Einführung in die Spieltheorie

Stephen Keeling
Institut für Mathematik und Wissenschaftliches Rechnen
Karl-Franzens-Universität Graz

1 Das Konzept eines Spiels

Ein *Spiel* wird so definiert:

1. Es gibt mindestens 2 *Spieler* (Dasein).
2. Spieler haben *Strategien*.
3. Strategien bestimmen das *Ergebnis*.
4. Jedes Ergebnis hat eine *Auszahlung* für jeden Spieler.

Beispiel 1. Ein Spiel zwischen Inge und Jörg hat die folgenden Auszahlungen:

		Jörgs Strategien	
		a	b
Inges	α	(2,-2)	(-3,3)
Strategien	β	(0,0)	(3,-3)

Auszahlungen: (A,B), A = Inges Gewinn, B = Jörgs Gewinn

Ein Nullsummenspiel erfüllt:

$$\text{Inge-Gewinn} + \text{Jörg-Gewinn} = 0.$$

Das Spiel hat das folgende Bewegungsdiagramm:

		Jörgs Strategien	
		a	b
Inges	α	$\longrightarrow$	$\downarrow$
Strategien	β	$\uparrow$	$\longleftarrow$

An den verschiedenen Stellen möchte jeder die gezeigte Bewegung in die Richtung des entsprechenden Gewinns machen.

Beispiel 2. Das folgende Spiel ist ein Nicht-Nullsummenspiel:

		Jörgs Strategien	
		a	b
Inges	α	(0,0)	(-2,1)
Strategien	β	(1,-2)	(-1,-1)

		Jörgs Strategien			
		a			b
Inges	α	$\cdot$	$\rightarrow$	$\rightarrow$	$\cdot$
		$\downarrow$			$\downarrow$
		$\downarrow$			$\downarrow$
Strategien	β	$\cdot$	$\rightarrow$	$\rightarrow$	$\star$

Dieses Spiel heisst *Gefangeners Dilemma*, und es wird später diskutiert. Bemerke, dass jeder Spieler zum Ergebnis bei den Strategien βb gezogen wird. Dieses Ergebnis ist ein *Gleichgewicht*.

Gleichgewicht: Das Ergebnis βb ist ein Gleichgewicht wegen der folgenden Eigenschaft. Wenn Inge β spielt, hat Jörg keinen Anreiz anders als b zu spielen. Wenn Jörg b spielt, hat Inge keinen Anreiz anders als β zu spielen.

Wert eines Spiels: Inges Auszahlung im Gleichgewicht ist der Wert des Spiels für Inge. Jörgs Auszahlung im Gleichgewicht ist der Wert des Spiels für Jörg.

2 Gemischte Strategien

In Beispiel 1 gibt es kein reines Gleichgewicht. Nimm an, dass Inge und Jörg ihre entsprechenden Strategien mit den folgenden Wahrscheinlichkeiten spielen:

	Inges Strategien		Jörgs Strategien	
	α	β	a	b
Wahrscheinlichkeiten:	p	$1-p$	q	$1-q$

Das heisst, in $100p\%$ der Spiele spielt Inge α und in $100(1-p)\%$ der Spiele spielt Inge β. Diese *gemischte Strategie* wird mit $p\alpha+(1-p)\beta$ dargestellt. Jörgs gemischte Strategie wird ähnlich mit $qa+(1-q)b$ dargestellt. Dann sind die Auszahlungen für gemischte Strategien *erwartete Werte*, und sie werden von den Auszahlungen für die reinen Strategien wie folgt definiert. Wenn Jörg die Strategie $qa + (1-q)b$ spielt, bekommt Inge die folgende Auszahlung:

$$\begin{aligned}\text{Strategie } \alpha\text{: Inges erwarteter Gewinn} &= q(2) + (1-q)(-3) = 5q-3\\ \text{Strategie } \beta\text{: Inges erwarteter Gewinn} &= q(0) + (1-q)(+3) = 3-3q\end{aligned}$$

Wenn Inge die Strategie $p\alpha + (1-p)\beta$ spielt, bekommt Jörg die folgende Auszahlung:

$$\begin{aligned}\text{Strategie } a\text{: Jörgs erwarteter Gewinn} &= p(-2) + (1-q)(0) = -2p\\ \text{Strategie } b\text{: Jörgs erwarteter Gewinn} &= p(3) + (1-p)(-3) = 6p-3\end{aligned}$$

Diese Information wird in der folgenden Tabelle zusammengefasst:

			Jörgs Strategien		Inges Auszahlung:
			q	$1-q$	
			a	b	
Inges	p	α	(2,-2)	(-3,3)	$5q-3$
Strategien	$1-p$	β	(0,0)	(3,-3)	$3-3q$
Jörgs Auszahlung:			$-2p$	$6p-3$	

Jörg will vermeiden, dass Inge seine gemischte Strategie ausnutzt. Also wählt Jörg ein $q = q^*$ aus, das Inges mögliche Gewinne angleicht:

$$q^* = 3/4 \quad \Rightarrow \quad 5q^* - 3 = 3 - 3q^* = 3/4 = \text{Inges Wert.}$$

