Übungen zur Lineare Algebra I
Blatt 7 (Bis 14.12.05)
PS WiSe 05/06, Mi. 13.15 - 14.45

(1) Zeige $K = \{a + b\sqrt{2} \,|\, a, b \in \mathbb{Q}\}$ ist ein Körper.

(2) Zeige

a. $\mathbb{R}$ ist ein Vektorraum über $\mathbb{Q}$.

b. In $\mathbb{R}$ über $\mathbb{Q}$ sind die Vektoren 1, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, linear unabhängig.

(3) Seien in $K = \{0, 1\}$ die Verknüpfungen $\cdot$, $+$ gegeben wie folgt: $0 + 0 = 0$, $1 + 0 = 0 + 1 = 1$, $1 + 1 = 0$, $0 \cdot 0 = 0$, $0 \cdot 1 = 1 \cdot 0 = 0$, $1 \cdot 1 = 1$.

a. Zeige K ist ein Körper.

b. Sei $n \in \mathbb{N}$ und sei $K_n[x]$ die Menge allen Polynomfunktionen $P : K \to K$ mit $P(x) = \sum_{\nu=0}^{n} p_\nu x^\nu$ und $p_\nu \in K$. Weiters sei in $K_n[x]$ eine Addition und skalare Multiplikation wie folgt definiert:

$$\lambda P(x) + \mu Q(x) = \lambda \sum_{\nu=0}^{n} p_\nu x^\nu + \mu \sum_{\nu=0}^{n} q_\nu x^\nu = \sum_{\nu=0}^{n} (\lambda p_\nu + \mu q_\nu)\, x^\nu \qquad \text{für } \lambda, \mu \in K.$$

(a) Zeige: $K_n[x]$ ist ein Vektorraum über K.

(b) Zeige: $K_n[x]$ ist kein Körper bzgl. der Multiplikation: $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$.

(c) Bestimme: $\#K_n[x]$.

(4) Zeige $V = \{f : [0, 1] \to \mathbb{R} | f(1/2) = 0\}$ ist ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ und $U = \{f : [0, 1] \to \mathbb{R} | f(1/2) = 0,\ f(1/3) = 0\}$ ist ein Unterraum von V.