

Integral- und Differentialrechnungen für USW

Lösungen der Beispiele des 14. Übungsblatts

1. Abschätzung von Rationalen Funktionen durch Interpolation

(a) Anhand der Daten $\{(t_i, r_i)\}_{i=1}^3$

$$(1.0, 1.0), \quad (2.0, 1.5) \quad \text{und} \quad (3.0, 1.8)$$

ergeben sich die Matrix und der Vektor,

$$M = \begin{bmatrix} t_1 & 1 & -r_1 \\ t_2 & 1 & -r_2 \\ t_3 & 1 & -r_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1.0 \\ 2 & 1 & -1.5 \\ 3 & 1 & -1.8 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} t_1 r_1 \\ t_2 r_2 \\ t_3 r_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.0 \\ 3.0 \\ 5.4 \end{bmatrix}$$

(b) Der Vektor

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

erfüllt

$$M\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1.0 \\ 2 & 1 & -1.5 \\ 3 & 1 & -1.8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1, 1, -1.0) \cdot (3, 0, 2) \\ (2, 1, -1.5) \cdot (3, 0, 2) \\ (3, 1, -1.8) \cdot (3, 0, 2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.0 \\ 3.0 \\ 5.4 \end{bmatrix} = \mathbf{b}$$

Bonus: Das System $M\mathbf{a} = \mathbf{b}$ wird folgendermaßen durch Gaußsche Elimination

$$\begin{array}{l} \text{I:} \\ \text{II:} \\ \text{III:} \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1.0 & 1.0 \\ 2 & 1 & -1.5 & 3.0 \\ 3 & 1 & -1.8 & 5.4 \end{array} \right]$$

$$\begin{array}{l} \text{I:} \\ \text{II} - 2 \cdot \text{I} \rightarrow \tilde{\text{II}}: \\ \text{III} - 3 \cdot \text{I} \rightarrow \tilde{\text{III}}: \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1.0 & 1.0 \\ 0 & -1 & 0.5 & 1.0 \\ 0 & -2 & 1.2 & 2.4 \end{array} \right]$$

$$\begin{array}{l} \text{I:} \\ \tilde{\text{II}}: \\ \text{I}\tilde{\text{II}} - 2 \cdot \tilde{\text{II}} \rightarrow \hat{\text{I}}\tilde{\text{II}}: \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1.0 & 1.0 \\ 0 & -1 & 0.5 & 1.0 \\ 0 & 0 & 0.2 & 0.4 \end{array} \right]$$

und rückwärts-Substitution gelöst:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1.0 & 1.0 \\ 0 & -1 & 0.5 & 1.0 \\ 0 & 0 & 0.2 & 0.4 \end{array} \right] \Rightarrow \begin{array}{l} \Rightarrow a_1 = 1 - (+1) \cdot a_2 - (-1) \cdot a_3 = 3 \\ \Rightarrow a_2 = (1.0 - (0.5) \cdot a_3) / (-1) = 0 \quad \uparrow \\ \Rightarrow a_3 = 0.4 / 0.2 = 2 \quad \uparrow \quad \quad \quad \uparrow \end{array}$$

oder

$$a_1 = 3, \quad a_2 = 0, \quad a_3 = 2, \quad \mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Kontrolle: Mit den Mathematica Befehlen

$M = \{\{1, 1, -1.0\}, \{2, 1, -1.5\}, \{3, 1, -1.8\}\}$

$b = \{1.0, 3.0, 5.4\}$

$a = \text{Inverse}[M].b$

kommt (die gleiche Antwort wie oben) bei dem letzten Befehl heraus:

