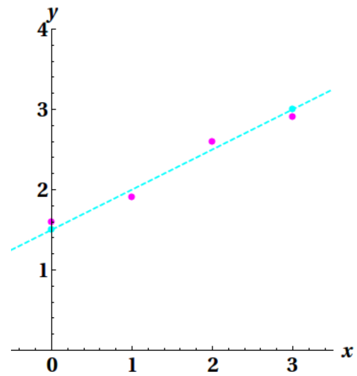
Integral- und Differentialrechnungen für USW
Lösungen der Beispiele des 13. Übungsblatts

1. Abschätzung von Geraden

   (a) Die magentafarbigen Punkte in der folgenden Grafik



stellen die Daten

$$(0, 1.6), \quad (1, 1.9), \quad (2, 2.6) \quad \text{und} \quad (3, 2.9)$$

in $\mathbb{R}^2$ grafisch dar. Zwei weitere Punkte

$$P = (0, 1.5) \quad \text{und} \quad Q = (3, 3)$$

liegen ungefähr auf der gleichen Gerade wie die dargestellten Punkte. Diese Punkte P und Q sind zyanfarbig in der obigen Grafik. Die Gerade durch P und Q hat Steigung

$$\tilde{k} = \frac{3 - 1.5}{3 - 0} = 0.5.$$

Da der Punkt $Q = (3, 3)$ in der Gerade liegt, lässt sich die Gerade mit der Formel $(y - 3) = \tilde{k}(x - 3)$ oder $y = 3 + (x - 3)/2$ darstellen. Daher mit

$$\tilde{d} = 1.5$$

ist die Gerade gegeben durch $y(x) = \tilde{k}x + \tilde{d}$. Diese Gerade ist zyanfarbig in der obigen Grafik. Die y-Werte der Daten und der abgeschätzen Gerade sind

i	1	2	3	4
x_i	0	1	2	3
y_i	1.6	1.9	2.6	2.9
$y(x_i)$	1.5	2.0	2.5	3.0

Wie man von der Tabelle und von der Grafik sieht, sind die Differenzen $\{|y(x_i) - y_i|\}_{i=1}^4 = \{0.1, 0.1, 0.1, 0.1\}$ alle klein.

(b) Wie auf dem 12. Übungsblatt gezeigt, wird die Summe der Quadrate

$$E(k,d) = \sum_{i=1}^{4} [(kx_i + d) - y_i]^2$$

global minimiert in

$$k^* = \frac{\overline{xy} - \overline{x} \cdot \overline{y}}{\overline{x^2} - \overline{x}^2}, \quad d^* = \overline{y} - k^* \overline{x}$$

Anhand der gegebenen Daten

$$(0, 1.6), \quad (1, 1.9), \quad (2, 2.6) \quad \text{und} \quad (3, 2.9)$$

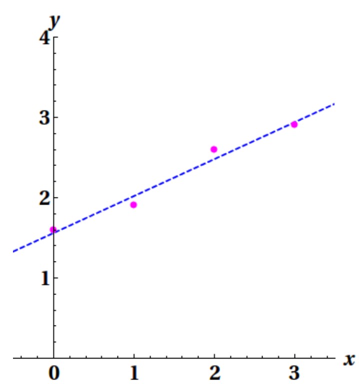
sind die gemittelten Werte gegeben durch

$$\begin{aligned}
\overline{x} &= (0 + 1 + 2 + 3)/4 = 1.5 \\
\overline{y} &= (1.6 + 1.9 + 2.6 + 2.9)/4 = 2.25 \\
\overline{x^2} &= (0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2)/4 = 3.5 \\
\overline{xy} &= (0 \cdot 1.6 + 1 \cdot 1.9 + 2 \cdot 2.6 + 3 \cdot 2.9)/4 = 3.95
\end{aligned}$$

und die für $E(k,d)$ minimierenden Parameter sind

$$k^* = \frac{3.95 - 1.5 \cdot 2.25}{3.5 - 1.5^2} = 0.46, \quad d^* = 2.25 - 0.46 \cdot 1.5 = 1.56$$

Grafisch dargestellt werden die Gerade $y = k^* x + d^*$ blau und die obigen Daten magentafarbig in der folgenden Grafik.



