Ein Modell der Produktionsspitze des Erdöls: ***Peak Oil***

Stephen Keeling*

1 Die Problemstellung

Die vorhandenen Daten zeigen, Erdöl wird logistisch entdeckt und logistisch gefördert. Von diesen Daten sieht man einen Peak von Erdölentdeckung im Jahr 1965 und einen Peak von Erdölförderung im Jahr 2006. Während Erdöl gefördert worden ist, sind die Bevölkerung der Welt und die entsprechende Nachfrage vom Erdöl gewaltig angestiegen. Wegen ressourcenbedingter Grenzen fällt das Angebot trotz dieser Nachfrage. Folglich ist der Preis vom Erdöl in letzter Zeit gewaltig angestiegen. Der Zweck dieses Modells ist, diese Phänomäne von einfachen Grundprinzipien ausgehend zu beleuchten und ihre grundlegenden Wechselwirkungen mathematisch zu beschreiben, um ein grobes Modell für Prognosen zu entwickeln.

2 Das Modell

Die Zustandsgrößen für dieses Modell sind:

E	Entdeckung des Erdöls	N	Erdöl-Nachfrage der Bevölkerung
F	Förderung des Erdöls	P	Fasspreis des Erdöls
V	Vorrat des Erdöls	K	Kapital des Monopols
A	Erdöl-Angebot eines Monopols	B	Bevölkerung

Entdeckung wird logistisch modelliert:

$$E'(t) = a \cdot E(t) \cdot [M - E(t)] \tag{1}$$

wobei M die Gesamtmenge vom Erdöl in der Erde ist. Der Parameter a hat die Einheiten $[\text{Erdölmenge} \cdot \text{Zeiteinheit}]^{-1}$.

Nachdem Erdöl entdeckt worden ist, gibt es eine Verzögerung τ bis die Infrastruktur für Förderung aufgestellt worden ist. Für eine einzige Quelle steigt die Förderung zuerst schnell an, und später wird die Förderung für die einzige Quelle weniger. Also wird die ***Förderung*** für alle Quellen so modelliert:

$$F'(t) = e \cdot [E(t - \tau) - F(t)] \cdot [K'(t) > 0] \cdot K'(t) \tag{2}$$

wobei der Parameter e die Einheiten von Geld $\cdot$ $[\text{Zeiteinheit}]^{-2}$ hat. Da es keinen Anreiz zur Förderung gibt, wenn das Kapital nicht ansteigt, wird Förderung ausgeschaltet, d.h. $F'(t) = 0$ gilt, wenn $K'(t) > 0$ nicht gilt. Andererseits wird Förderung umso mehr beschleunigt, je schneller Kapital ansteigt; also steigt $F'(t)$ mit $K'(t)$ im obigen Modell.

Das Erdöl, das schon gefördert worden ist aber noch nicht konsumiert worden ist, ist der ***Vorrat*** vom Erdöl. Die Änderungsrate des Vorrats hängt natürlich von den Änderungsraten der Förderung und der Nachfrage ab:

$$V'(t) = F'(t) - N'(t) \tag{3}$$

Sei $A(t)$ die Menge vom Erdöl, die je angeboten worden ist. Dann über das nächste Zeitintervall $[t, t+dt]$ kann höchstens der Vorrat $V(t)$ angeboten werden, aber nur wenn der Fasspreis $P(t)$ ausreichend hoch ist. Also wird das ***Angebot*** über das Intervall $[t, t + dt]$ so modelliert:

$$A(t + dt) - A(t) = V \cdot \left\{1 - \left[\frac{P_{\min}(t)}{P(t)}\right]^{b \cdot dt}\right\} \tag{4}$$

*Institut für Mathematik und Wissenschaftliches Rechnen, Karl-Franzens-Universität Graz, Heinrichstraße 36, 8010 Graz, Austria; email: stephen.keeling@uni-graz.at; tel: +43–316–380–5156; fax: +43–316–380–9815.

wobei der Parameter b die Einheiten von $[\text{Zeiteinheit}]^{-1}$ hat. Also im Limus mit $dt \to 0$ ergibt sich:

$$A'(t) = \max\left\{0, b \cdot V(t) \cdot \ln\left[\frac{P(t)}{P_{\min}(t)}\right]\right\} \tag{5}$$

wobei $A'(t) \geq 0$ immer gelten soll. Hier bedeutet $P_{\min}(t)$ der minimale Fasspreis, der alle Kosten abdecken wird. Dieser Fasspreis soll ansteigen, je näher Förderung $F(t)$ zu der momentanen Grenze $E(t)$ kommt; also wird $P_{\min}(t)$ so modelliert:

$$P_{\min}(t) = q + h\frac{F(t)}{E(t) - \min\{F(t), E(t)\}} \tag{6}$$

wobei die Parameter q und h die Einheiten von $\text{Geld} \cdot [\text{Fass}]^{-1}$ haben.

