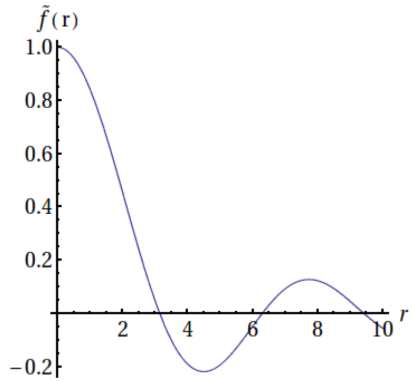
Integral- und Differentialrechnungen für USW
Lösungen der Beispiele des 11. Übungsblatts

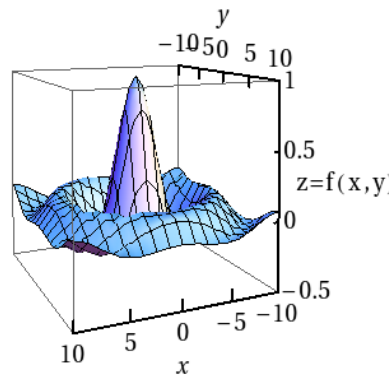
1. Rotationsflächen

   (a) Die grafische Darstellung der Funktion einer einzigen Variable

   $$\tilde{f}(r) = \frac{\sin(r)}{r}, \quad r > 0, \quad \tilde{f}(0) = 1$$

   steht unten links





   und die grafische Darstellung der Drehung dieser Kurve rund um die z-Achse

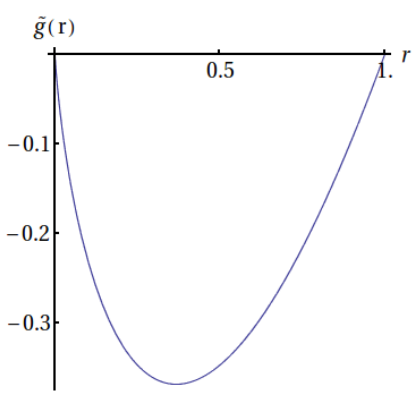
   $$f(x,y) = \frac{\sin(\sqrt{x^2+y^2})}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad (x,y) \neq (0,0), \quad f(0,0) = 1$$

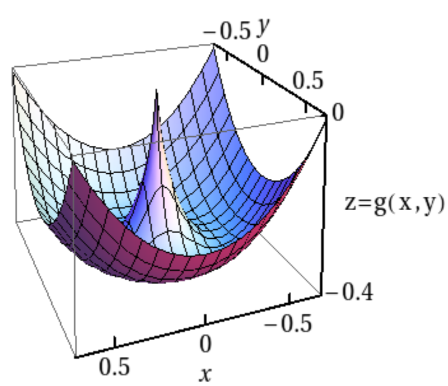
   steht oben rechts. Es gibt keine Sprünge, keine Unendlichkeiten und keine unendlich schnellen Schwingungen in der Grafik. Mit der stetigen Ergänzung $\tilde{f}(0) = 0$ und analog $f(0,0) = 0$ sind beide Funktionen überall stetig. Da es eine eindeutige Tangentenebene in jedem Punkt $(x, y, f(x,y))$ gibt, ist die Funktion $f(x,y)$ differenzierbar und folglich partiell differenzierbar.

   (b) Die grafische Darstellung der Funktion einer einzigen Variable

   $$\tilde{g}(r) = r\ln(r), \quad r > 0, \quad \tilde{g}(0) = 1$$

   steht unten links





und die grafische Darstellung der Drehung dieser Kurve rund um die z-Achse

$$g(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}\,\ln(\sqrt{x^2+y^2}), \quad (x,y) \neq (0,0), \quad g(0,0) = 1$$

steht oben rechts. Es gibt keine Sprünge, keine Unendlichkeiten und keine unendlich schnellen Schwingungen in der Grafik. Mit der stetigen Ergänzung $\tilde{g}(0) = 0$ und analog $g(0,0) = 0$ sind beide Funktionen überall stetig. Da es eine eindeutige Tangentenebene in jedem Punkt $(x, y, f(x,y))$, $(x,y) \neq (0,0)$, gibt, ist die Funktion $g(x,y)$ differenzierbar und folglich partiell differenzierbar $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ mit $(x,y) \neq (0,0)$, aber in $(x,y) = (0,0)$ ist $g(x,y)$ nur stetig.