Die y-Werte der Daten und der abgeschätzen Gerade sind

i	1	2	3	4
x_i	0	1	2	3
y_i	1.6	1.9	2.6	2.9
$y(x_i)$	1.56	2.02	2.48	2.94

Wie man von der Tabelle und von der Grafik sieht, sind die Differenzen $\{|y(x_i) - y_i|\}_{i=1}^4 = \{0.04, 0.12, 0.12, 0.04\}$ alle klein.

(c) Die Zielfunktion $E(k,d)$ ausgewertet in $(\tilde{k}, \tilde{d})$ und (k^*, d^*) ist

$$E(k^*, d^*) = 0.032 < 0.04 = E(\tilde{k}, \tilde{d})$$

Bemerkung: Die Zielfunktion

$$F(k,d) = \sum_{i=1}^{4} |(kx_i + d) - y_i|$$

ist robuster gegenüber Ausreißer, d.h. die für $F(k,d)$ minimierenden Parameter werden von einer starken Störung eines Datenpunkts nicht stark beeinflusst. Auf der anderen Seite ist $F(k,d)$ schwieriger zu minimieren als $E(k,d)$.

2. Abschätzung von Potenzfunktionen

(a) Die rohen und transformierten Daten sind

i	1	2	3	4
s_i	1	4	9	16
u_i	0.4	1.1	1.4	2.1
$x_i = \ln(s_i)$	0.00	1.39	2.20	2.77
$y_i = \ln(u_i)$	-0.916	0.0953	0.336	0.742

(b) Wie auf dem 12. Übungsblatt gezeigt, wird die Summe der Quadrate

$$E(k,d) = \sum_{i=1}^{4} [(kx_i + d) - y_i]^2$$

global minimiert in

$$k^* = \frac{\overline{xy} - \overline{x} \cdot \overline{y}}{\overline{x^2} - \overline{x}^2}, \quad d^* = \overline{y} - k^* \overline{x}$$

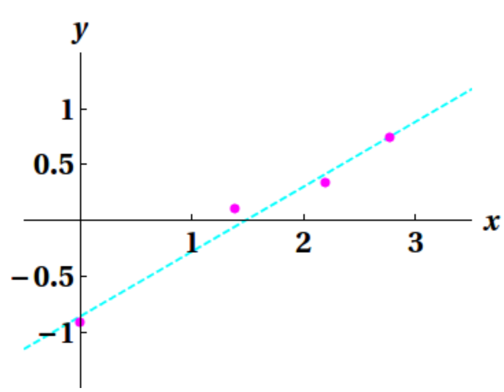
Anhand der (x,y)-Daten sind die gemittelten Werte gegeben durch

$$\begin{aligned}
\overline{x} &= (0.00 + 1.39 + 2.20 + 2.77)/4 = 1.59 \\
\overline{y} &= (-0.916 + 0.0953 + 0.336 + 0.742)/4 = 0.0644 \\
\overline{x^2} &= (0.00^2 + 1.39^2 + 2.20^2 + 2.77^2)/4 = 3.61 \\
\overline{xy} &= (-0.00 \cdot 0.916 + 1.39 \cdot 0.0953 + 2.20 \cdot 0.336 + 2.77 \cdot 0.742)/4 = 0.732
\end{aligned}$$

und die für $E(k,d)$ minimierenden Parameter sind

$$k^* = \frac{0.732 - 1.59 \cdot 0.0644}{3.61 - 1.59^2} = 0.581, \quad d^* = 0.0644 - 0.581 \cdot 1.59 = -0.859$$

Grafisch dargestellt werden die Gerade $y(x) = k^*x + d^*$ zyanfarbig und die (x,y)-Daten $\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^{4}$ magentafarbig in der folgenden Grafik.