Sei $N(t)$ die Menge vom Erdöl, die je nachgefragt worden ist. Dann über das nächste Zeitintervall $[t, t+dt]$ kann jeder Mensch angenommen höchstens eine gewisse Menge c_1 vom Erdöl konsumieren, aber nur wenn der Fasspreis $P(t)$ ausreichend niedrig ist. Andererseits hört jede vom Erdöl abhängige Aktivität auf, und der Konsum fällt zu Null, wenn der Fasspreis zu einem gewissen $P_{\max}$ steigt. Also wird die ***Nachfrage*** über das Intervall $[t, t+dt]$ so modelliert:

$$N(t+dt) - N(t) = c_1 \cdot B(t) \cdot \left\{1 - \left[\frac{P(t)}{P_{\max}}\right]^{c_2 \cdot dt}\right\} \tag{7}$$

wobei der Parameter c_2 die Einheiten von $[\text{Zeiteinheit}]^{-1}$ hat. Also im Limus mit $dt \to 0$ ergibt sich:

$$N'(t) = \max\left\{0, c \cdot B(t) \cdot \ln\left[\frac{P_{\max}}{P(t)}\right]\right\} \tag{8}$$

wobei $N'(t) \geq 0$ immer gelten soll. Der Parameter $c = c_1 \cdot c_2$ hat die Einheiten von $\text{Erdölmenge} \cdot [\text{Bevölkerung} \cdot \text{Zeiteinheit}]^{-1}$.

Der ***Fasspreis*** vom Erdöl $P(t)$ soll sich in jeder Zeit t nur wenig von einem Preis abweichen, in dem Angebot und Nachfrage in einer Bilanz $A'(t) = N'(t)$ stehen. Also könnte die Änderungsrate vom Fasspreis mit $P'(t) = d \cdot [N'(t) - A'(t)]$ modelliert werden, wobei der sehr große Parameter d die Einheiten von $\text{Geld} \cdot [\text{Erdölmenge} \cdot \text{Fass}]^{-1}$ hätte. Aber bei $d \to \infty$ ergibt sich eine viel einfachere Formel für $P(t)$:

$$P(t) = \min\left\{P_{\max}, P_{\max}^{r(t)} \cdot P_{\min}^{s(t)}(t)\right\}, \quad r(t) = \frac{c \cdot B(t)}{c \cdot B(t) + b \cdot V(t)}, \quad s(t) = \frac{b \cdot V(t)}{c \cdot B(t) + b \cdot V(t)}. \tag{9}$$

Das vom Erdöl-Monopol gewonnene ***Kapital*** pro Zeiteinheit ist natürlich die Eingaben minus die Ausgaben pro Zeiteinheit. Die Eingaben pro Zeiteinheit sind gegeben durch das Produkt $P(t) \cdot N'(t)$ zwischen dem Fasspreis und der Menge pro Zeiteinheit die gekauft wird. Die Ausgaben pro Zeiteinheit sind gegeben durch das Produkt $P_{\min}(t) \cdot A'(t)$ zwischen dem kostenabdeckenden Fasspreis und dem Angebot pro Zeiteinheit. Also wird die Änderungsrate vom Kapital so modelliert:

$$K'(t) = P(t) \cdot N'(t) - P_{\min}(t) \cdot A'(t). \tag{10}$$

Angenommen ist die Kapazität der Erde für die ***Bevölkerung*** $B(t) = R$ wenn es kein Erdöl gibt. Diese Kapazität entspricht dem logistischen Modell $B'(t) = f \cdot B(t)[R - B(t)]$. Durch Förderung des Erdöls ist die Kapazität kurzfristig erhöht worden, und je mehr Erdöl angeboten wird, desto mehr wird die Kapazität erhöht. Also wird die Änderungsrate der Bevölkerung so modelliert:

$$B'(t) = f \cdot B(t) \cdot [R + g \cdot A'(t) - B(t)] \tag{11}$$

Hier hat der Parameter f die Einheiten von $[\text{Bevölkerung} \cdot \text{Zeiteinheit}]^{-1}$, und der Parameter g hat die Einheiten von $\text{Bevölkerung} \cdot \text{Zeiteinheit} \cdot [\text{Erdölmenge}]^{-1}$.