Inge will vermeiden, dass Jörg ihre gemischte Strategie ausnutzt. Also wählt Inge ein $p = p^*$ aus, das Jörgs mögliche Gewinne angleicht:

$$p^* = 3/8 \quad \Rightarrow \quad -2p^* = 6p^* - 3 = -3/4 = \text{Jörgs Wert.}$$

3 Utilität

Bisher sind Auszahlungen gegeben worden. Wie entscheidet man, was die Auszahlung oder der Gewinn oder *die Utilität* eines gewissen Ergebnisses ist? Manchmal kann die Utilität klar gemessen werden. Manchmal kann man nur sagen, dass A ihm lieber als B ist. Also sollen gewählte Strategien hauptsächlich von *Differenzen* in Utilitäten abhängen. Andererseits kann man sagen, dass A ihm lieber als B ist und B ihm lieber als C ist, während C ihm lieber als A ist! Letztendlich sind die hauptsächlichen Resultaten hergeleitet worden, sodass sie von positiven linearen Transformationen in Utilität unabhängig sind.

Zum Beispiel, betrachte Beispiel 2. Nimm an, dass Inges ursprüngliche Auszahlungen I in die neuen Auszahlungen $\tilde{I}$ durch $\tilde{I} = 1 + 2I$ linear transformiert werden. Nimm an, dass Jörgs ursprüngliche Auszahlungen J in die neuen Auszahlungen $\tilde{J}$ durch $\tilde{J} = 3 + 4J$ linear transformiert werden. Bemerke, dass die entsprechenden Steigungen (2 und 4) positiv sind, und daher nennt man sie *positive* lineare Transformationen. Nun sieht das transformierte Spiel wie folgt aus:

		Jörgs Strategien	
		a	b
Inges	α	(1,3)	(-3,7)
Strategien	β	(3,-5)	(-1,-1)

		Jörgs Strategien			
		a			b
Inges	α	$\cdot$	$\rightarrow$	$\rightarrow$	$\cdot$
		$\downarrow$			$\downarrow$
		$\downarrow$			$\downarrow$
Strategien	β	$\cdot$	$\rightarrow$	$\rightarrow$	$\star$

und das Ergebnis βb ist immer noch ein Gleichgewicht.

4 Spiel gegen Natur: Entscheidungstheorie

Betrachte die Entscheidung, ob Inge zur Zentralbibliothek oder zur Zweigbibliothek gehen soll. Seien:

k = Kosten zur Zweigbibliothek zu gehen
θk = Kosten zur Zentralbibliothek zu gehen ($\theta > 1$)
q = Wahrscheinlichkeit, dass die Zweigbibliothek das gewünschte Buch hat
α = Strategie: Inge geht zuerst zur Zweigbibliothek
β = Strategie: Inge geht zur Zentralbibliothek
a = Zustand der Natur: das gewünschte Buch ist in der Zweigbibliothek
b = Zustand der Natur: das gewünschte Buch ist nur in der Zentralbibliothek

Dann sieht das Spiel gegen Natur folgendermaßen aus:

		Strategien der Natur		Inges Kosten:
		a	b	
Inges	α	k	$(1+\theta)k$	$E(\alpha) = qk + (1-q)(1+\theta)k$
Strategien	β	θk	θk	$E(\beta) = q\theta k + (1-q)\theta k$
Wahrscheinlichkeiten:		q	$1-q$	

Dann soll Inge zuerst zur Zweigbibliothek gehen, wenn die erwartete Kosten für Strategie α kleiner als die erwartete Kosten für Strategie β sind:

$$E(\alpha) = qk + (1-q)(1+\theta)k < q\theta k + (1-q)\theta k = E(\beta)$$

oder wenn $1/\theta < q$ gilt. Also sollte die Zweigbibliothek auch genug Bücher lagern, um diese Grenze zu vermeiden.

5 Nash Gleichgewicht und Nicht Kooperative Spiele

Beispiel 3. Betrachte das folgende Nicht-Nullsummenspiel.

			Jörgs Strategien			Inges Auszahlung:
			q		$1-q$	
			a		b	
Inges	p	α	(2,4)	$\leftarrow$	(1,0)	$1+q$
Strategien			$\downarrow$		$\uparrow$	
	$1-p$	β	(3,1)	$\rightarrow$	(0,4)	$3q$
Jörgs Auszahlung:			$1+3p$		$4-4p$	

Wegen des Bewegungsdiagramms gibt es kein reines Gleichgewicht. Also suchen die Spieler gemischte Strategien. Jörg will vermeiden, dass Inge seine gemischte Strategie ausnutzt. Also wählt Jörg ein $q = q^*$ aus, das Inges mögliche Gewinne angleicht:

$$q^* = 1/2 \quad \Rightarrow \quad 1 + q^* = 3q^* = 3/2.$$

Inge will vermeiden, dass Jörg ihre gemischte Strategie ausnutzt. Also wählt Inge ein $p = p^*$ aus, das Jörgs mögliche Gewinne angleicht:

$$p^* = 3/7 \quad \Rightarrow \quad 1 + 3p^* = 4 - 4p^* = 16/7.$$

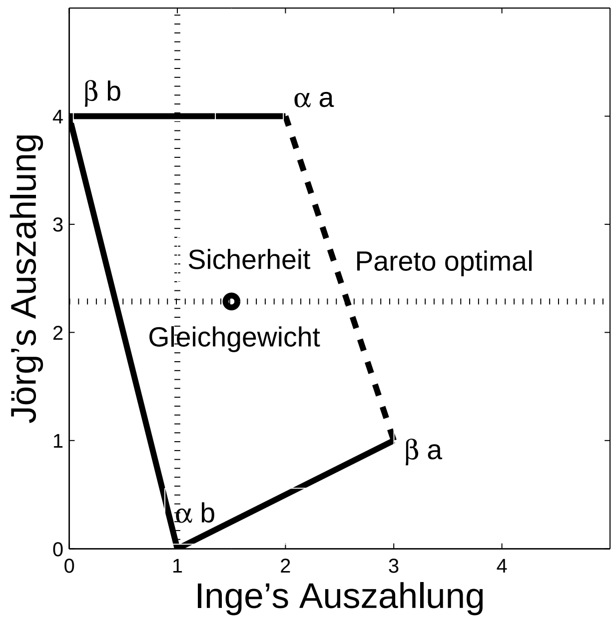
Wenn beide Spieler so spielen, gewinnt kein Spieler durch eine unterschiedliche Strategie.

Nach Nash: Jedes 2-Personen Spiel hat ein Gleichgewicht!

Nachteil: Im Gleichgewicht eines Nicht-Nullsummenspiels betrachten die Spieler die Gewinne des eigenen Spiels nicht.

Pareto Optimalität: Ein Ergebnis ist nicht Pareto optimal, wenn es ein anderes Ergebnis gibt, bei dem mindestens ein Spieler eine höhere Auszahlung bekommt und kein Spieler eine niedrigere Auszahlung bekommt. Ansonsten ist ein Ergebnis Pareto optimal.

Die Auszahlungen des Spiels in Beispiel 3 werden in der folgenden Figur grafisch dargestellt.



Betrachte die Pareto optimalen Strategien in der schrägen gestrichelten Linie. Soll Inge β spielen? Soll Jörg a spielen?

Nun betrachte die Ergebnisse, wenn die Spieler nur die Gewinne des eigenen Spiels betrachten:

			Jörgs Strategien			Jörgs Auszahlung:
			q		$1-q$	
			a		b	
Inges Strategien	p	α	(2,4)	$\rightarrow$	(1,0)	$4q$
			$\downarrow$		$\uparrow$	
	$1-p$	β	(3,1)	$\leftarrow$	(0,4)	$4-3q$
Inges Auszahlung:			$3-p$		p	

Um seinen minimalen Gewinn zu maximieren, wählt Jörg ein $q = \hat{q}$ aus, das seine möglichen Gewinne angleicht:

$$\hat{q} = 4/7 \quad \Rightarrow \quad 4\hat{q} = 4 - 3\hat{q} = 16/7.$$

Die Strategie $\hat{q}a + (1-\hat{q})b$ ist die Sicherheitsstrategie für Jörg.

Um ihren minimalen Gewinn zu maximieren, sucht Inge ein $p = \tilde{p}$, das ihre möglichen Gewinne angleicht:

$$\tilde{p} = 3/2 \quad \Rightarrow \quad 3 - \tilde{p} = \tilde{p} = 3/2,$$

aber p muss im Intervall $[0, 1]$ liegen. Also wählt Inge $p = \hat{p}$ aus, um ihren minimalen Gewinn zu maximieren:

$$\hat{p} = 1 \quad \Rightarrow \quad \min\{3 - \hat{p}, \hat{p}\} = 1.$$

Die Strategie $\hat{p}\alpha + (1-\hat{p})\beta$ ist die Sicherheitsstrategie für Inge.

Betrachte in der obigen Figur dass die Sicherheitsstrategien sich in der Kreuzung zwischen der senkrecht und waagerecht gestrichelten Linien befinden.

6 Des Gefangenen Dilemma

Beispiel 2 hat die folgende allgemeine Struktur. In der folgenden Tabelle seien R, S, T und U Auszahlungen für Kooperieren oder Überlaufen, die erfüllen $T > R > U > S$, $R > (S+T)/2$.

		Jörgs Strategien	
		kooperieren	überlaufen
Inges	kooperieren	(R,R)	(S,T)
Strategien	überlaufen	(T,S)	(U,U)

Auszahlungen: (A,B), A = Inges Gewinn, B = Jörgs Gewinn

Dieses Spiel kann wie folgt interpretiert werden. Inge und Jörg haben ein Verbrechen begehen, und sie sind gefangengenommen worden.

1. Inge gesteht und Jörg nicht: Inge bekommt eine Belohnung T, und Jörg bekommt eine schwere Strafe S.

2. Umgekehrt gesteht Inge nicht und Jörg schwatzt: Inge bekomme eine schwere Strafe S und Jörg bekommt eine Belohnung T.

3. Inge und Jörg gestehen: Die beiden bekommen eine leichte Strafe U.

4. Weder Inge noch Jörg gesteht: Die beiden sind frei und bekommen die Belohnung R.

Es gibt viele Spiele mit dieser Struktur, z.B. 2 Geschäfte im Preiskrieg, 2 Länder im Bewaffnungskrieg, 2 Länder bei Ressourcenteilung, usw.