Die y-Werte der Daten und der abgeschätzen Gerade sind

i	1	2	3	4
x_i	0.00	1.39	2.20	2.77
y_i	-0.916	0.0953	0.336	0.742
$y(x_i)$	-0.859	-0.0534	0.418	0.752

Wie man von der Tabelle und von der Grafik sieht, sind die Differenzen $\{|y(x_i) - y_i|\}_{i=1}^4 = \{0.06, 0.1, 0.08, 0.01\}$ alle klein.

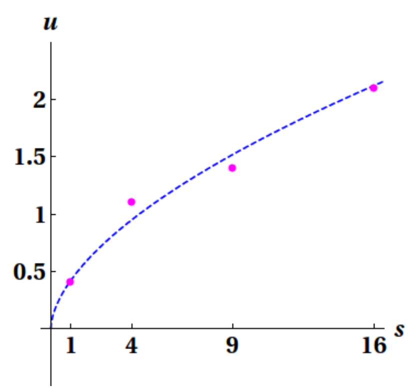
(c) Mit

$$\ln(u) = y = k^* x + d^* = k^* \ln(s) + \ln(c^*), \quad c^* = e^{d^*} = 0.424$$

ergibt sich die Potenzfunktion $u(s) = c^* s^{k^*}$ durch die exponentielle Transformation

$$u = \exp(y) = \exp(k^* x + d^*) = e^{k^* \ln(s)} e^{\ln(c^*)} = c^* e^{\ln(s^{k^*})} = c^* s^{k^*}, \quad c^* = 0.424, \quad k^* = 0.581$$

Grafisch dargestellt werden die Potenzfunktion $u(s) = c^* s^{k^*}$ blau und die (s, u)-Daten $\{(s_i, u_i)\}_{i=1}^4$ magentafarbig in der folgenden Grafik.



Die u-Werte der Daten und der abgeschätzen Potenzfunktion sind

i	1	2	3	4
s_i	1	4	9	16
u_i	0.4	1.1	1.4	2.1
$u(s_i)$	0.424	0.948774	1.51978	2.12305

Wie man von der Tabelle und von der Grafik sieht, sind die Differenzen $\{|u(s_i) - u_i|\}_{i=1}^4 = \{0.024, 0.15, 0.12, 0.023\}$ alle klein.

3. Abschätzung von Polynomen durch Interpolation

(a) Anhand der Daten $\{(x_i, p_i)\}_{i=1}^3$

$$(-1, 3), \quad (0, 1) \quad \text{und} \quad (1, 1)$$

ergeben sich die Matrix und der Vektor,

$$M = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & +1 & 1 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{p} = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(b) Der Vektor

$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

erfüllt

$$M\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & +1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1,-1,1)\cdot(1,-1,1) \\ (1,0,0)\cdot(1,-1,1) \\ (1,1,1)\cdot(1,-1,1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \boldsymbol{p}$$

Bonus: Das System $M\boldsymbol{a} = \boldsymbol{p}$ wird folgendermaßen durch Gaußsche Elimination

$$\begin{array}{r} \text{I:} \\ \text{II:} \\ \text{III:} \end{array} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} \text{I:} \\ \text{II} - \text{I} \to \tilde{\text{II}}: \\ \text{III} - \text{I} \to \tilde{\text{III}}: \end{array} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} \text{I:} \\ \tilde{\text{II}}: \\ \tilde{\text{III}} - 2\cdot\tilde{\text{II}} \to \hat{\text{III}}: \end{array} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right]$$

und rückwärts-Substitution gelöst:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right] \quad \begin{array}{r} \Rightarrow a_0 = 3 - (-1)\cdot a_1 - (+1)\cdot a_2 = 1 \\ \Rightarrow a_1 = -2 - (-1)\cdot a_2 = -1 \;\uparrow \qquad\qquad\quad \\ \Rightarrow a_2 = 2/2 = 1 \qquad\quad \uparrow \qquad\qquad\qquad\qquad \uparrow \end{array}$$

oder

$$a_0 = 1, \quad a_1 = -1, \quad a_2 = 1, \quad \boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Kontrolle: Mit den Mathematica Befehlen

```
M = {{1, -1, 1}, {1, 0, 0}, {1, 1, 1}}
p = {3, 1, 1}
a = Inverse[M].p
```

kommt (die gleiche Antwort wie oben) bei dem letzten Befehl heraus:

```
{1, -1, 1}
```