3 Vereinfachung der Formulierung

Es wird erst gezeigt, dass V und B nicht negativ bleiben,

$$V(t) \geq 0 \tag{12}$$

$$B(t) \geq 0 \tag{13}$$

und so können (5) und (8) vereinfacht werden. Wenn $V(t) = 0$ gilt, folgt $A'(t) = 0$ aus (5). Zusätzlich folgt $P(t) = P_{\max}$ aus (9), und deswegen gilt $N'(t) = 0$ in (8). Mit $A'(t) = 0$ und $N'(t) = 0$ folgt $K'(t) = 0$ mit (10) und $F'(t) = 0$ mit (2). So bei $V(t) = 0$ gilt $V'(t) = 0$. Also folgt (12) wenn $V(0) \geq 0$ gilt. Ähnlich mit (11) sieht man, bei $B(t) = 0$ gilt $B'(t) = 0$. Also folgt (13) wenn $B(0) \geq 0$ gilt.

Mit der Definition

$$\ln^+(x) = \ln(x) \cdot [x > 1] \tag{14}$$

und (9) können (5) und (8) so umgeschrieben werden:

$$A'(t) = N'(t) = \frac{b \cdot c \cdot V(t)B(t)}{b \cdot V(t) + c \cdot B(t)} \ln^+ \left[\frac{P_{\max}}{P_{\min}(t)} \right] \tag{15}$$

wobei $P_{\min}(t)$ von $E(t)$ und $F(t)$ nach (6) abhängt. Mit (15) kann (11) so umgeschrieben werden:

$$B'(t) = f \cdot B(t) \left[R + \frac{g \cdot b \cdot c \cdot V(t)B(t)}{b \cdot V(t) + c \cdot B(t)} \ln^+ \left[\frac{P_{\max}}{P_{\min}(t)} \right] - B(t) \right] \tag{16}$$

Wegen (15) folgt

$$K'(t) = \left[P_{\max}^{r(t)} - P_{\min}^{r(t)}(t) \right] P_{\min}^{s(t)}(t) \frac{b \cdot c \cdot V(t)B(t)}{b \cdot V(t) + c \cdot B(t)} \ln^+ \left[\frac{P_{\max}}{P_{\min}(t)} \right] \tag{17}$$

aus (10). Hier ist $P(t)$ mit $P_{\max}^{r(t)} \cdot P_{\min}^{s(t)}(t)$ von (9) ersetzt worden, da $\ln^+[P_{\max}/P_{\min}(t)]$ Null wird, wenn $P_{\max}^{r(t)} \cdot P_{\min}^{s(t)}(t) > P_{\max}$ gilt. Mit (17) kann (2) so umgeschrieben werden:

$$F'(t) = e \cdot [E(t-\tau) - F(t)] \left[P_{\max}^{r(t)} - P_{\min}^{r(t)}(t) \right] P_{\min}^{s(t)}(t) \frac{b \cdot c \cdot V(t)B(t)}{b \cdot V(t) + c \cdot B(t)} \ln^+ \left[\frac{P_{\max}}{P_{\min}(t)} \right] \tag{18}$$

Schliesslich mit (18) kann (3) so umgeschrieben werden:

$$V'(t) = \{ e \cdot [E(t-\tau) - F(t)] [P(t) - P_{\min}(t)] - 1 \} \frac{b \cdot c \cdot V(t)B(t)}{b \cdot V(t) + c \cdot B(t)} \ln^+ \left[\frac{P_{\max}}{P_{\min}(t)} \right] \tag{19}$$

Da $\langle E'(t), F'(t), V'(t), B'(t) \rangle$ nur von $\langle E(t), F(t), V(t), B(t) \rangle$ abhängt, sieht man dass ein reduziertes Modell in (1), (18), (19) und (11) gegeben ist.

4 Simulationen

Mit den Parametern in Tabelle 1 werden die Ergebnisse in Abbildung 1 mit dem Matlab-

a	2.0e0	c	5.0e-2	f	1.0e-1	h	1.0e-1	$P_{\max}$	1.0e0	R	1.0e0
b	4.0e0	e	1.0e1	g	7.0e1	M	1.0e0	q	1.0e-1	$E(\tau)$	$M/2$

Tabelle 1: Parameterwerte für die Simulation in Abbildung 1.