Obwohl Kooperation unwahrscheinlich aussieht, hat das Spiel eine neue Struktur, wenn es wiederholt wird. Sei p die Wahrscheinlichkeit, dass das Spiel wiederholt wird. Dann ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Spiel n Mal wiederholt wird, durch p^n gegeben. Also ist der Gewinn vom ununterbrochenen Kooperieren so gegeben:

$$R + pR + p^2R + \cdots = R\sum_{n=0}^{\infty} p^n = \frac{R}{1-p}$$

Der Gewinn vom Überlaufen beim $(m+1)$ten Zug ist:

$$R\sum_{n=0}^{m-1} p^n + Tp^m + U\sum_{n=m+1}^{\infty} p^n = R\frac{1-p^m}{1-p} + Tp^m + U\frac{p^{m+1}}{1-p}$$

Wenn diese Auszahlungen erfüllen,

$$R\frac{1-p^m}{1-p} + Tp^m + U\frac{p^{m+1}}{1-p} < \frac{R}{1-p} \quad \text{oder} \quad p > \frac{T-R}{T-U}$$

dann zahlt es sich aus, ununterbrochen zu kooperieren.

7 Strategische Züge

Es stellt sich die Frage, was ist der Effekt der Kommunikation zwischen den Spielern? Es gibt die Möglichkeit für Kooperation und Drohung, wenn ein Spieler sagt, "Wenn Du X spielst, dann spiele ich A." Ebenso wichtig ist der Effekt, wenn Züge aufeinander folgend geführt werden, d.h. nicht gleichzeitig.

8 Evolutionär Stabile Strategien

Ninn an, dass es aggressive und passive Individuen einer Spezies gibt.

Beispiel 4. Die Interaktion zwischen den Individuen kann mit dem folgenden Spiel modelliert werden:

		Spezies Strategien	
		Falke	Taube
Spezies	Falke	(-25,-25)	(50,0)
Strategien	Taube	(0,50)	(15,15)

Auf dem Spiel stehen angenommen 50 Fitneßpunkte.

1. Wenn 2 Falken sich begegnen, kämpfen sie. Der Gewinner kriegt 50 Fitneßpunkte und der Verlierer kriegt -100. Durchschnittlich kriegt ein Falke $(50 - 100)/2 = -25$ für eine Auszahlung.

2. Wenn ein Falke und eine Taube sich begegnen, siegt der Falke immer.

3. Wenn 2 Tauben sich begegnen, posieren sie. Einer nimmt die Ressource nach Verzögerung. Wegen der Verzögerung verlieren beide 10 Punkte. Also kriegt der Gewinner 40 Fitneßpunkte und der Verlierer kriegt -10. Durchschnittlich kriegt eine Taube $(40 - 10)/2 = 15$ für eine Auszahlung.

Es stellt sich die Frage, ob eine Population von Tauben vorteilhaft ist? Ein paar Falken (durch Mutation) dringen ein (mit einem Gewinn von 50 statt 15), und sie vermehren sich. Analog stellt sich die Frage, ob eine Population von Falken vorteilhaft ist? In ähnlicher Weise dringen ein paar Tauben (durch Mutation) ein (mit einem Gewinn von 0 statt -25), und sie vermehren sich. Kann eine gemischte Population vorteilhaft sein? Sei q der Bruchteil von Falken in einer Population oder die Wahrscheinlichkeit, dass ein Individuum die Falke-Strategie wählt. Dann sieht das Spiel zwischen einem Individuum der Spezies und einem möglichen Eindringling wie folgt aus:

		Spezies Strategien		Eindringlinge Auszahlung:
		q	$1-q$	
		Falke	Taube	
Eindringlinge	Falke	(-25,-25)	(50,0)	$-25q + 50(1-q)$
Strategien	Taube	(0,50)	(15,15)	$0q + 15(1-q)$

Es wird vermieden, dass ein möglicher Eindringling die gemischte Strategie der Population ausnutzt, wenn die möglichen Gewinne des Eindringlinge angeglichen werden:

$$q^* = 7/12 \quad \Rightarrow \quad -25q^* + 50(1-q^*) = 15(1-q^*) = 25/4.$$

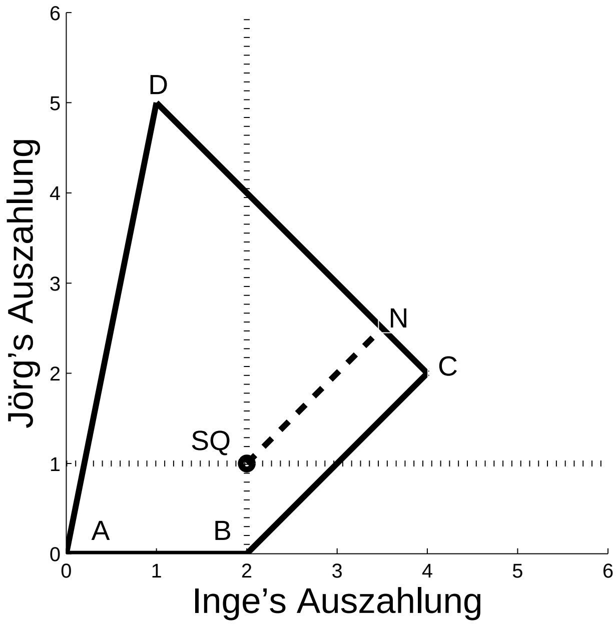
Also sagt man, dass die Strategie $[q^* \cdot$ Falke $+ (1-q^*)\cdot$ Taube$]$ eine evolutionär stabile Strategie für die Population ist.