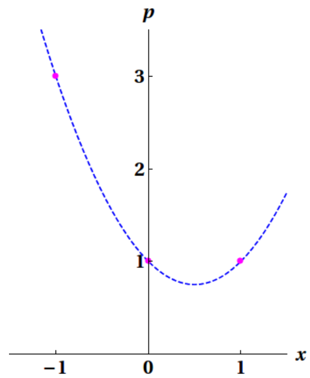
(c) Das Polynom

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2, \quad a_0 = 1, \quad a_1 = -1, \quad a_2 = 1$$

erfüllt

$$\begin{array}{llllll} p(x_1) = p(-1) & = a_0 + a_1\cdot(-1) + a_2\cdot(-1)^2 & = 1 - 1\cdot(-1) + 1\cdot(-1)^2 & = 3 & = p_1 \\ p(x_2) = p(0) & = a_0 + a_1\cdot 0 + a_2\cdot 0^2 & = 1 + 0 & = 1 & = p_2 \\ p(x_3) = p(+1) & = a_0 + a_1\cdot(+1) + a_2\cdot(+1)^2 & = 1 - 1\cdot(+1) + 1\cdot(+1)^2 & = 1 & = p_3 \end{array}$$

und daher sind die Interpolationsbedingungen $p(x_i) = p_i$, $i = 1, 2, 3$, erfüllt. Grafisch dargestellt werden das Polynom $p(x) = 1 - x + x^2$ blau und die Daten $\{(x_i, p_i)\}_{i=1}^3$ magentafarbig in der folgenden Grafik.



4. Abschätzung von Polynomen durch Regression

(a) Anhand der Daten $\{(x_i, p_i)\}_{i=1}^5$,

$$(-2.0, 6.9), \quad (-1.0, 3.1), \quad (0.0, 0.9), \quad (1.0, 1.1) \quad \text{und} \quad (2.0, 2.9)$$

ergeben sich die Matrix und der Vektor,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \\ 1 & x_4 & x_4^2 \\ 1 & x_5 & x_5^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & +1 & 1 \\ 1 & +2 & 4 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{p} = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6.9 \\ 3.1 \\ 0.9 \\ 1.1 \\ 2.9 \end{bmatrix}$$

und die Produkte

$$A^\top A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & +1 & +2 \\ 4 & 1 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & +1 & 1 \\ 1 & +2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 10 \\ 0 & 10 & 0 \\ 10 & 0 & 34 \end{bmatrix}$$

$$A^\top \boldsymbol{p} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & +1 & +2 \\ 4 & 1 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6.9 \\ 3.1 \\ 0.9 \\ 1.1 \\ 2.9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14.9 \\ -10.0 \\ 43.4 \end{bmatrix}$$

(b) Der Vektor

$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.04 \\ -1.00 \\ 0.971 \end{bmatrix}$$

erfüllt

$$A^\top A \boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 10 \\ 0 & 10 & 0 \\ 10 & 0 & 34 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.04 \\ -1.00 \\ 0.971 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (5,0,10) \cdot (1.04, -1.00, 0.971) \\ (0,10,0) \cdot (1.04, -1.00, 0.971) \\ (10,0,34) \cdot (1.04, -1.00, 0.971) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14.9 \\ -10.0 \\ 43.4 \end{bmatrix} = A^\top \boldsymbol{p}$$