Code im Anhang A berechnet. Zu bemerken ist, Förderung, Angebot und Nachfrage hören auf, bevor die Gesamtmenge vom Erdöl erreicht wird. Am Peak von Erdölförderung ist der Fasspreis gewaltig angestiegen, und die Bevölkerung ist weit über die Kapazität ohne Erdöl.

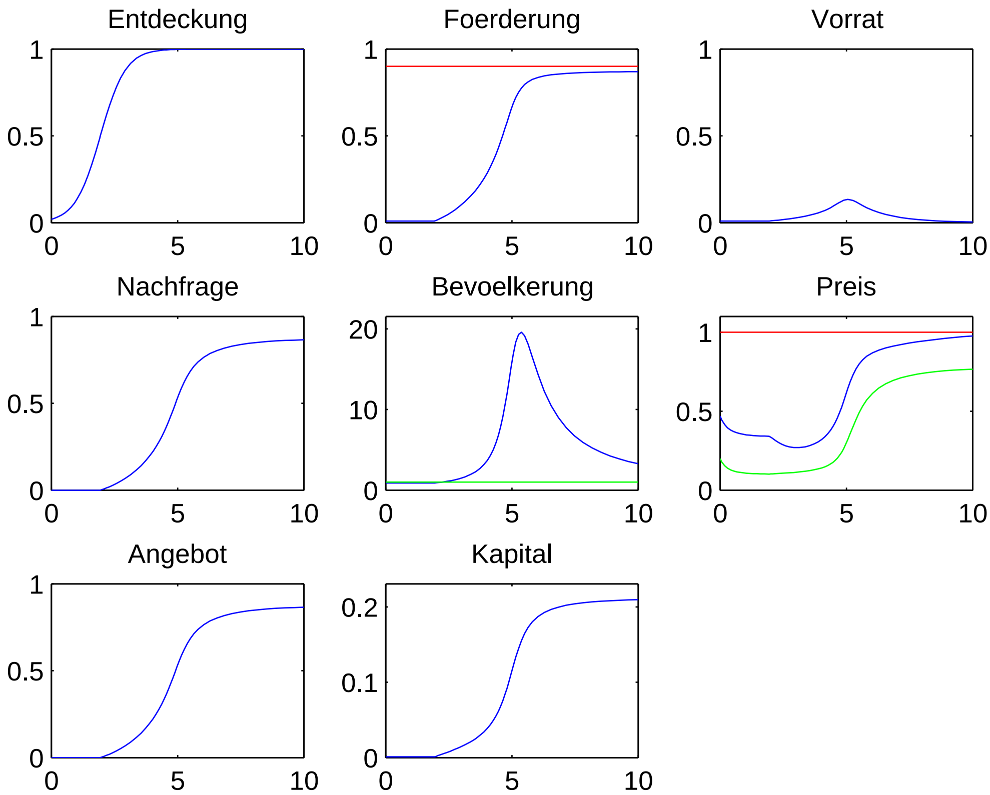

Abbildung 1: Simulation mit den Parameterwerten in Tabelle 1. Die rote Foerderung-Kurve zeigt F_0, und die grüne Bevölkerung-Kurve zeigt R. Die rote Preis-Kurve zeigt $P_{\max}$ und die grüne Preis-Kurve zeigt $P_{\min}(t)$.

instabil:	$E = 0$	$F = 0$	$V = 0$	$B = 0$
stabil:	$E = M$	$F = F_0$	$V = 0$	$B = R$

Tabelle 2: Zustandswerte für zwei Gleichgewichte des *Peak Oil* Modells.

5 Analyse der Stabilität

Zwei Gleichgewichte dieses dynamischen Systems sind in Tabelle 2 gegeben. Wegen (18) ist F_0 hier so definiert:

$$P_{\min}(M, F_0) = P_{\max} \quad \Rightarrow \quad F_0 = M \frac{P_{\max} - q}{P_{\max} - q + h}. \tag{20}$$

