Integral- und Differentialrechnungen für USW
Lösungen der Beispiele des 10. Übungsblatts

1. Flächeninhalt unter einer Kurve:

   (a) Das bestimmte Integral von $y(x) = x^{\frac{1}{3}}$ zwischen $x = -1$ und $x = 0$ ist

   $$\int_{-1}^{0} x^{\frac{1}{3}} dx = \frac{x^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1} \Big|_{x=-1}^{x=0} = 0 - \frac{\sqrt[3]{(-1)^4}}{4/3} = -\frac{3}{4}$$

   (b) Das bestimmte Integral von $y(x) = x^{\frac{1}{3}}$ zwischen $x = 0$ und $x = +1$ ist

   $$\int_{0}^{+1} x^{\frac{1}{3}} dx = \frac{x^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1} \Big|_{x=0}^{x=+1} = \frac{\sqrt[3]{(+1)^4}}{4/3} - 0 = +\frac{3}{4}$$

   (c) Die Funktion $y(x) = x^{\frac{1}{3}}$ erfüllt $y(x) \leq 0$ für $x \leq 0$ und $y(x) \geq 0$ für $x \geq 0$. Daher ist der Flächeninhalt zwischen der Kurve für $y(x) = x^{\frac{1}{3}}$ und der x-Achse für $x \in [-1, +1]$ gegeben durch

   $$\int_{0}^{+1} x^{\frac{1}{3}} dx - \int_{-1}^{0} x^{\frac{1}{3}} dx = \frac{3}{4} - \left(-\frac{3}{4}\right) = \frac{3}{2}$$

2. Flächeninhalt zwischen Kurven

   (a) Die Kurven für $u(x) = x^3 - x - 3$ und $v(x) = x^3 - 2x^2 + 2x - 3$ treffen einander in den x-Werten, die erfüllen

   $$u(x) = x^3 - x - 3 = x^3 - 2x^2 + 2x - 3 = v(x)$$

   oder

   $$x(2x - 3) = 2x^2 - 3x = 0$$

   Daher besitzt die Differenz $u(x) - v(x)$ Nullstellen in $x = 0, \frac{3}{2}$. Da die Funktion $u(x) - v(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ stetig ist, folgt mit dem Zwischenwertsatz, dass das Vorzeichen der Differenz durch die folgenden Auswertungen bestimmt wird:

   $$\begin{array}{rclcrcll} u(-1) - v(-1) & = & +5 & \Rightarrow & u(x) - v(x) & > & 0 & \forall x \in (-\infty, 0) \\ u(1) - v(1) & = & -1 & \Rightarrow & u(x) - v(x) & < & 0 & \forall x \in (0, \frac{3}{2}) \\ u(2) - v(2) & = & +2 & \Rightarrow & u(x) - v(x) & > & 0 & \forall x \in (\frac{3}{2}, +\infty) \end{array}$$

   Daher ist der Flächeninhalt zwischen den Kurven für $u(x)$ und $v(x)$ für $x \in [0, 2]$ gegeben durch

   $$\int_{\frac{3}{2}}^{2} \underbrace{[u(x) - v(x)]}_{2x^2-3x} dx - \int_{0}^{\frac{3}{2}} \underbrace{[u(x) - v(x)]}_{2x^2-3x} dx = \left(2\frac{x^3}{3} - 3\frac{x^2}{2}\right) \Big|_{x=\frac{3}{2}}^{x=2} - \left(2\frac{x^3}{3} - 3\frac{x^2}{2}\right) \Big|_{x=0}^{x=\frac{3}{2}}$$

   $$= \frac{11}{24} - \left(-\frac{9}{8}\right) = \frac{19}{12}$$

(b) Die Kurven für $f(x) = 1/x^{\frac{1}{3}}$ und $g(x) = 1/x^{\frac{1}{4}}$ treffen einander in den x-Werten, die erfüllen

$$f(x) = \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}} = \frac{1}{x^{\frac{1}{4}}} = g(x)$$

oder

$$1 = x^{\frac{1}{3}-\frac{1}{4}} = x^{1/12}$$

Daher besitzt die Differenz $f(x)-g(x)$ eine Nullstelle in $x = 1$. Da die Funktion $f(x)-g(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}_+$ stetig ist, folgt mit dem Zwischenwertsatz, dass das Vorzeichen der Differenz durch die folgenden Auswertungen bestimmt wird:

$$\begin{array}{lclclcll} f(2^{-12}) - g(2^{-12}) & = & +8 & \Rightarrow & f(x) - g(x) & > & 0 & \forall x \in (0,1) \\ f(2^{+12}) - g(2^{+12}) & = & -1/16 & \Rightarrow & f(x) - g(x) & < & 0 & \forall x \in (0,+\infty) \end{array}$$