2. Stetigkeit und Partielle Differenzierbarkeit

Für die Funktion

$$f(x,y) = \frac{2yx^2}{x^4+y^2}, \quad (x,y) \neq (0,0), \quad f(0,0) = 0$$

ist der Grenzwert $(x,y) \to (0,0)$ entlang einer Kurve $y = kx^2$, $k \in \mathbb{R}$, gegeben durch

$$\lim_{(x,y=kx^2)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{x\to 0} f(x,kx^2) = \lim_{x\to 0} \frac{2kx^2x^2}{x^4+k^2x^4}\left(\frac{x^{-4}}{x^{-4}}\right) = \frac{2k}{1+k^2}$$

Da dieser Grenzwert entlang der Kurve von k abhängt, gibt es keinen eindeutigen Wert L, der von $f(x,y)$ angenähert wird, während $(0,0)$ von (x,y) *beliebig* angenähert wird. Daher existiert der allgemeine Grenzwert nicht. Außerdem stimmt kein einziger dieser k-abhängigen Grenzwerte mit dem Funktionswert $f(0,0) = 0$ überein. Daher ist die Funktion an der Stelle $(0,0)$ nicht stetig.

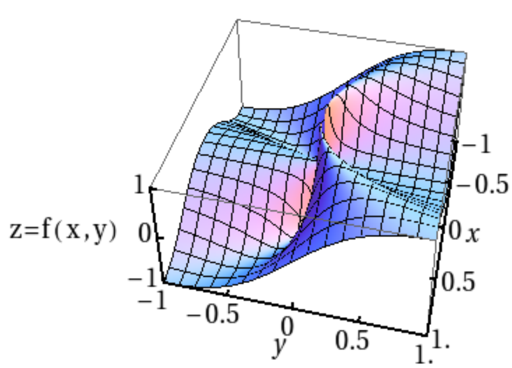
Auf der anderen Seite existieren die folgenden Grenzwerte der Differenzenquotienten

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{2\cdot 0\cdot h^2}{h^4+0^2} - 0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{2h\cdot 0^2}{0^4+h^2} - 0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0$$

und daher ist die Funktion in $(0,0)$ partiell differenzierbar!

Die grafische Darstellung der Funktion ist:



3. Tangentenebene

(a) Die partiellen Ableitungen der Funktion

$$f(x,y) = \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2}$$

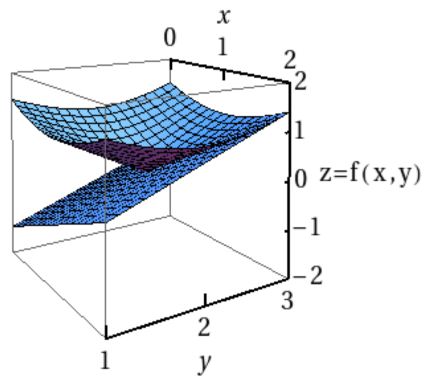
sind

$$f_x(x,y) = \frac{x-1}{\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}}, \quad f_y(x,y) = \frac{y-2}{\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}}$$

Die Tangenteneben durch den Punkt $(2, 3, \sqrt{2})$ ist

$$z = f(2,3) + f_x(2,3)(x-2) + f_y(2,3)(y-3) = \sqrt{2} + (x-2)/\sqrt{2} + (y-3)/\sqrt{2}$$

Die grafische Darstellung der Funktion zusammen mit dieser Tangentenebene ist



Die Fläche ist kegelförmig, und daher ist die Tangentenebene auch tangent entlang einer ganzen Gerade in der Kegel.

Wegen des Knicks im Scheitel der Kegel gibt es keine eindeutige Tangentenebene durch $(1,2,0)$. Daher ist die Funktion an der Stelle $(1,2)$ nicht differenzierbar. Man bestätigt folgendermaßen, dass die Funktion an der Stelle $(1,2)$ nicht partiell differenzierbar ist,

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(1+h,2)-f(1,2)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{h^2}-0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|h|}{h} = \lim_{h\to 0} \operatorname{sign}(h) \quad \text{exisitert nicht}$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(1,2+h)-f(1,2)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{h^2}-0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|h|}{h} = \lim_{h\to 0} \operatorname{sign}(h) \quad \text{exisitert nicht}$$

(b) Die partiellen Ableitungen der Funktion

$$g(x,y) = \sqrt{1 + (x-1)^2 + (y-2)^2}$$

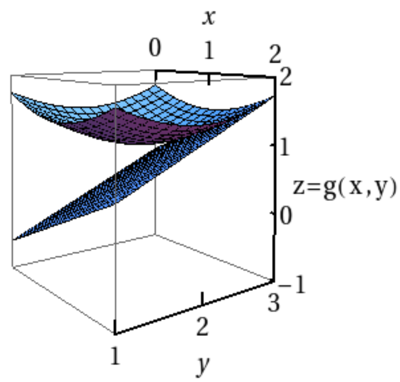
sind

$$g_x(x,y) = \frac{x-1}{\sqrt{1+(x-1)^2+(y-2)^2}}, \quad g_y(x,y) = \frac{y-2}{\sqrt{1+(x-1)^2+(y-2)^2}}$$