Um die Stabilität dieser Gleichgewichte zu untersuchen, wird die Jakobi-Matrix

$$\frac{\partial(E', F', V', B')}{\partial(E, F, V, B)} \quad \text{mit } \tau = 0 \text{ zur Vereinfachung} \tag{21}$$

in den Gleichgewichten ausgewertet. Die Eigenwerte dieser Jakobi-Matrix sind mit dem Mathematica-Code im Anhang B berechnet worden. Für das Gleichgewicht in der ersten Reihe in Tabelle 2 sind die Eigenwerte:

$$\{0, 0, aM, fR\} \tag{22}$$

Da der größte realle Teil von den Eigenwerten positiv ist, ist dieses Gleichgewicht instabil. Für das Gleichgewicht in der zweiten Reihe in Tabelle 2 sind die Eigenwerte:

$$\{0, 0, -aM, -fR\} \tag{23}$$

Es gibt keinen Eigenwert mit einem positiven realen Teil. Da Null ein Eigenwert ist, ist dieses Gleichgewicht nicht asymptotisch stabil. Aber die Stabilität dieses Gleichgewichts lässt sich folgendermaßen zeigen. Die Zustandsvariablen werden so gestört:

$$E(0) = M - \epsilon_1, \quad F(0) = F_0 - \epsilon_2, \quad V(0) = \epsilon_3, \quad B(0) = R + \epsilon_4 \tag{24}$$

wobei jedes $\epsilon_i > 0$ ausreichend klein ist, und die Anfangsbedingungen erfüllen:

$$B(0) > 0, \quad E(0) \geq F(0) \geq V(0) \geq 0, \quad F(0) - V(0) = A(0) = N(0) \geq 0, \quad F(0) > F_{\min}. \tag{25}$$

Hier ist $F_{\min}$ wegen (19) so definiert:

$$F_{\min} = F_0 - \frac{1/e}{P_{\max} - q + h}. \tag{26}$$

Es wird gezeigt, dass die Zustandsvariablen beliebig nah bei dem Gleichgewicht $\langle M, F_0, 0, R\rangle$ bleiben, wenn sie ausreichend nah starten.

Entdeckung: Es folgt aus (1), dass $E'(t) > 0$ gilt für $E(t) \in (0, M)$, während $E'(t) = 0$ gilt bei $E(t) = M$. Also mit $E(0) = M - \epsilon_1 \in (0, M)$ gilt $E(t) \stackrel{t\to\infty}{\longrightarrow} M$.

Förderung: Es folgt aus (18) und (25), dass $F'(t) \geq 0$ gilt bei $F(t) = F(0) \leq E(0)$, während $F'(t) = 0$ gilt bei $F(t) = F_0$. Deswegen gilt $F(0) \leq F(t) \leq F_0$. Also wenn ϵ_2 ausreichend klein ist, kann $|F(t) - F_0|$ beliebig klein gemacht werden.

Vorrat: Der Koeffizient in (19) kann wie folgt abgeschätzt werden:

$$\begin{aligned}
[E(t-\tau) - F(t)]\,[P(t) - P_{\min}(t)] \quad &\leq \quad [M - F(t)]\left[P_{\max} - \left(q + \frac{h \cdot F(t)}{M - F(t)}\right)\right] \\
&= \quad [M - F(t)] \cdot (P_{\max} - q) - h \cdot F(t) \quad \leq \quad 1/e
\end{aligned} \tag{27}$$

wobei die letzte Ungleichung gilt, weil $F(t) \geq F(0) \geq F_{\min}$ erfüllt ist. Es folgt aus (27) und (19), dass $V'(t) \leq 0$ gilt bei $V(t) = V(0)$, während $V'(t) = 0$ gilt bei $V(t) = 0$. Deswegen gilt $V(0) \geq V(t) \geq 0$. Also wenn ϵ_3 ausreichend klein ist, kann $|V(t)|$ beliebig klein gemacht werden.

Angebot, Nachfrage und Fasspreis: Wegen der Ungleichungen,

$$N'(t) = F'(t) - V'(t) \leq F'(t) \quad \Rightarrow \quad N(t) - N(0) \leq F(t) - F(0) \tag{28}$$

und der Anfangsbedingung $N(0) \leq F(0)$ in (25), folgt die Schranke $N(t) \leq F(t) \leq F_0$. Wegen (15) gilt $A(t) = N(t) \leq F_0$. Da $A'(t) \geq 0$ gilt, folgt

$$A'(t) \stackrel{t\to\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{29}$$

Also mit (5) gilt mindestens einer der folgenden Limiten,

$$V(t) \stackrel{t\to\infty}{\longrightarrow} 0, \quad F(t) \stackrel{t\to\infty}{\longrightarrow} F_0 \tag{30}$$

und in beiden Fällen folgt $P_{\min}(t) \stackrel{t\to\infty}{\longrightarrow} P_{\max}$ aus (6) und (9).