Daher ist der Flächeninhalt zwischen den Kurven für $f(x)$ und $g(x)$ für $x \in [0, (\frac{9}{8})^{12}]$ gegeben durch

$$\int_0^1 \underbrace{[f(x) - g(x)]}_{x^{-\frac{1}{3}} - x^{-\frac{1}{4}}} dx - \int_1^{(9/8)^{12}} \underbrace{[f(x) - g(x)]}_{x^{-\frac{1}{3}} - x^{-\frac{1}{4}}} dx$$

$$= \left(\frac{x^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1} - \frac{x^{-\frac{1}{4}+1}}{-\frac{1}{4}+1} \right) \Big|_{x=0}^{x=1} - \left(\frac{x^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1} - \frac{x^{-\frac{1}{4}+1}}{-\frac{1}{4}+1} \right) \Big|_{x=1}^{x=(9/8)^{12}}$$

$$= \left(\frac{x^{2/3}}{2/3} - \frac{x^{3/4}}{3/4} \right) \Big|_{x=0}^{x=1} - \left(\frac{x^{2/3}}{2/3} - \frac{x^{3/4}}{3/4} \right) \Big|_{x=1}^{x=(9/8)^{12}}$$

$$= \left(\frac{3}{2} - \frac{4}{3} \right) - \left[\left(\frac{3}{2} \left(\frac{9}{8} \right)^{12 \cdot \frac{2}{3}} - \frac{4}{3} \left(\frac{9}{8} \right)^{12 \cdot \frac{3}{4}} \right) - \left(\frac{3}{2} - \frac{4}{3} \right) \right]$$

$$= \frac{1}{6} - \left[\left(\frac{3}{2} \left(\frac{9}{8} \right)^{8} - \frac{4}{3} \left(\frac{9}{8} \right)^{9} \right) - \frac{1}{6} \right] = \frac{1}{3} - \left(\frac{3}{2} - \frac{4}{3}\frac{9}{8} \right) \left(\frac{9}{8} \right)^{8} = \frac{1}{3}$$

3. Leibniz-Regel

(a) Das bestimmte Integral ist

$$F(x) = \int_{\sin(x)}^{\ln(x)} t^2 dt = \frac{t^3}{3} \Big|_{t=\sin(x)}^{t=\ln(x)} = \frac{(\ln(x))^3}{3} - \frac{(\sin(x))^3}{3}$$

und mit der Kettenregel ist die Ableitung von $F(x)$ gegeben durch

$$F'(x) = \frac{3(\ln(x))^2}{3} (\ln(x))' - \frac{3(\sin(x))^2}{3} (\sin(x))' = (\ln(x))^2 \frac{1}{x} - (\sin(x))^2 \cos(x)$$

(b) Mit der Leibniz-Regel ist die Ableitung von $F(x)$ direkt gegeben durch

$$F'(x) = t^2 \Big|_{t=\ln(x)} (\ln(x))' - t^2 \Big|_{t=\sin(x)} (\sin(x))' = (\ln(x))^2 \frac{1}{x} - (\sin(x))^2 \cos(x)$$

die mit dem Ergebnis vom Teil (a) übereinstimmt, obwohl der Aufwand mit der Leibniz-Regel weniger ist.