$\{3, 0, 2\}$

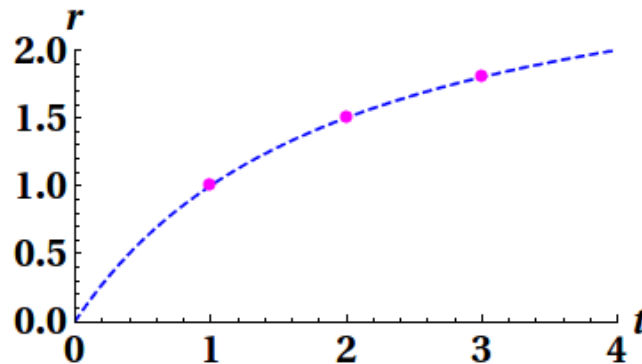
(c) Die rationale Funktion

$$r(t) = \frac{a_1 t + a_2}{t + a_3}, \quad a_1 = 3, \quad a_2 = 0, \quad a_3 = 2$$

erfüllt

$$\begin{aligned} r(t_1) = r(1) &= \frac{a_1(1) + a_2}{(1) + a_3} = \frac{3(1) + 0}{(1) + 2} = 1.0 = r_1 \\ r(t_2) = r(2) &= \frac{a_1(2) + a_2}{(2) + a_3} = \frac{3(2) + 0}{(2) + 2} = 1.5 = r_2 \\ r(t_3) = r(3) &= \frac{a_1(3) + a_2}{(3) + a_3} = \frac{3(3) + 0}{(3) + 2} = 1.8 = r_3 \end{aligned}$$

und daher sind die Interpolationsbedingungen $r(t_i) = r_i$, $i = 1, 2, 3$, erfüllt. Grafisch dargestellt werden die rationale Funktion $r(t) = 3t/(t + 2)$ blau und die Daten $\{(t_i, r_i)\}_{i=1}^3$ magentafarbig in der folgenden Grafik.



2. Abschätzung von Rationalen Funktionen durch Regression

(a) Anhand der Daten $\{(t_i, r_i)\}_{i=1}^5$

$(0.2, 0.3)$, $(0.4, 0.5)$, $(0.8, 0.9)$, $(1.6, 1.3)$ und $(3.2, 1.8)$

ergeben sich die Matrix und der Vektor

$$A = \begin{bmatrix} t_1 & 1 & -r_1 \\ t_2 & 1 & -r_2 \\ t_3 & 1 & -r_3 \\ t_4 & 1 & -r_4 \\ t_5 & 1 & -r_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.2 & 1 & -0.3 \\ 0.4 & 1 & -0.5 \\ 0.8 & 1 & -0.9 \\ 1.6 & 1 & -1.3 \\ 3.2 & 1 & -1.8 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} r_1 t_1 \\ r_2 t_2 \\ r_3 t_3 \\ r_4 t_4 \\ r_5 t_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.06 \\ 0.2 \\ 0.72 \\ 2.08 \\ 5.76 \end{bmatrix}$$

und die Produkte

$$A^T A = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.4 & 0.8 & 1.6 & 3.2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -0.3 & -0.5 & -0.9 & -1.3 & -1.8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.2 & 1 & -0.3 \\ 0.4 & 1 & -0.5 \\ 0.8 & 1 & -0.9 \\ 1.6 & 1 & -1.3 \\ 3.2 & 1 & -1.8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13.64 & 6.2 & -8.82 \\ 6.2 & 5.0 & -4.8 \\ -8.82 & -4.8 & 6.08 \end{bmatrix}$$

$$A^T \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.4 & 0.8 & 1.6 & 3.2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -0.3 & -0.5 & -0.9 & -1.3 & -1.8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.06 \\ 0.2 \\ 0.72 \\ 2.08 \\ 5.76 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22.428 \\ 8.82 \\ -13.838 \end{bmatrix}$$

(b) Der Vektor

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.821 \\ 0.03948 \\ 1.847 \end{bmatrix}$$

erfüllt

$$\begin{aligned} A^T A \mathbf{a} &= \begin{bmatrix} 13.64 & 6.2 & -8.82 \\ 6.2 & 5.0 & -4.8 \\ -8.82 & -4.8 & 6.08 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2.821 \\ 0.03948 \\ 1.847 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (13.64, 6.2, -8.82) \cdot (2.821, 0.03948, 1.847) \\ (6.2, 5.0, -4.8) \cdot (2.821, 0.03948, 1.847) \\ (-8.82, -4.8, 6.08) \cdot (2.821, 0.03948, 1.847) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22.428 \\ 8.82 \\ -13.838 \end{bmatrix} = A^T \mathbf{b} \end{aligned}$$