Bevölkerung: Für jedes $\varepsilon > 0$ folgt aus (11) und (29):

$$B'(t) \leq f \cdot B(t)[R + \varepsilon - B(t)] \tag{31}$$

für $t \geq T(\epsilon)$ ausreichend groß. Wegen (11) gilt $B'(t) > 0$ für $B(t) \in (0, R)$. Wegen (31) gilt $B'(t) < 0$ für $B(t) > R + \varepsilon(0, R)$, wenn $t \geq T(\epsilon)$ gilt. Mit $|B(0) - R| < \epsilon_4$ gilt $B(t) \stackrel{t\to\infty}{\longrightarrow} R$.

6 Schranken für die Zustandsvariablen

Unter der Annahme dass die Anfangsbedingungen erfüllen,

$$B(0) > 0, \quad M \geq E(0) \geq F(0) \geq V(0) \geq 0, \quad F(0) - V(0) = A(0) = N(0) \geq 0, \quad K(0) > 0 \tag{32}$$

können Schranken für die Zustandsvariablen wie folgt bestimmt werden.

Entdeckung: Es folgt aus (1), dass $E'(t) > 0$ gilt für $E(t) \in (0, M)$, während $E'(t) = 0$ gilt bei $E(t) = M$. Also ist das Intervall $(0, M]$ eine invariante Teilmenge für $E(t)$.

Förderung: Es folgt aus (2) dass $F'(t) \geq 0$ gilt für $F(t) \in [0, E(t-\tau)] \subset [0, M]$. Also ist das Intervall $[0, M]$ eine invariante Teilmenge für $F(t)$.

Vorrat: Da $N'(t) \geq 0$ gilt, folgen die Ungleichungen,

$$V'(t) = F'(t) - N'(t) \leq F'(t) \quad \Rightarrow \quad V(t) - V(0) \leq F(t) - F(0) \tag{33}$$

Wegen der Anfangsbedingung $V(0) \leq F(0)$ in (32), folgt die Schranke $V(t) \leq F(t) \leq M$. Mit (12) ist $V(t)$ nicht negativ. Also ist das Intervall $[0, M]$ eine invariante Teilmenge für $V(t)$.

Nachfrage: Da $N'(t) \geq 0$ gilt, bleibt $N(t)$ nicht negativ. Wegen der Ungleichungen in (28) und der Anfangsbedingung $N(0) \leq F(0)$ in (32), folgt die Schranke $N(t) \leq F(t) \leq M$. Also ist das Intervall $[0, M]$ eine invariante Teilmenge für $N(t)$.

Angebot: Wegen (15) und der Anfangsbedingung $A(0) = N(0)$ in (32) ist das Intervall $[0, M]$ eine invariante Teilmenge auch für $A(t) = N(t)$.

Fasspreis: Wegen (9) bleibt $P(t)$ im Intervall $[d, P_{\max}]$.

Kapital: Wegen der Ungleichung

$$K'(t) = [P(t) - P_{\min}(t)N'(t) \leq (P_{\max} - q)N'(t) \tag{34}$$

folgt die Schranke

$$K(t) - K(0) \leq (P_{\max} - q)[N(t) - N(0)] \leq M(P_{\max} - q). \tag{35}$$

Da $A'(t) = 0$ bei $P_{\min}(t) \geq P_{\max}$ gilt, folgt die Schranke $P_{\min}(t)A'(t) \leq P_{\max}A'(t)$. Wegen der Ungleichung

$$K'(t) = [P(t) - P_{\min}(t)]A'(t) \geq (q - P_{\max})A'(t) \tag{36}$$

folgt die Schranke

$$K(t) - K(0) \geq (q - P_{\max})[A(t) - A(0)] \geq (q - P_{\max})M. \tag{37}$$

Also bleibt $K(t) - K(0)$ im Intervall $[(q - P_{\max})M, (P_{\max} - q)M]$.