9 Nash Schlichtungsschema

Inge und Jörg möchten verhandeln, und sie machen eine Schlichtung. Sie überlegen die folgenden Ergebnisse,

$$A = (0, 0), \quad B = (2, 0), \quad C = (4, 2), \quad D = (1, 5),$$

die ein Polygon $\mathcal{P}$ bilden, das in der folgenden Figur grafisch dargestellt wird.



Es wird vereinbart, dass das Defaultergebnis $SQ = (2, 1)$ (Status Quo) ausgeführt wird, falls keine Einigung erreicht werden kann.

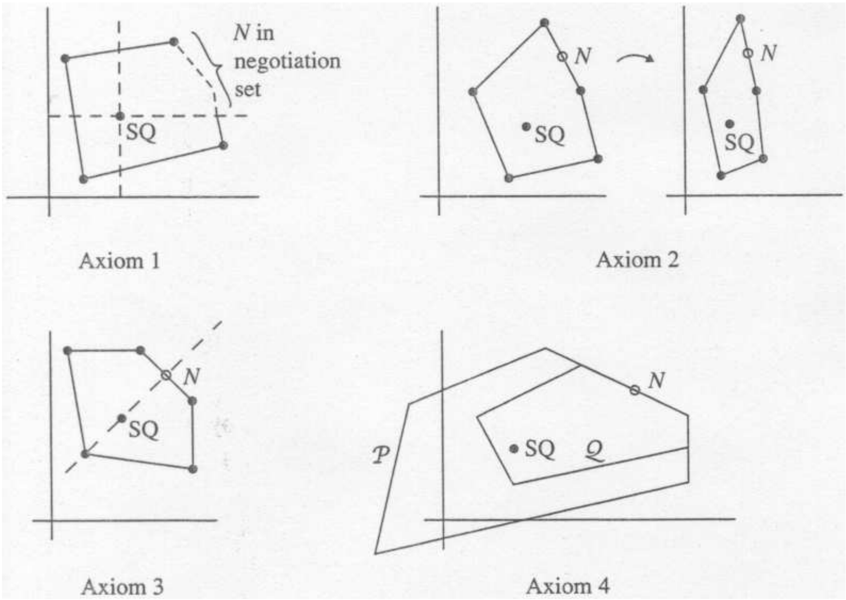
Nach Nash: Es gibt genau eine Schlichtungsstelle N mit den folgenden Eigenschaften, die in der untenstehenden Figur grafisch dargestellt werden:

1. Das Ergebnis N soll Pareto optimal und sicher sein.

2. Das Ergebnis N soll dasselbe sein, wenn die Utilitäten positiv linear transformiert werden.

3. Wenn das Polygon $\mathcal{P}$ symmetrisch bezüglich der Gerade mit Steigung 1 ist, soll das Ergebnis auf dieser Gerade liegen.

4. Sei $\mathcal{Q}$ ein Polygon, das SQ und N enthält, während $\mathcal{Q}$ in $\mathcal{P}$ liegt. Dann soll N die Schlichtungsstelle in $\mathcal{Q}$ sein.



N wird folgendermaßen berechnet: Wenn $SQ = (x_0, y_0)$ so gegeben ist, folgt $N = (x^*, y^*)$ wobei $(x^* - x_0)(y^* - y_0) = \max$ in $\{(x, y)$ in $\mathcal{P} : x \geq x_0, y \geq y_0\}$.

Beispiel 4. Seien

$$A = (0,0), \quad B = (2,0), \quad C = (4,2), \quad D = (1,5) \text{ und } SQ = (2,1).$$

Die Strecke DC wird explizit durch

$$y = 6 - x, \quad 2 \leq x \leq 4$$

gegeben. Der Ausdruck $(x-2)(y-1)$ wird auf DC maximiert, wenn die Funktion $f(x)$,

$$(x-2)(y-1) = (x-2)((6-x)-1) = -x^2 + 7x - 10 = f(x)$$

maximiert wird. Von den Ableitungen,

$$f'(x) = -2x + 7, \quad f''(x) = -2$$

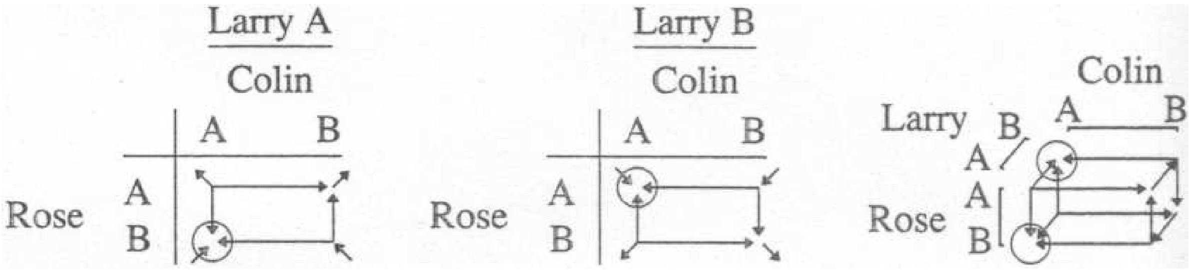
folgt es, dass f ein Maximum in $x^* = 7/2$ hat. Da $2 \leq x^* \leq 4$ gilt, liegt (x^*, y^*) in DC, wobei $y^* = 6 - x^* = 5/2$. Daher wird $(x-2)(y-1)$ in der Schlichtungsstelle $N = (7/2, 5/2)$ maximiert.