Bonus: Das System $A^T A \mathbf{a} = A^T \mathbf{b}$ wird folgendermaßen durch Gaußsche Elimination

$$\begin{array}{l} \text{I:} \\ \text{II:} \\ \text{III:} \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 13.64 & 6.2 & -8.82 & 22.428 \\ 6.2 & 5.0 & -4.8 & 8.82 \\ -8.82 & -4.8 & 6.08 & -13.838 \end{array} \right]$$

$$\begin{array}{l} \text{I:} \\ \text{II} - \frac{6.2}{13.64} \text{I} \rightarrow \tilde{\text{II}}: \\ \text{III} - \frac{-8.82}{13.64} \cdot \text{I} \rightarrow \tilde{\text{III}}: \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 13.64 & 6.2 & -8.82 & 22.428 \\ 0 & 2.182 & -0.7909 & -1.3746 \\ 0 & -0.7909 & 0.3767 & 0.6646 \end{array} \right]$$

$$\begin{array}{l} \text{I:} \\ \tilde{\text{II}}: \\ \text{III} - \frac{-0.7909}{2.182} \cdot \tilde{\text{II}} \rightarrow \hat{\text{III}}: \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 13.64 & 6.2 & -8.82 & 22.428 \\ 0 & 2.182 & -0.7909 & -1.3746 \\ 0 & 0 & 0.090067 & 0.16634 \end{array} \right]$$

und rückwärts-Substitution gelöst:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 13.64 & 6.2 & -8.82 & 22.428 \\ 0 & 2.182 & -0.7909 & -1.3746 \\ 0 & 0 & 0.090067 & 0.16634 \end{array} \right] \Rightarrow a_1 = (22.428 - (-8.82)a_3 - (6.2)a_2)/13.64 = 2.82$$

$$\Rightarrow a_2 = (-1.3746 - (-0.7909)a_3)/2.182 \stackrel{\uparrow}{=} 0.0395$$

$$\Rightarrow a_3 = 0.16634/0.090067 = 1.847 \quad \uparrow$$

oder

$$a_1 = 2.82, \quad a_2 = 0.0395, \quad a_3 = 1.847, \quad \mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.82 \\ 0.0395 \\ 1.847 \end{bmatrix}$$

Kontrolle: Mit den Mathematica Befehlen

$A = \{\{0.2, 1, -0.3\}, \{0.4, 1, -0.5\}, \{0.8, 1, -0.9\}, \{1.6, 1, -1.3\}, \{3.2, 1, -1.8\}\}$

$\mathbf{b} = \{0.06, 0.2, 0.72, 2.08, 5.76\}$

$\mathbf{a} = \text{Inverse}[\text{Transpose}[A] \cdot A] \cdot (\text{Transpose}[A] \cdot \mathbf{b})$

kommt (die gleiche Antwort wie oben) bei dem letzten Befehl heraus:

$\{2.82056, 0.0394805, 1.84684\}$

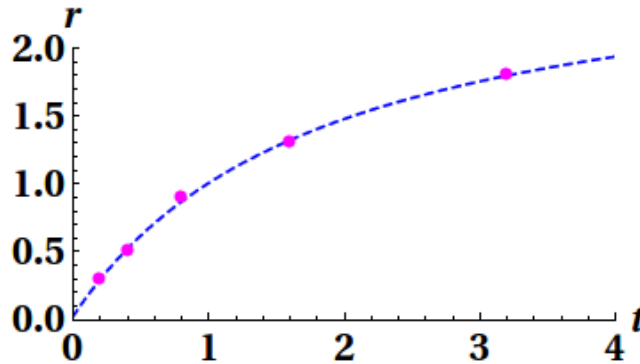
(c) Die rationale Funktion

$$r(t) = \frac{a_1 t + a_2}{t + a_3}, \quad a_1 = 2.82056, \quad a_2 = 0.0394805, \quad a_3 = 1.84684$$