Bevölkerung: Da $V(t)\ln[P_{\max}/P_{\min}(t)] \leq M \ln[P_{\max}/d]$ gilt, folgt $R + g \cdot A'(t) \leq B_{\max}$ aus (5), wobei $B_{\max}$ so definiert ist:

$$B_{\max} = R + g \cdot b \cdot M \ln\left[\frac{P_{\max}}{q}\right] \tag{38}$$

Es folgt aus (11), bei $B(t) = B_{\max}$ gilt $B'(t) \leq 0$, während $B'(t) \geq 0$ gilt bei $B(t) \in (0, R)$. Also ist das Intervall $[0, B_{\max}]$ eine invariante Teilmenge auch für $B(t)$.

A Matlab-Code

```
% Datei: oelsim.m
% globale Parameter:
global a b c e f g h M Pmax q R

% Zustandsvariablen:
% Entdeckung: E
% Angebot: A
% Nachfrage: N
% Preis: P
% Kapital: K
% Foerderung: F
% Vorrat: V
% Bevoelkerung: B

% Entdeckung-Ableitung:  Es=a*E*(M-E)
a=2.0e0;
M=1.0e0;

% Angebot-Ableitung:  As=max([b*V*log(P/Pmin),0]), Pmin = h + q*F/(M-F)
b=4.0e0;
h=1.0e-1;
q=1.0e-1;

% Nachfrage-Ableitung:  Ns=max([c*B*log(Pmax/P),0])*(V>0)
c=5.0e-2;
Pmax=1.0e0;

% Kapital-Ableitung:  Ks=P*Ns-Pmin*As

% Foerderung-Ableitung:  Fs=e*(E-F)*(Ks>0)*Ks
e=1.0e1;

% Vorrat-Ableitung:  Vs=Fs-Ns

% Bevoelkerung-Ableitung:  Bs=f*B*(R+g*As-B)
R=1.0e0;
f=1.0e-1;
g=7.0e1;

% Anfangswerte:
E0=2.0e-2;
F0=min([1.0e-2,E0]);
V0=min([1.0e-2,F0]);
A0=F0-V0;
N0=A0;
K0=1.0e-3;
B0=0.9*R;

% Anfangsvektor:
x0=[E0;A0;N0;K0;F0;V0;B0];
```

```
% Zeitintervall:
tspan=[0,10];

% Loesung der Differentialgleichung:
[t,x] = ode23s(@oelrates,tspan,x0);

% ite Komponente der Loesung ist x(k,i) in der Zeit t(k):
E = x(:,1);
A = x(:,2);
N = x(:,3);
K = x(:,4);
F = x(:,5);
V = x(:,6);
B = x(:,7);

F0 = M*(Pmax - q)/(Pmax - q + h);
Pmin = h + q*F./(E-F);
r=c*B./(c*B+b*V);
s=b*V./(c*B+b*V);
P=min(Pmax,Pmax.^r.*Pmin.^s);

% Graphische Darstellungen:
subplot(3,3,1);
plot(t,E); title('Entdeckung');
axis([t(1) t(end) 0 M]);
subplot(3,3,2);
plot(t,F,'b',t,F0*ones(size(F)),'r');title('Foerderung');
axis([t(1) t(end) 0 M]);

subplot(3,3,3);
plot(t,V);title('Vorrat');
axis([t(1) t(end) 0 M]);

subplot(3,3,4);
plot(t,N);title('Nachfrage');
axis([t(1) t(end) 0 M]);

subplot(3,3,5);
plot(t,B,'b',t,R*ones(size(B)),'g');title('Bevoelkerung');
axis([t(1) t(end) 0 1.1*max(B)]);

subplot(3,3,6);
plot(t,Pmax*ones(size(P)),'r',t,Pmin,'g',t,P,'b');title('Preis');
axis([t(1) t(end) 0 1.1*Pmax]);

subplot(3,3,7);
plot(t,A);title('Angebot');
axis([t(1) t(end) 0 M]);

subplot(3,3,8);
plot(t,K);title('Kapital');
axis([t(1) t(end) 0 1.1*max(K)]);
```

```
% Datei: oelrates.m
function xs = oelrates(t,x)

% globale Parameter:
global a b c e f g h M Pmax q R

E=x(1); % Entdeckung
A=x(2); % Angebot
N=x(3); % Nachfrage
K=x(4); % Kapital
F=x(5); % Foerderung
V=x(6); % Vorrat
B=x(7); % Bevoelkerung

Pmin = h + q*F/(E-F);
r=c*B/(c*B+b*V);
s=b*V/(c*B+b*V);
P=min([Pmax,Pmax^r*Pmin^s]);

Es=a*E*(M-E);                         % Entdeckung-Ableitung
if (E > (M/2))                        % Verzoegerung bis Entdeckungspeak
  As=max([b*V*log(P/Pmin),0]);        % Angebot-Ableitung
  Ns=max([c*B*log(Pmax/P),0])*(V>0);  % Nachfrage-Ableitung
  Ks=P*Ns-Pmin*As;                    % Kapital-Ableitung
  Fs=e*(E-F)*(Ks>0)*Ks;               % Foerderung-Ableitung
  Vs=Fs-Ns;                           % Vorrat-Ableitung
  Bs=f*B*(R+g*As-B);                  % Bevoelkerung-Ableitung
else
  As=0;
  Ns=0;
  Ks=0;
  Fs=0;
  Vs=0;
  Bs=0;
end

xs=zeros(7,1);
xs(1)=Es; % Entdeckung-Ableitung
xs(2)=As; % Angebot-Ableitung
xs(3)=Ns; % Nachfrage-Ableitung
xs(4)=Ks; % Kapital-Ableitung
xs(5)=Fs; % Foerderung-Ableitung
xs(6)=Vs; % Vorrat-Ableitung
xs(7)=Bs; % Bevoelkerung-Ableitung
```