Bonus: Das System $A^\top A\boldsymbol{a} = A^\top \boldsymbol{p}$ wird folgendermaßen durch Gaußsche Elimination

$$\begin{array}{r} \text{I:} \\ \text{II:} \\ \text{III:} \end{array} \left[\begin{array}{rrr|r} 5 & 0 & 10 & 14.9 \\ 0 & 10 & 0 & -10.0 \\ 10 & 0 & 34 & 43.4 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{r} \text{I:} \\ \text{II:} \\ \text{III} - 2\cdot\text{I} \to \tilde{\text{III}}: \end{array} \left[\begin{array}{rrr|r} 5 & 0 & 10 & 14.9 \\ 0 & 10 & 0 & -10.0 \\ 0 & 0 & 14 & 13.6 \end{array}\right]$$

und rückwärts-Substitution gelöst:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 5 & 0 & 10 & 14.9 \\ 0 & 10 & 0 & -10.0 \\ 0 & 0 & 14 & 13.6 \end{array}\right] \quad \begin{array}{r} \Rightarrow a_0 = (14.9 - (10)\cdot a_2)/5 = 1.04 \\ \Rightarrow a_1 = -10.0/10 = -1.00 \qquad\quad \\ \Rightarrow a_2 = 13.6/14 = 0.971 \qquad\qquad \uparrow \end{array}$$

oder

$$a_0 = 1.04, \quad a_1 = -1.00, \quad a_2 = 1.04, \quad \boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.04 \\ -1.00 \\ 0.971 \end{bmatrix}$$

Kontrolle: Mit den Mathematica Befehlen:

```
A = {{1, -2, 4}, {1, -1, 1}, {1, 0, 0}, {1, 1, 1}, {1, 2, 4}}
b = {6.9, 3.1, 0.9, 1.1, 2.9}
a = Inverse[Transpose[A].A].(Transpose[A].b)
```

kommt (die gleiche Antwort wie oben) bei dem letzten Befehl heraus:

```
{1.03714, -1., 0.971429}
```

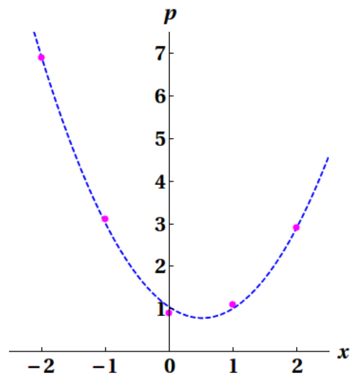
(c) Das Polynom

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2, \quad a_0 = 1.04, \quad a_1 = -1.00, \quad a_2 = 0.971$$

erfüllt

$$\begin{array}{lll} p(x_1) = p(-2) & = a_0 + a_1\cdot(-2) + a_2\cdot(-2)^2 & \\ & = 1.04 - 1.00\cdot(-2) + 0.971\cdot(-2)^2 & = 6.92 \approx p_1 = 6.9 \\ p(x_2) = p(-1) & = a_0 + a_1\cdot(-1) + a_2\cdot(-1)^2 & \\ & = 1.04 - 1.00\cdot(-1) + 0.971\cdot(-1)^2 & = 3.01 \approx p_2 = 3.1 \\ p(x_3) = p(0) & = a_0 + a_1\cdot(0) + a_2\cdot(0)^2 & \\ & = 1.04 & = 1.04 \approx p_3 = 0.9 \\ p(x_4) = p(+1) & = a_0 + a_1\cdot(+1) + a_2\cdot(+1)^2 & \\ & = 1.04 - 1.00\cdot(+1) + 0.971\cdot(+1)^2 & = 1.01 \approx p_4 = 1.1 \\ p(x_5) = p(+2) & = a_0 + a_1\cdot(+2) + a_2\cdot(+2)^2 & \\ & = 1.04 - 1.00\cdot(+2) + 0.971\cdot(+2)^2 & = 2.92 \approx p_5 = 2.9 \end{array}$$

und daher sind die Differenzen $\{|p(x_i) - p_i|\}_{i=1}^5 = \{0.02, 0.09, 0.14, 0.09, 0.02\}$ alle klein. Grafisch dargestellt werden das Polynom $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ blau und die Daten $\{(x_i, p_i)\}_{i=1}^5$ magentafarbig in der folgenden Grafik.



p
7
6
5
4
3
2
1
x
−2
−1
0
1
2