Übungen zur Lineare Algebra I
Blatt 9 (Bis 11.1.06)
PS WiSe 05/06, Mi. 13.15 - 14.45

(1) Seien $U = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,|\, f(x) = f(-x)\}$, $W = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,|\, f(x) = -f(-x)\}$ und $V = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$. Zeige:

$$V = U \oplus W$$

(Hinweis: $f(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{2} + \frac{f(x)+f(-x)}{2}$.)

(2) Seien $V = \mathbb{R}^3 = \{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \,|\, x_i \in \mathbb{R}\}$ und $U = \{\lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \,|\, \lambda \in \mathbb{R}\}$. Bestimme ein $W \subset V$ mit $V = U \oplus W$. Ist W eindeutig bestimmt ?

(3) Sei

$$U = \left[\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \subset \mathbb{R}^3$$

gegeben. Zeige:

$$C_{\mathbb{R}^3}(U) \cup \{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\} \qquad \text{mit} \qquad C_{\mathbb{R}^3}(U) = \mathbb{R}^3 \setminus U,$$

ist kein Unterraum.

(4) Seien

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } e_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

zwei linear unabhängige Vektoren in $\mathbb{R}^4$. Ergänze e_1, e_2 zu einen Basis in $\mathbb{R}^4$. (Hinweis: $e_3 \perp e_1$ und $e_3 \perp e_2 \Rightarrow \ldots$.)