(c) Die Ableitung der Funktion

$$F(x) = \int_{\tan^{-1}(x)}^{\tan(x)} e^{-t^2} dt$$

kann nicht mit der Methode im Teil (a) bestimmt werden, da es keine abgeschlossene Formel für eine Stammfunktion des Integrands e^{-t^2} gibt. Trotzdem mit der Leibniz-Regel,

$$F'(x) = e^{-t^2} \Big|_{t=\tan(x)} (\tan(x))' - e^{-t^2} \Big|_{t=\tan^{-1}(x)} (\tan^{-1}(x))'$$

$$= e^{-(\tan(x))^2} \sec^2(x) - e^{-(\tan^{-1}(x))^2} \frac{1}{1+x^2}$$

4. Numerische Integralrechnung

(a) Für eine Approximation des Werts

$$\operatorname{erf}(1), \quad \operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$$

wird eine Riemannsche Summe $S(n)$ mit der Teilung

$$t_i = i/n, \quad i = 0, \ldots, n, \quad \Delta t_i = t_i - t_{i-1} = 1/n, \quad i = 1, \ldots, n$$

des Intervalls $[0, 1]$ und mit Auswertungen der Funktion $2e^{-t^2}/\sqrt{\pi}$ in $\hat{t}_i = t_i$, $i = 1, \ldots, n$, gegeben durch

$$S(n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-t_i^2} \Delta t_i = \frac{2}{n\sqrt{\pi}} \sum_{i=1}^{n} e^{-(i/n)^2}$$

(b) Die Auswertungen von $S(n)$ für $n = 10, 100, 1000, 10000$ sind

$S(10) =$ `Sum[(2./10) Exp[-(i/10)^2]/Sqrt[Pi], {i, 1, 10}]` $= 0.806345$

$S(100) =$ `Sum[(2./100) Exp[-(i/100)^2]/Sqrt[Pi], {i, 1, 100}]` $= 0.839128$

$S(1000) =$ `Sum[(2./1000) Exp[-(i/1000)^2]/Sqrt[Pi], {i, 1, 1000}]` $= 0.842344$

$S(10000) =$ `Sum[(2./10000) Exp[-(i/10000)^2]/Sqrt[Pi], {i, 1, 10000}]` $= 0.842665$

(c) Die Auswertung der error function ist $\operatorname{erf}(1) = 0.842701$.

5. Trennbare Differentialgleichungen

(a) Zur Lösung des Problems des exponentiellen Wachstums,

$$m'(t) = 2m(t), \quad m(0) = 3$$

gruppiert man die m-Variablen zusammen,

$$\frac{m'(t)}{m(t)} = 2, \quad m(0) = 3$$

und integriert beide Seiten von $t = 0$ bis zu einer beliebigen Zeit $t = T > 0$,

$$\ln(m(t)) \Big|_{t=0}^{t=T} = \int_0^T \frac{m'(t)}{m(t)} dt = \int_0^T 2dt = 2t \Big|_{t=0}^{t=T} = 2T$$

Zur Bestimmung der Stammfunktion $\ln(m(t))$ erkennt man im Integrand $m'(t)/m(t)$, dass die Ableitung des Nenners im Zähler steht, und dann verwendet man die Kettenregel. Alternativ macht man die Substitution $u = m(t)$, $du = m'(t)dt$, und es gilt

$$\int \frac{m'(t)}{m(t)} dt = \int \frac{du}{u} = \ln(u) = \ln(m(t))$$

Bei der Auswertung in $t = 0$ und $t = T$ und mit $m(0) = 3$ ergibt sich

$$\ln(m(T)/3) = \ln(m(T)) - \ln(3) = \ln(m(T)) - \ln(m(0)) = \ln(m(t)) \Big|_{t=0}^{t=T} = 2T$$

Bei der Auswertung der Funktion $\exp(\cdot)$ in beiden Seiten ergibt sich

$$m(T)/3 = \exp(\ln(m(T)/3)) = e^{2T} \quad \text{oder} \quad m(T) = 3e^{2T}$$

Da $T > 0$ beliebig ist, ist die Lösung $m(t) = 3e^{2t}$. Zur Kontrolle bestätigt man folgendermaßen direkt, $m(t)$ löst das Problem des exponentiellen Wachstums,

$$m'(t) = D_t 3e^{2t} = 2(3e^{2t}) = 2m(t), \quad m(0) = 3e^0 = 3.$$

(b) Zur Lösung des Problems des logistischen Wachstums,

$$p'(t) = p(t)(1 - p(t)), \quad p(0) = 1/2$$

gruppiert man die p-Variablen zusammen,

$$\frac{p'(t)}{p(t)(1 - p(t))} = 1, \quad p(0) = 1/2$$

und integriert beide Seiten von $t = 0$ bis zu einer beliebigen Zeit $t = T > 0$,

$$\int_0^T \frac{p'(t)}{p(t)(1 - p(t))} dt = \int_0^T dt = t \Big|_{t=0}^{t=T} = T$$