B Mathematica-Code

```
"With the correspondence..."
"  EE=Entdeckung, NN=Nachfrage, KK=Kapital,    VV=Vorrat, "
"  AA=Angebot,    PP=Fasspreis, FF=Foerderung, BB=Bevoelkerung"
"setup the dynamical system..."
Pmin[EE_,FF_] := q + h*FF/(EE-FF)
PP[BB_,VV_,EE_,FF_] := Pmax^(c*BB/(c*BB+b*VV))*Pmin[EE,FF]^(b*VV/(c*BB+b*VV))
Ep[EE_,FF_,VV_,BB_] := a*EE*(M-EE)
Ap[EE_,FF_,VV_,BB_] := b*VV*Log[PP[BB,VV,EE,FF]/Pmin[EE,FF]]
Np[EE_,FF_,VV_,BB_] := c*BB*Log[Pmax/PP[BB,VV,EE,FF]]
Kp[EE_,FF_,VV_,BB_] := PP[BB,VV,EE,FF]*Np[EE,FF,VV,BB]
                     - Pmin[EE,FF]*Ap[EE,FF,VV,BB]
Fp[EE_,FF_,VV_,BB_] := e*(EE-FF)*Kp[EE,FF,VV,BB]
Vp[EE_,FF_,VV_,BB_] := Fp[EE,FF,VV,BB]-Np[EE,FF,VV,BB]
Bp[EE_,FF_,VV_,BB_] := f*BB*(R+g*Ap[EE,FF,VV,BB]-BB)

"Define the right-hand side vector..."
F[EE_,FF_,VV_,BB_] := {Ep[EE,FF,VV,BB],
                       Fp[EE,FF,VV,BB],
                       Vp[EE,FF,VV,BB],
                       Bp[EE,FF,VV,BB]}

"Define the Jacobian..."
JacobianMatrix[F_List?VectorQ, X_List] :=
    Outer[D, F, X] /; Equal@@(Dimensions/@{F,X})
J[EE_,FF_,VV_,BB_] = JacobianMatrix[F[EE,FF,VV,BB],{EE,FF,VV,BB}]

"The Jacobian evaluated at an unstable equilibrium..."
J1=J[EE,FF,VV,BB]
J1=Simplify[Limit[J1,BB->0]]
J1=Simplify[Limit[J1,FF->0]]
J1=Simplify[Limit[J1,EE->0]]
J1=Simplify[Limit[J1,VV->0]]

"The Eigenvalues for this Jacobian..."
Print["Eigenvalues for the Jacobian at the equilibrium
    B=0, F=0 and E=0."]
Print[Eigenvalues[J1]]

"The Jacobian evaluated at a stable equilibrium..."
J2=J[EE,FF,VV,BB]
J2=Simplify[Limit[J2,BB->R]]
J2=Simplify[Limit[J2,FF->M*(Pmax-q)/(Pmax-q+h)]]
J2=Simplify[Limit[J2,EE->M]]
J2=Simplify[Limit[J2,VV->0]]

"The Eigenvalues for this Jacobian..."
Print["Eigenvalues for the Jacobian at the equilibrium
    V=0, B=R, Pmin(M,F)=Pmax, and E=M."]
Print[Eigenvalues[J2]]
```