erfüllt

$$\begin{aligned} r(t_1) = r(0.2) &= \frac{a_1(0.2) + a_2}{(0.2) + a_3} = \frac{2.82056(0.2) + 0.0394805}{(0.2) + 1.84684} = 0.294889 \approx r_1 = 0.3 \\ r(t_2) = r(0.4) &= \frac{a_1(0.4) + a_2}{(0.4) + a_3} = \frac{2.82056(0.4) + 0.0394805}{(0.4) + 1.84684} = 0.519708 \approx r_2 = 0.5 \\ r(t_3) = r(0.8) &= \frac{a_1(0.8) + a_2}{(0.8) + a_3} = \frac{2.82056(0.8) + 0.0394805}{(0.8) + 1.84684} = 0.86742 \approx r_3 = 0.9 \\ r(t_4) = r(1.6) &= \frac{a_1(1.6) + a_2}{(1.6) + a_3} = \frac{2.82056(1.6) + 0.0394805}{(1.6) + 1.84684} = 1.32074 \approx r_4 = 1.3 \\ r(t_5) = r(3.2) &= \frac{a_1(3.2) + a_2}{(3.2) + a_3} = \frac{2.82056(3.2) + 0.0394805}{(3.2) + 1.84684} = 1.79622 \approx r_5 = 1.8 \end{aligned}$$

und daher sind die Differenzen $\{|r(t_i) - r_i|\}_{i=1}^5 = \{0.005, 0.02, 0.03, 0.02, 0.004\}$ alle klein. Grafisch dargestellt werden die rationale Funktion $r(t) = (a_1 t + a_2)/(t + a_3)$ blau und die Daten $\{(t_i, r_i)\}_{i=1}^5$ magentafarbig in der folgenden Grafik.



3. Abschätzung von Exponentiellen Funktionen durch Interpolation

(a) Anhand der Daten

$$(0.0, 10.0), \quad (1.0, 5.50) \quad \text{und} \quad (2.0, 3.25)$$

der exponentiellen Funktion $T(t) = \alpha + \beta e^{\nu t}$ folgt mit der Bedingung des ersten Datenpunkts

$$10 = T(0) = \alpha + \beta e^{0\nu} \quad \text{oder} \quad \beta = 10 - \alpha$$

und die Bedingungen der anderen Datenpunkte

$$5.50 = T(1) = \alpha + \beta e^{\nu} \quad \text{und} \quad 3.25 = T(2) = \alpha + \beta e^{2\nu}$$

lassen sich ohne β so umschreiben,

$$5.50 = \alpha + (10 - \alpha)e^{\nu} \quad \text{und} \quad 3.25 = \alpha + (10 - \alpha)e^{2\nu}$$

oder

$$5.50 - 10e^{\nu} = \alpha(1 - e^{\nu}) \quad \text{und} \quad 3.25 - 10e^{2\nu} = \alpha(1 - e^{2\nu})$$

(b) Die letzten 2 Gleichungen lassen sich folgendermaßen kombinieren,

$$\alpha = \frac{5.50 - 10e^\nu}{1 - e^\nu} = \frac{3.25 - 10e^{2\nu}}{1 - e^{2\nu}}$$

oder

$$\frac{20e^\nu - 11}{2(e^\nu - 1)} = \left(\frac{-2}{-2}\right) \cdot \frac{5.50 - 10e^\nu}{1 - e^\nu} = \frac{3.25 - 10e^{2\nu}}{1 - e^{2\nu}} \cdot \left(\frac{-4}{-4}\right) = \frac{40e^{2\nu} - 13}{4(e^{2\nu} - 1)}$$

Mit $x = e^\nu$ und daher $x^2 = e^{2\nu}$ folgt

$$\alpha = \frac{20x - 11}{2(x - 1)} = \frac{40x^2 - 13}{4(x^2 - 1)}$$

oder

$$0 = \frac{20x - 11}{2(x - 1)} - \frac{40x^2 - 13}{4(x^2 - 1)} = \frac{18x - 9}{4(x^2 - 1)}$$

(c) Aus der letzten Gleichung folgt die Lösung

$$x = 1/2 \quad \text{oder mit } e^\nu = x, \quad \nu = \ln(x) = \ln(2^{-1}) = -\ln(2)$$