Zur Bestimmung einer Stammfunktion verwendet man Partialbruchzerlegung,

$$\frac{1}{p(1-p)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{1-p}$$

Durch Multiplikation mit $p(1-p)$ sieht man, die unbekannten Koeffizienten A und B müssen für alle p erfüllen,

$$1 = A(1-p) + Bp \quad \text{und insbesondere} \quad \left\{ \begin{array}{ll} p = 0: & 1 = A \cdot 1 + B \cdot 0 \\ p = 1: & 1 = A \cdot 0 + B \cdot 1 \end{array} \right.$$

oder $A = 1 = B$. Das bestimmte Integral ist dann

$$\int_0^T \frac{p'(t)}{p(t)(1 - p(t))} dt = \int_0^T \left[\frac{p'(t)}{p(t)} + \frac{p'(t)}{1 - p(t)} \right] dt = \int_0^T \frac{p'(t)}{p(t)} dt - \int_0^T \frac{-p'(t)}{1 - p(t)} dt$$

$$= \ln(p(t)) \Big|_{t=0}^{t=T} - \ln(1 - p(t)) \Big|_{t=0}^{t=T}$$

wobei, wie im Teil (a), die Stammfunktionen $\ln(p(t))$ und $\ln(1-p(t))$ durch die Kettenregel oder durch die Substitutionen $u = p(t)$, $du = p'(t)dt$, bzw. $v = 1 - p(t)$, $dv = -p'(t)dt$, bestimmt werden. Man sammelt die obigen Ergebnisse und bekommt

$$\ln(p(t)) \Big|_{t=0}^{t=T} - \ln(1 - p(t)) \Big|_{t=0}^{t=T} = T$$

Durch die entsprechenden Auswertungen mit $p(0) = 1/2$

$$T = [\ln(p(T)) - \ln(p(0))] - [\ln(1 - p(T)) - \ln(1 - p(0))]$$

$$= [\ln(p(T)) - \ln(1/2)] - [\ln(1 - p(T)) - \ln(1/2)] = \ln\left(\frac{p(T)}{1 - p(T)}\right)$$

Bei der Auswertung der Funktion $\exp(\cdot)$ in beiden Seiten ergibt sich

$$e^T = \frac{p(T)}{1 - p(T)} \quad \Rightarrow \quad (1 - p(T))e^T = p(T) \quad \Rightarrow \quad e^T = p(T)(1 + e^T)$$

oder

$$p(T) = \frac{e^T}{1 + e^T}\left(\frac{e^{-T}}{e^{-T}}\right) = \frac{1}{1 + e^{-T}}$$

Da $T > 0$ beliebig ist, ist die Lösung $p(t) = 1/(1 + e^{-t})$. Zur Kontrolle bestätigt man folgendermaßen direkt, $p(t)$ löst das Problem des logistischen Wachstums,

$$p'(t) = D_t(1 + e^{-t})^{-1} = -(1 + e^{-t})^{-2} D_t e^{-t} = \frac{e^{-t}}{(1 + e^{-t})^2}$$

$$p(t)(1 - p(t)) = \frac{1}{1 + e^{-t}}\left[1 - \frac{1}{1 + e^{-t}}\right] = \frac{1}{1 + e^{-t}}\left[\frac{1 + e^{-t} - 1}{1 + e^{-t}}\right] = \frac{e^{-t}}{(1 + e^{-t})^2} = p'(t)$$

$$p(0) = \frac{1}{1 + e^0} = \frac{1}{2}$$

6. Position, Geschwindigkeit und Beschleunigung

   (a) Mit $x''(t) = -g = -9.8$ Meter/Sekunde^2 folgt

   $$x'(t) = x'(0) + \int_0^t x''(s)ds = -\int_0^t gds = -gt$$

   wobei $x'(0) = 0$ verwendet worden ist. Wenn nochmals integiert wird, ergibt sich