10 N-Personen Spiele und Koalitionen

Beispiel 4. Ein Spiel zwischen Rose, Colin und Larry hat die folgenden Auszahlungen:

		Larrys Strategien: A				Larrys Strategien: B	
		Colins Strategien				Colins Strategien	
		A	B			A	B
Roses	A	(1,1,-2)	(-4,3,1)	Roses	A	(3,-2,-1)	(-6,-6,12)
Strategien	B	(2,-4,2)	(-5,-5,10)	Strategien	B	(2,2,-4)	(-2,3,-1)

Auszahlungen: (α, β, γ), α = Rose-Gewinn, β = Colin-Gewinn, γ = Larry-Gewinn und das Bewegungsdiagramm wird in der folgenden Figur gezeigt.



Bemerke, dass es ein Nullsummenspiel ist, und es gibt 2 reine Gleichgewichte. Jedoch sind sie nicht äquivalent. Wenn jeder das bevorzügte Gleichgewicht spielt, ist (Rose-A,Colin-A,Larry-A) das Ergebnis, das kein Gleichgewicht ist.

Es stellt sich die Frage, was wäre das Ergebnis mit Koalitionen? Die Auszahlungen für die 3 möglichen Koalitionen sind wie folgt gegeben:

		Colins-und-Larrys Strategien				Roses optimal:
		AA	BA	AB	BB	
Roses	A	1	-4	3	-6	3/5
Strategien	B	2	-5	2	-2	2/5
Colin-und-Larry optimal:			4/5		1/5	Wert = -4.4

		Roses-und-Larrys Strategien				Colins optimal
		AA	BA	AB	BB	
Colins	A	1	-4	-2	2	1
Strategien	B	3	-5	-6	3	0
Roses-und-Larrys optimal:			1	0		Wert = -4

		Roses-und-Colins Strategien				Larrys optimal
		AA	BA	AB	BB	
Larrys	A	-2	2	1	10	3/7
Strategien	B	-1	-4	12	-1	4/7
Roses-und-Colins optimal:		6/7	1/7			Wert = -1.43

Die Auszahlung für Rose gegen Colin-und-Larry wird wie folgt berechnet:

$$\begin{gathered}
(\tfrac{3}{5}\text{Rose-A})(\text{Colin-B})(\tfrac{4}{5}\text{Larry-A}) + (\tfrac{3}{5}\text{Rose-A})(\text{Colin-B})(\tfrac{1}{5}\text{Larry-B}) \\
(\tfrac{2}{5}\text{Rose-B})(\text{Colin-B})(\tfrac{4}{5}\text{Larry-A}) + (\tfrac{2}{5}\text{Rose-B})(\text{Colin-B})(\tfrac{1}{5}\text{Larry-B}) = \\
\tfrac{12}{25}(\text{Rose-A})(\text{Colin-B})(\text{Larry-A}) + \tfrac{3}{25}(\text{Rose-A})(\text{Colin-B})(\text{Larry-B})) \\
\tfrac{8}{25}(\text{Rose-B})(\text{Colin-B})(\text{Larry-A})) + \tfrac{2}{25}(\text{Rose-B})(\text{Colin-B})(\text{Larry-B}) = \\
\tfrac{12}{25}(-4,3,1) + \tfrac{3}{25}(-6,-6,12) \\
\tfrac{8}{25}(-5,-5,10) + \tfrac{2}{25}(-2,3,-1) \\
= (-4.40, -0.64, 5.04)
\end{gathered}$$

Die anderen Koalitionen-Auszahlungen werden ähnlich berechnet. Die Ergebnisse sind:

Rose gegen Colin-und-Larry:	(-4.40,-0.64,5.04)
Colin gegen Rose-und-Larry:	(2.00,-4.00,2.00)
Larry gegen Rose-und-Colin:	(2.12,-0.69,-1.43)

Also ist eine Koalition für jeden Spieler bevorzugt:

Rose gewinnt mehr in einer Koalition mit Colin.
Colin gewinnt mehr in einer Koalition mit Larry.
Larry gewinnt mehr in einer Koalition mit Colin.

Es ist zu erwarten, dass Colin und Larry eine Koalition gegen Rose bilden. Das Ergebnis des Spiels ist (-4.40,-0.64,5.04).

Literatur: *Game Theory and Strategy* von Philip D. Straffin, Mathematical Association of America, Washington, 1993.

