

Klausur Lineare Algebra I
(am 25.01.2006)
PS WiSe 05/06, Mi. 13.15 - 14.45

(1) Ergänze die folgenden Vektoren e_1, e_2 zu einer Basis in \mathbb{R}^4

$$e_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(2) Sei V ein Vektorraum und $P : V \rightarrow V$ linear mit $P \circ P = P$. Zeige:

$$V = \text{Im}(P) \oplus \text{Im}(Id - P)$$

(Bemerkung: $Id(x) = x$ für alle $x \in V$.)

(3) Sei $U \subset \mathbb{R}^3$ mit

$$U = \left[\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right].$$

Bestimme eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(U) = 0$.

(4) Sei $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ gegeben mit

$$f(x, y, z) = \begin{pmatrix} x - y \\ 3x + 5y \\ 7x + 9y \end{pmatrix}$$

Bestimme eine Basis von $\text{Kern}(g)$ und $\text{Im}(g)$.