Übungen zur Lineare Algebra I
Blatt 4 (Bis 16.11.05)
PS WiSe 05/06, Mi. 13.15 - 14.45

(1) Seien $X_i \in \mathbb{R}^3$, $X_i \neq 0$, $i = 1, 2, 3$ Vektoren, mit $(X_i, X_j) = 0$ für $i \neq j$.

a. Zeige $\{X_1, X_2, X_3\}$ ist eine Basis in $\mathbb{R}^3$.

b. Sei $\|X_i\| = 1$, $(X_i, X_j) = c$ für $i \neq j$, $0 < c < 1$. Zeige dass $\{X_1, X_2, X_3\}$ eine Basis in $\mathbb{R}^3$ ist.

(2) Seien $\{X_1, X_2, X_3\}$ und $\{Y_1, Y_2, Y_3\}$ zwei unterschiedliche Basen in $\mathbb{R}^3$. Sei $X = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i Y_i$ und $Y_i = \sum_{j=1}^{3} \rho_{ij} X_j$. Bestimme die Koordinaten von X für die Basis $\{X_1, X_2, X_3\}$.

(3) Sei $\{X_1, X_2, X_3\}$ eine Orthonormalbasis in $\mathbb{R}^3$. Seien $A = \sum_{i=1}^{3} a_i X_i$ und $B = \sum_{i=1}^{3} b_i X_i$. Zeige

a. $A \cdot B = \sum_{i=1}^{3} a_i b_i$.

b. Falls $A \perp B$ dann $\sum_{i=1}^{3} a_i b_i = 0$.

c. Gilt bezüglich einer Basis für die Koordinaten der Vektoren $A \neq 0$ und $B \neq 0$, dass die Koordinaten von A das λ-Fache der Koordinaten von B sind für ein $\lambda \in \mathbb{R}$, so gilt diese Eigenschaft für jede Basis.

(4) Seien A, B, $U \in \mathbb{R}^3$ $A \neq 0$, $B \neq 0$, $U \neq 0$ Vektoren mit $A \neq \mu B$ für alle $\mu \in \mathbb{R}$. Zeige:

$$U \perp A \wedge U \perp B \Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} \text{ so dass } A \times B = \lambda U.$$