Die Tangenteneben durch den Punkt $(2, 3, \sqrt{3})$ ist

$$z = g(2,3) + g_x(2,3)(x-2) + g_y(2,3)(y-3) = \sqrt{3} + (x-2)/\sqrt{3} + (y-3)/\sqrt{3}$$

Die grafische Darstellung der Funktion zusammen mit dieser Tangentenebene ist



Die Fläche ist eine Abrundung der Kegelform des letzten Beispiels, und daher ist die Tangentenebene nur in dem einzigen Punkt $(2, 3, \sqrt{3})$ tangent.

Wegen der Abrundung im Scheitel gibt es eine eindeutige Tangentenebene durch $(1, 2, 1)$. Daher ist die Funktion überall differenzierbar und folglich überall partiell differenzierbar. Die Tangentenebene durch $(1, 2, 1)$ ist

$$z = g(1,2) + g_x(1,2)(x-1) + g_y(1,2)(y-2) = 1 + 0 \cdot (x-1) + 0 \cdot (y-2) = 1$$

d.h. diese Tangentenebene ist flach. Weiters besitzt die Funktion ein lokales Minimum an der Stelle $(x, y) = (1, 2)$.

4. Lokale Extrema

Für die Funktion

$$f(x,y) = \frac{x}{3}\left(\frac{x^2-3}{1+y^2}\right)$$

sind die partiellen Ableitungen erster Ordnung gegeben durch

$$f_x(x,y) = \frac{x^2-1}{y^2+1}, \quad f_y(x,y) = \frac{2xy(3-x^2)}{3(1+y^2)^2}$$

Daher sind $(x, y) = (-1, 0)$ und $(x, y) = (+1, 0)$ kritische Punkte, in denen $f_x(-1, 0) = 0 = f_y(-1, 0)$ und $f_x(+1, 0) = 0 = f_y(+1, 0)$ gelten. Die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung sind gegeben durch

$$f_{xx}(x,y) = \frac{2x}{y^2+1}, \quad f_{xy}(x,y) = \frac{2y(1-x^2)}{(1+y^2)^2}, \quad f_{yy}(x,y) = \frac{2x(x^2-3)(3y^2-1)}{3(1+y^2)^3}$$

Auswertungen der partiellen Ableitungen zweiter Ordnung in den kritischen Punkten sind

$$f_{xx}(-1,0) = -2, \quad f_{xy}(-1,0) = 0, \quad f_{yy}(-1,0) = -4/3$$

$$f_{xx}(+1,0) = +2, \quad f_{xy}(+1,0) = 0, \quad f_{yy}(+1,0) = +4/3$$

und es gelten

$$f_{xx}(-1,0)f_y(-1,0) - f_{xy}(-1,0)^2 = 8/3 > 0$$

und

$$f_{xx}(+1,0)f_y(+1,0) - f_{xy}(+1,0)^2 = 8/3 > 0$$

Laut der Charakterisierung eines lokalen Extremums gibt es ein lokales Maximum in $(-1, 0)$ und ein lokales Minimum in $(+1, 0)$.

5. Sattelpunkte

   Für die Funktion
$$f(x, y) = xy$$
   sind die partiellen Ableitungen erster Ordnung gegeben durch
$$f_x(x, y) = y, \quad f_y(x, y) = x$$
   und daher ist $(x, y) = (0, 0)$ ein kritischer Punkt, in dem $f_x(0, 0) = 0 = f_y(0, 0)$ gilt. Die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung sind gegeben durch
$$f_{xx}(x, y) = 0, \quad f_{xy}(x, y) = 1, \quad f_{yy}(x, y) = 0$$
   Die Ungleichung
$$f_{xx}(0, 0)f_{yy}(0, 0) - f_{xy}(x, y)^2 = -1 < 0$$
   ist eine Bedingung für einen Sattelpunkt in $(x, y) = (0, 0)$. Außerdem gilt für $x \neq 0$,
$$f(x, x) = x^2 > 0 = f(0, 0) > -x^2 = f(x, -x)$$
   Daher gibt es Stellen (x, y) (z.B. mit $y = x$) in der Nähe von $(0, 0)$, in denen $f(x, y)$ größer ist als $f(0, 0)$, und es gibt andere Stellen (x, y) (z.B. mit $y = -x$) in der Nähe von $(0, 0)$ in denen $f(x, y)$ kleiner ist als $f(0, 0)$. Daher ist $(x, y) = (0, 0)$ ein kritischer Punkt, der keiner Extremstelle entspricht.