1}(A) : A \in \mathcal{C}\}$ so definiert wird.

32. Mit dem 11.Beispiel zeige, daß $\mathcal{B}(\boldsymbol{R}) = \mathcal{B}(\boldsymbol{R}^2) \cap \boldsymbol{R}$ gilt. Sei $A \subset \boldsymbol{R}$ die nicht Lebesgue messbare Menge im 27.Beispiel. Zeige, daß $A \subset \boldsymbol{R}^2$ Lebesgue messbar aber nicht Borel messbar ist.

33. Wie viele Borel messbare Funktionen von $\boldsymbol{R}^n$ in $\boldsymbol{R}^k$ gibt es?

34. Zeige, daß die Summe und das Produkt von zwei einfachen Funktionen einfache Funktionen sind. Zeige, daß $\chi_{A\cap B} = \chi_A \cdot \chi_B$, $\chi_{A\cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_A \cdot \chi_B$, und $\chi_{A^c} = 1 - \chi_A$ gelten.

35. Eine Eigenschaft gilt *fast überall* (f.ü.), wenn die Menge worauf sie nicht gilt eine null Maß Menge ist. Zeige, daß f eine Lebesgue messbare Funktion ist, wenn $f = g$ f.ü. für eine Borel messbare Funktion g gilt.

36. Seien $f_n : (\Omega, \mathcal{F}) \to (\bar{\boldsymbol{R}}, \mathcal{B}(\bar{\boldsymbol{R}}))$, $n \in \boldsymbol{N}$. Zeige, daß die folgenden Funktionen Borel messbar sind: $\sup_n\{f_n\}$, $\inf_n\{f_n\}$, $\limsup_n f_n$, und $\liminf_n f_n$.

37. Beweise Satz 1.5.9.

38. Konstruiere eine nicht messbare Funktion f, mit der die Menge $\{x : f(x) = c\}$ für jedes $c \in \boldsymbol{R}$ messbar ist.

39. Seien $f, g : (\Omega, \mathcal{F}) \to (\bar{\boldsymbol{R}}, \mathcal{B}(\bar{\boldsymbol{R}}))$, $A \in \mathcal{F}$ und definiere
$$h(x) = \begin{cases} f(x), & x \in A \\ g(x), & x \in A^c. \end{cases}$$
Zeige, daß h Borel messbar ist.

40. Verwende Sätze 1.6.2 und 1.6.5 und zeige, wenn $\{h_n\}$ eine steigende Folge von Borel messbaren nicht negativen Funktionen sind, die gegen eine Borel messbare Funktion h fast überall konvergieren, dann gilt $\int_\Omega h_n d\mu \to \int_\Omega h d\mu$.

41. Verwende Sätze 1.5.9 und zeige, wenn g und h Borel messbare Funktionen sind und $g \geq h$ fast überall gilt, dann gilt $\int_\Omega g d\mu \geq \int_\Omega h d\mu$.

42. Sei $f(x,y) : (c,d) \times (a,b) \to \boldsymbol{R}$ eine Borel messbare Funktion von $y \in (a,b)$ für jedes $x \in (c,d)$. Nimm an, daß f und eine Borel messbare und Lebesgue integrierbare Funktion $g(y) : (a,b) \to \boldsymbol{R}$ die Ungleichung $|f(x,y)| \leq g(y)$, $\forall (x,y) \in (c,d) \times (a,b)$ erfüllen. Wenn $x_0 \in (c,d)$ gilt und $\lim_{x\to x_0} f(x,y)$, $\forall y \in (a,b)$ existiert, zeige:
$$\lim_{x\to x_0} \int_a^b f(x,y)dy = \int_a^b \left[\lim_{x\to x_0} f(x,y)\right] dy.$$

43. Sei $\{f_n\}$ eine Folge von Borel messbaren Funktionen auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$. Wenn $\sum_{n=1}^\infty \int_\Omega |f_n| d\mu < \infty$ gilt, zeige: $\sum_{n=1}^\infty f_n$ konvergiert f.ü. $[\mu]$ gegen eine endlich wertige Funktion, und
$$\int_\Omega \left(\sum_{n=1}^\infty f_n\right) d\mu = \sum_{n=1}^\infty \int_\Omega f_n d\mu.$$

44. Sei $f(x,y) : (c,d) \times (a,b) \to \boldsymbol{R}$ eine Borel messbare Funktion von $y \in (a,b)$ für jedes $x \in (c,d)$. Nimm an, $f(x,y)$ ist Lebesgue integrierbar über $a < y < b$ für jedes $x \in (c,d)$. Nimm an, daß die partielle Ableitung $f_x(x,y)$, $\forall (x,y) \in (c,d) \times (a,b)$ existiert, und daß $f_x(x,y)$ und eine Borel messbare und Lebesgue integrierbare Funktion $h(y) : (a,b) \to \boldsymbol{R}$ die Ungleichung $|f_x(x,y)| \leq h(y)$, $\forall (x,y) \in (c,d) \times (a,b)$ erfüllen. Zeige: $f_x(x,y)$ ist eine Borel messbare Funktion von $y \in (a,b)$ für jedes $x \in (c,d)$, $\frac{d}{dx} \int_a^b f(x,y)dy$ existiert $\forall x \in (c,d)$, und

$$\frac{d}{dx} \int_a^b f(x,y)dy = \int_a^b f_x(x,y)dy.$$

45. Seien $a \in \boldsymbol{R}$ und $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ eine Borel messbare Funktion, und zeige, daß die folgende Gleichung gilt,

$$\int_{\boldsymbol{R}} f(x)dx = \int_{\boldsymbol{R}} f(x-a)dx$$

im Sinn, daß eines existiert wenn das andere existiert, und sie sind gleich.

46. Sei μ ein σ-endliches Maß auf $\mathcal{B}(\boldsymbol{R}^n)$ und zeige, daß

$$\mu(B) = \sup\{\mu(K) : K \subset B, K \text{ kompakt}\}, \quad \forall B \in \mathcal{B}(\boldsymbol{R}^n)$$

gilt. Das heisst, eine Borel messbare Menge kann von unten mit einer kompakten Menge angenähert werden, wenn das Maß σ-endlich ist.

47. Sei μ ein Lebesgue-Stieltjes'sches Maß auf $\mathcal{B}(\boldsymbol{R}^n)$ und zeige, daß

$$\mu(B) = \sup\{\mu(V) : B \subset V, V \text{ offen}\}, \quad \forall B \in \mathcal{B}(\boldsymbol{R}^n)$$

gilt. Das heisst, eine Borel messbare Menge kann von oben mit einer offenen Menge angenähert werden, wenn das Maß Lebesgue-Stieltjes ist. Gib ein Beispiel von einem σ-endlichen Maß auf $\mathcal{B}(\boldsymbol{R}^n)$, das kein Lebesgue-Stieltjes'sches Maß ist und wofür die Annäherung nicht gilt.