Aus der obigen Beziehung zwischen α und $x = 1/2$ folgt

$$\alpha = \frac{20x - 11}{2(x - 1)} = 1$$

Aus der obigen Bedingung zwischen β und $\alpha = 1$ folgt

$$\beta = 10 - \alpha = 9$$

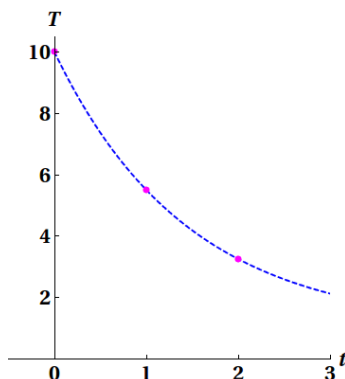
(d) Die exponentielle Funktion

$$T(t) = \alpha + \beta e^{\nu t} = 1 + 9e^{-\ln(2)t} = 1 + 9e^{\ln(2^{-t})} = 1 + 9 \cdot 2^{-t}$$

erfüllt

$$\begin{aligned} T(t_1) = T(0) &= 1 + 9 \cdot 2^{-0} = 10 = T_1 \\ T(t_2) = T(1) &= 1 + 9 \cdot 2^{-1} = 5.5 = T_2 \\ T(t_3) = T(2) &= 1 + 9 \cdot 2^{-2} = 3.25 = T_3 \end{aligned}$$

und daher sind die Interpolationsbedingungen $T(t_i) = T_i$, $i = 1, 2, 3$, erfüllt. Grafisch dargestellt werden die exponentielle Funktion $T(t) = 1 + 9 \cdot 2^{-t}$ blau und die Daten $\{(t_i, T_i)\}_{i=1}^3$ magentafarbig in der folgenden Grafik.



4. Abschätzung von Exponentiellen Funktionen durch Regression

(a) Die rohen und transformierten Daten sind

i	1	2	3	4	5
s_i	0.0	0.5	1.0	1.5	2.0
v_i	10.0	7.1	5.0	3.6	2.5
$x_i = s_i$	0.0	0.5	1.0	1.5	2.0
$y_i = \ln(v_i)$	2.30	1.96	1.61	1.28	0.916

(b) Wie auf dem 12. Übungsblatt gezeigt, wird die Summe der Quadrate

$$E(k, d) = \sum_{i=1}^4 [(kx_i + d) - y_i]^2$$

global minimiert in

$$k^* = \frac{\overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2}, \quad d^* = \bar{y} - k^* \bar{x}$$

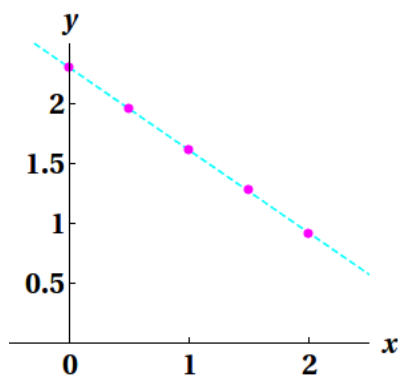
Anhand der (x, y) -Daten sind die gemittelten Werte gegeben durch

$$\begin{aligned} \bar{x} &= (0.0 + 0.5 + 1.0 + 1.5 + 2.0)/5 = 1.0 \\ \bar{y} &= (2.30 + 1.96 + 1.61 + 1.28 + 0.916)/5 = 1.614 \\ \overline{x^2} &= (0.0^2 + 0.5^2 + 1.0^2 + 1.5^2 + 2.0^2)/5 = 1.5 \\ \overline{xy} &= (0.0 \cdot 2.30 + 0.5 \cdot 1.96 + 1.0 \cdot 1.61 + 1.5 \cdot 1.28 + 2.0 \cdot 0.916)/5 = 1.269 \end{aligned}$$

und die für $E(k, d)$ minimierenden Parameter sind

$$k^* = \frac{1.269 - 1.0 \cdot 1.614}{1.5 - 1.0^2} = -0.69, \quad d^* = 1.615 - (-0.69) \cdot 1.0 = 2.3$$

Grafisch dargestellt werden die Gerade $y(x) = k^*x + d^*$ zyanfarbig und die (x, y) -Daten $\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^5$ magentafarbig in der folgenden Grafik.