   $$x(t) = x(0) + \int_0^t x'(s)ds = h - \int_0^t gsds = h - gt^2/2$$

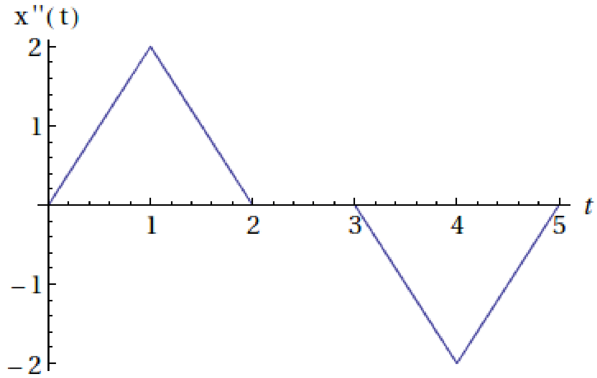
   wobei $x(0) = h = 10$ Meter verwendet worden ist. Die Aufprallszeit τ erfüllt

   $$0 = x(\tau) = h - g\tau^2/2 \quad \text{oder} \quad 2h/g = \tau^2 \quad \text{oder} \quad \tau = \sqrt{2h/g}$$

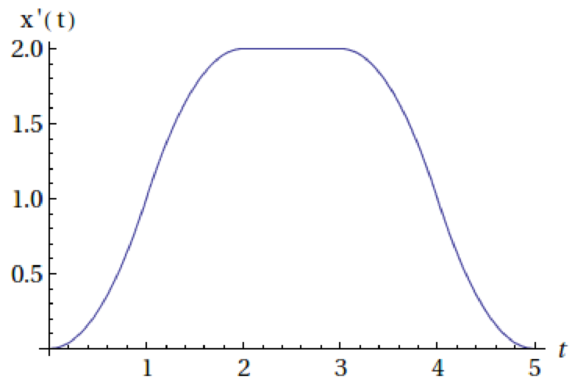
   Die Aufprallsgeschwindigkeit ist dann

   $$x'(\tau) = -g\tau = -g\sqrt{2h/g} = -\sqrt{2hg}$$

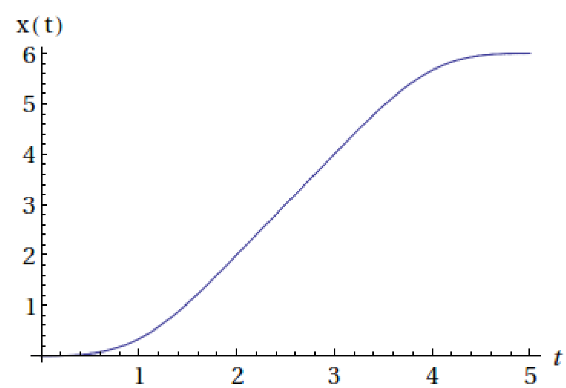
   (b) Anhand der Beschleunigung



integriert man grafisch (der Flächeninhalt der obigen Kurve ist 2 bis $t = 2$, er bleibt 2 bis $t = 3$ und er wird 0 bis $t = 5$) und bekommt die Geschwindigkeit



und die Position (wegen Symmetrien ist der Flächeninhalt der obigen Kurve 2 für die jeweiligen Teilintervalle $t \in [0, 2]$, $t \in [2, 3]$ und $t \in [3, 5]$)



d.h. es gelten $x(2) = 2$, $x(3) = x(2) + 2 = 4$ und $x(5) = x(3) + 2 = 6$. Insbesondere mit $x(5) = 6$ fährt man 6 Kilometer in den 5 Minuten. Die durchschnittliche Geschwindigkeit ist 6 Kilometer / 5 Minuten oder 72 Kilometer/Stunde.

Man kann das Problem auch mit Formeln folgendermaßen lösen. Aus der Grafik für $x''(t)$ liest man 2 Punkte auf jeder Gerade, bestimmt die Formel für die entsprechende Gerade und sammelt diese Formeln für die folgende stückweise Definition für die Beschleunigung,

$$x''(t) = \begin{cases} 2t, & t \in [0,1] \\ 4-2t, & t \in [1,2] \\ 0, & t \in [2,3] \\ 6-2t, & t \in [3,4] \\ 2t-10, & t \in [4,5] \end{cases}$$