11 Anhang: Herleitung von Agentenstrategien beim Tauschen von Ressourcen

Nimm an, dass es eine Population von Agenten gibt. Jeder Agent metabolisiert (verbraucht oder gibt aus) zwei Ressourcen x und y. (Später werden mehrere Ressourcen $(x, y, z, \ldots)$ betrachtet.) Die Lebenzeit eines Agenten ist genau so lang wie seine beiden Ressourcen vorhanden sind, ohne dass neue Vorräte gefunden oder getauscht werden. Das heisst, die Agenten suchen und tauschen Ressourcen, um ihre Lebenzeiten zu verlängern.

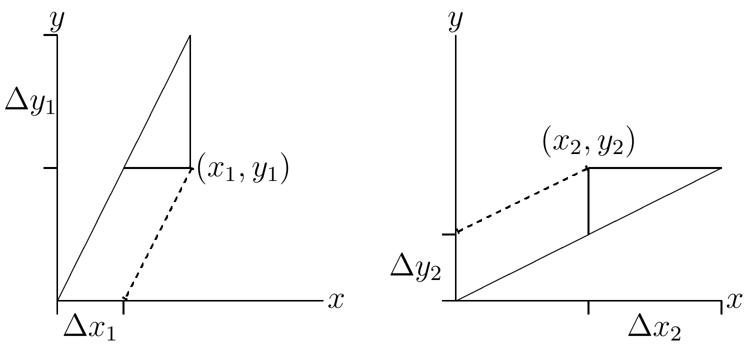
Nimm an, dass 2 Agenten tauschen werden. Seien a_1 und b_1 die Metabolismusraten für die Ressourcen x und y für den ersten Agenten. Wenn der Agent die Beträge x_1 und y_1 der Ressourcen zur Zeit $t = 0$ besitzt, verschwinden die Ressourcen im Lauf der Zeit t wie folgt:

$$x = x_1 - a_1 t, \qquad y = y_1 - b_1 t.$$

Die natürliche Utilität eines Agenten ist seine Lebenszeit. Die Utilität u_1 des ersten Agenten wird von der ersten Lösung von $x = 0$ oder $y = 0$ bestimmt. Ähnlich wird die Utilität u_2 des zweiten Agenten bestimmt. Die Utilitäten erfüllen:

$$u_1 = \min\left\{\frac{x_1}{a_1}, \frac{y_1}{b_1}\right\}, \qquad u_2 = \min\left\{\frac{x_2}{a_2}, \frac{y_2}{b_2}\right\}.$$

Ohne Tauschen werden die zeitabhängigen Ressourcenverhältnisse der zwei Agenten mit den gestrichelten Linien in der folgenden Grafik dargestellt:



wobei diese Linien die folgenden Steigungen haben:

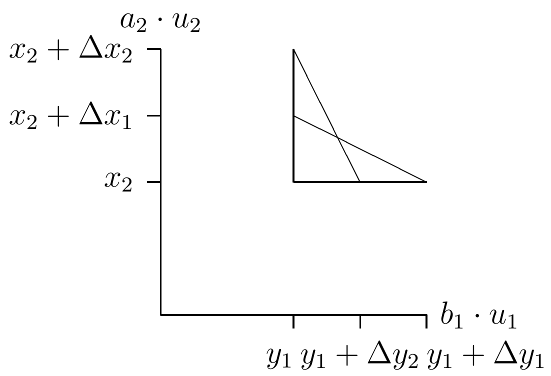
$$s_1 = b_1/a_1, \qquad s_2 = b_2/a_2.$$

Also gelten die folgenden Gleichungen in der obigen Konfiguration (d.h. $y_1 - s_1 x_1 < 0$ und $y_2 - s_2 x_2 > 0$):

$$\begin{aligned} \Delta x_1 &= x_1 - y_1/s_1, & \Delta y_1 &= s_1 x_1 - y_1 \\ \Delta x_2 &= y_2/s_2 - x_2, & \Delta y_2 &= y_2 - s_2 x_2. \end{aligned}$$

(Falls $y_1 - s_1 x_1 > 0$ und $y_2 - s_2 x_2 < 0$ gelten, sollen die tiefstehenden Zahlen 1 und 2 in den letzten Gleichungen getauscht werden. Falls $(y_1 - s_1 x_1) \cdot (y_2 - s_2 x_2) < 0$ nicht gilt, ist Tauschen nicht vorteilhaft.) In der obigen Konfiguration verliert der erste Agent keine Lebenszeit wenn x von x_1 zu y_1/s_1 vermindert wird, und der zweite Agent verliert keine Lebenszeit wenn y von y_2 zu $s_2 x_2$ vermindert wird. Deshalb kann der erste Agent dem zweiten Agenten Ressource x anbieten, um y zu gewinnen, und der zweite Agent kann dem ersten Agenten Ressource y anbieten, um x zu gewinnen. Was noch zu bestimmen ist, was ist ein fairer Tausch, und mit welchen Strategien können der Tausch geführt werden?