Die y -Werte der Daten und der abgeschätzten Gerade sind

i	1	2	3	4	5
x_i	0.0	0.5	1.0	1.5	2.0
$y_i = \ln(v_i)$	2.30	1.96	1.61	1.28	0.916
$y(x_i)$	2.304	1.959	1.614	1.269	0.9235

Wie man von der Tabelle und von der Grafik sieht, sind die Differenzen $\{|y(x_i) - y_i|\}_{i=1}^5 = \{0.0016, 0.0011, 0.0044, 0.0122, 0.00723\}$ alle klein.

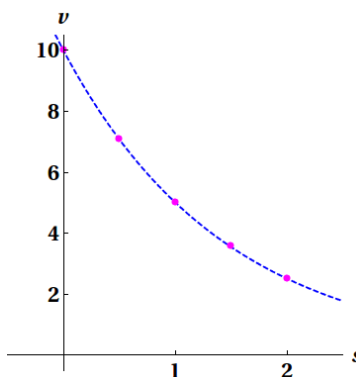
(c) Mit

$$\ln(v) = y = k^*x + d^* = k^*s + \ln(c^*), \quad c^* = e^{d^*} = 10.0$$

ergibt sich die Exponentialfunktion $v(s) = c^*e^{k^*s}$ durch die exponentielle Transformation

$$v = \exp(y) = \exp(k^*x + d^*) = e^{k^*s}e^{\ln(c^*)} = c^*e^{k^*s}, \quad c^* = 10.0, \quad k^* = -0.69$$

Grafisch dargestellt werden die Exponentialfunktion $v(s) = c^*e^{k^*s}$ blau und die (s, v) -Daten $\{(s_i, v_i)\}_{i=1}^5$ magentafarbig in der folgenden Grafik.



Die v -Werte der Daten und der abgeschätzten Exponentialfunktion sind

i	1	2	3	4	5
s_i	0.0	0.5	1.0	1.5	2.0
v_i	10.0	7.1	5.0	3.6	2.5
$v(s_i)$	10.0	7.0822	5.01576	3.55226	2.51579

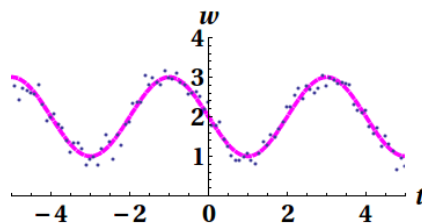
Wie man von der Tabelle und von der Grafik sieht, sind die Differenzen $\{|v(s_i) - v_i|\}_{i=1}^5 = \{0.0, 0.018, 0.016, 0.048, 0.016\}$ alle klein.

5. Abschätzung von Winkelfunktionen

Um die Parameter $\{a, b, c, \omega\}$ der Winkelfunktion

$$w(t) = c + a \sin[2\pi\omega(t - b)]$$

von der grafisch dargestellten Daten zu bestimmen



merkt man zuerst, die Daten schwanken zwischen $w = 1$ und $w = 3$ mit Mittelwert $w = 2$. Daher folgen

$$c = \text{Mittelwert der } w\text{-Werte} = 2$$

$$a = \text{Abweichung der } w\text{-Werte von } c, \text{ Amplitude} = 1$$

Weiters merkt man benachbarte Hügelgipfel bei $t = -1$ und $t = 3$. Daher ist die Periode gegeben durch $3 - (-1) = 4$, und

$$\begin{aligned} 1/\omega &= \text{Periode} = 4 \text{ oder} \\ \omega &= 1/4 \end{aligned}$$

Schließlich merkt man einen Wendepunkt z.B. bei $t = -2$ (auch bei $t = +2$), in dem die Daten steigend sind. Daher folgt

$$b = t\text{-Stelle bei einem steigenden Wendepunkt} = -2$$

Zusammengefasst ist die Abschätzung der Winkelfunktion gegeben durch

$$w(t) = 1 + \sin[2\pi(t + 2)/4]$$