Die Geschwindigkeit bekommt man mit Formeln, wenn man $x''(t)$ stückweise integriert. Mit $x'(0) = 0$ ist $x'(t)$ für $t \in [0,1]$ gegeben durch

$$x'(t) = x'(0) + \int_0^t x''(s)ds = \int_0^t 2sds = s^2|_0^t = t^2, \quad t \in [0,1]$$

Mit $x'(1) = 1$ (aus der letzten Formel) ist $x'(t)$ für $t \in [1,2]$ gegeben durch

$$x'(t) = x'(1) + \int_1^t x''(s)ds = 1 + \int_1^t (4-2s)ds = 1 + (4s - s^2)|_1^t = -2 + 4t - t^2, \quad t \in [1,2]$$

Mit $x'(2) = 2$ (aus der letzten Formel) ist $x'(t)$ für $t \in [2,3]$ gegeben durch

$$x'(t) = x'(2) + \int_2^t x''(s)ds = 2 + \int_2^t 0ds = 2, \quad t \in [2,3]$$

Mit $x'(3) = 2$ (aus der letzten Formel) ist $x'(t)$ für $t \in [3,4]$ gegeben durch

$$x'(t) = x'(3) + \int_3^t x''(s)ds = 2 + \int_3^t (6-2s)ds = 2 + (6s - s^2)|_3^t = -7 + 6t - t^2, \quad t \in [3,4]$$

Mit $x'(4) = 1$ (aus der letzten Formel) ist $x'(t)$ für $t \in [4,5]$ gegeben durch

$$x'(t) = x'(4) + \int_4^t x''(s)ds = 1 + \int_4^t (2s-10)ds = 1 + (s^2 - 10s)|_4^t = t^2 - 10t + 25, \quad t \in [4,5]$$

Zusammengefasst ist die Geschwindigkeit gegeben durch

$$x'(t) = \begin{cases} t^2, & t \in [0,1] \\ -2+4t-t^2, & t \in [1,2] \\ 2, & t \in [2,3] \\ -7+6t-t^2, & t \in [3,4] \\ t^2-10t+25, & t \in [4,5] \end{cases}$$

Die Position bekommt man mit Formeln, wenn man $x'(t)$ stückweise integriert. Mit $x(0) = 0$ ist $x(t)$ für $t \in [0,1]$ gegeben durch

$$x(t) = x(0) + \int_0^t x'(s)ds = \int_0^t s^2 ds = t^3/3, \quad t \in [0,1]$$

Mit $x(1) = \frac{1}{3}$ (aus der letzten Formel) ist $x(t)$ für $t \in [1,2]$ gegeben durch

$$x(t) = x(1) + \int_1^t x'(s)ds = \tfrac{1}{3} + \int_1^t (-2 + 4s - s^2)ds = 2/3 - 2t + 2t^2 - t^3/3, \quad t \in [1,2]$$

Mit $x(2) = 2$ (aus der letzten Formel) ist $x(t)$ für $t \in [2, 3]$ gegeben durch

$$x(t) = x(2) + \int_2^t x'(s)ds = 2 + \int_2^t 2ds = 2t - 2, \quad t \in [2, 3]$$

Mit $x(3) = 4$ (aus der letzten Formel) ist $x(t)$ für $t \in [3, 4]$ gegeben durch

$$x(t) = x(3) + \int_3^t x'(s)ds = 4 + \int_3^t (-7 + 6s - s^2)ds = 7 - 7t + 3t^2 - t^3/3, \quad t \in [3, 4]$$

Mit $x(4) = 17/3$ (aus der letzten Formel) ist $x(t)$ für $t \in [4, 5]$ gegeben durch

$$x(t) = x(4) + \int_4^t x'(s)ds = \tfrac{17}{3} + \int_4^t (s^2 - 10s + 25)ds = -107/3 + 25t - 5t^2 + t^3/3, \quad t \in [4, 5]$$

Zusammengefasst ist die Position gegeben durch

$$x(t) = \begin{cases} t^3/3, & t \in [0, 1] \\ 2/3 - 2t + 2t^2 - t^3/3, & t \in [1, 2] \\ 2t - 2, & t \in [2, 3] \\ 7 - 7t + 3t^2 - t^3/3, & t \in [3, 4] \\ -107/3 + 25t - 5t^2 + t^3/3, & t \in [4, 5] \end{cases}$$

Aus dieser Formel ergibt sich $x(5) = 6$.