Die Utilitäten werden in der folgenden Grafik zusammen grafisch dargestellt:



Das rechte Dreieck stellt durch Δx_1 und Δy_1 dar, die Ressourcen die der erste Agent bereit auszugeben ist beziehungsweise am besten kriegen würde. Das linke Dreieck stellt durch Δy_2 und Δx_2 dar, die Ressourcen die der zweite Agent bereit auszugeben ist beziehungsweise am besten kriegen würde. Der Durchschnitt der zwei Dreiecke in dieser Grafik stellt dar, was für Ressourcen tatsächlich zur Verfügung stehen, und deshalb ist dieser Durchschnitt die Zone in der das Spiel stattfindet. Die Nash Schlichtungsstelle wird dadurch bestimmt, dass das Produkt $(b_1 \cdot u_1 - y_1)(a_2 \cdot u_2 - x_2)$ bezüglich (u_1, u_2) innerhalb des Durchschnitts maximiert wird. Es kann gezeigt werden, dass dieses Produkt in einem von 3 möglichen Punkten maximiert wird, und zwar in dem Mittelpunkt einer der zwei Hypotenusen oder in der Kreuzung zwischen den Hypotenusen. Die 3 Möglichkeiten werden wie folgt zusammengefasst:

1. Ein Mittelpunkt einer Hypotenuse ist $(b_1 \cdot u_1, a_2 \cdot u_2) = (y_1 + \frac{1}{2}\Delta y_1, x_2 + \frac{1}{2}\Delta x_1)$. Das entsprechende Produkt zu betrachten ist $(b_1 \cdot u_1 - y_1)(a_2 \cdot u_2 - x_2) = \frac{1}{4}\Delta y_1 \Delta x_1$. Das Produkt soll betrachtet werden, nur wenn der Punkt sich innerhalb des Durchschnitts befindet, d.h. genau dann wenn die folgende Ungleichung gilt:
$$(\Delta x_1 - \Delta x_2)\Delta y_2 \leq \Delta x_2(\Delta y_2 - \Delta y_1)$$

2. Ein Mittelpunkt der anderen Hypotenuse ist $(b_1 \cdot u_1, a_2 \cdot u_2) = (y_1 + \frac{1}{2}\Delta y_2, x_2 + \frac{1}{2}\Delta x_2)$. Das entsprechende Produkt zu betrachten ist $(b_1 \cdot u_1 - y_1)(a_2 \cdot u_2 - x_2) = \frac{1}{4}\Delta y_2 \Delta x_2$. Das Produkt soll betrachtet werden, nur wenn der Punkt sich innerhalb des Durchschnitts befindet, d.h. genau dann wenn die folgende Ungleichung gilt:
$$(\Delta x_2 - \Delta x_1)\Delta y_1 \leq \Delta x_1(\Delta y_1 - \Delta y_2)$$

3. Die Kreuzung zwischen den Hypotenusen ist $(b_1 \cdot u_1, a_2 \cdot u_2) = (y_1 + \Delta y_3, x_1 + \Delta x_3)$ wobei
$$\Delta y_3 = \frac{\Delta x_2 - \Delta x_1}{\frac{\Delta x_2}{\Delta y_2} - \frac{\Delta x_1}{\Delta y_1}}, \qquad \Delta x_3 = \frac{\Delta y_2 - \Delta y_1}{\frac{\Delta y_2}{\Delta x_2} - \frac{\Delta y_1}{\Delta x_1}}.$$
Das entsprechende Produkt zu betrachten ist $(b_1 \cdot u_1 - y_1)(a_2 \cdot u_2 - x_2) = \Delta y_3 \Delta x_3$. Das Produkt soll betrachtet werden, nur wenn der Punkt sich innerhalb des Durchschnitts befindet, d.h. genau dann wenn die folgenden Ungleichungen gelten:
$$\Delta x_3 \geq 0, \qquad \Delta y_3 \geq 0.$$

Nachdem der maximierende Punkt (u_1^*, u_2^*) nach diesem Algorithmus identifiziert wird, werden die Beträge $(\Delta y^*, \Delta x^*)$ eines Schlichtungstausches entsprechend bestimmt. Nachdem die optimale Schlichtung bestimmt wird, können die Agenten das folgende Falke-Taube Spiel spielen:

		Agent 2 Strategien	
		Falke	Taube
Agent 1	Falke	(0,0)	$(\Delta y^*, 0)$
Strategien	Taube	$(0, \Delta x^*)$	$(\Delta y^*, \Delta x^*)$

in dem nur Tauschbeträge aufgelistet worden sind. In diesem Spiel ist das Ergebnis $(0, 0)$ das Nash Gleichgewicht, das erreicht wird, wenn die beiden Agenten die Falke-Strategie spielen. In diesem Fall verlieren sie indirekt in dem Sinn, dass ihre Ressourcen schneller verschwinden, als wenn sie tauschen würden. Natürlich ist das Taube-Taube Ergebnis $(\Delta y^*, \Delta x^*)$ das Nash Schlichtungsschema. Die Falke-Taube Ergebnisse ergeben sich, wenn genau ein Agent die Taube-Strategie vortäuscht. Ob ein Agent eine Falke- oder eine Taube-Strategie führt, kann mit einer Wahrscheinlichkeit für Aggression bestimmt werden. Andererseits wenn ein Agent ein solches Spiel mehrmals spielen möchte, und sein Verhalten herumgesprochen wird, dann wird die Wahrscheinlichkeit der Wiederholung des Spiels entsprechend beeinflusst. Dadurch gibt es einen Anreiz zu kooperieren.