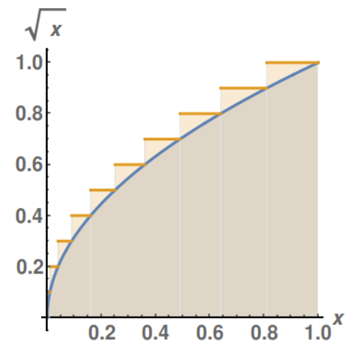
Integral- und Differentialrechnungen für USW
Lösungen der Beispiele des 9. Übungsblatts

1. Bestimmtes Integral durch Grenzwert:

   (a) Das bestimmte Integral ist gegeben durch den Grenzwert der Riemannschen Summe,

   $$\int_0^1 \sqrt{x}dx = \lim_{n\to\infty} S(n), \quad S(n) = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\hat{x}_i}\Delta x_i$$

   wobei hier ausgewählt worden sind

   $$x_i = \left(\frac{i}{n}\right)^2, \quad i = 0, \ldots, n, \quad \hat{x}_i = x_i, \quad i = 1, \ldots, n$$

   und

   $$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} = \left(\frac{i}{n}\right)^2 - \left(\frac{i-1}{n}\right)^2, \quad i = 1, \ldots, n$$

   Die entsprechende Riemannsche Summe ist gegeben durch

   $$S(n) = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\left(\frac{i}{n}\right)^2}\left[\left(\frac{i}{n}\right)^2 - \left(\frac{i-1}{n}\right)^2\right] = \frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i[i^2 - (i-1)^2]$$

   oder anhand der Summen-Formeln (Seite 70 im Skriptum),

   $$S(n) = \frac{1}{n^3}\sum_i [2i^2 - i] = \frac{2}{n^3}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{1}{n^3}\frac{n(n+1)}{2}$$

   Der Grenzwert ist

   $$\lim_{n\to\infty} S(n) = \underbrace{\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(2n+1)}{3n^2}}_{=2/3} - \underbrace{\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)}{2n^2}}_{=0} = \frac{2}{3}$$

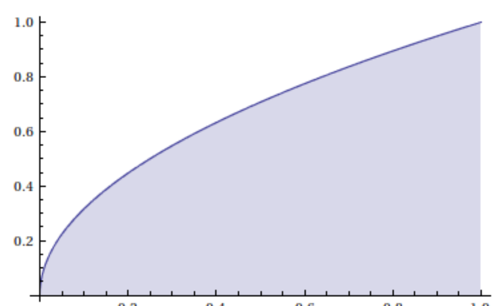
   (b) Mit dem Hauptsatz der Integral- und Differentialrechnungen,

   $$\int_0^1 x^{\frac{1}{2}}dx = \left.\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\right|_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{3/2} = \frac{2}{3}$$

   (c) Der Befehl

   ```
   Plot[Sqrt[x],{x,0,1}]
   ```

   stellt die Funktion $f(x) = \sqrt{x}$ im Intervall $[0, 1]$ grafisch dar

und der Befehl

```
Integrate[Sqrt[x],{x,0,1}]
```

berechnet den Flächeninhalt (2/3) unter der Kurve.

2. Stammfunktionen:

   (a) Für eine allgemeine Funktion $u(x)$,

   $$f(x) = u'(x)u(x)^p, \quad p \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad F(x) = c + \begin{cases} \dfrac{u(x)^{p+1}}{p+1}, & p \neq -1 \\ \ln(u(x)), & p = -1 \end{cases} \quad c \in \mathbb{R}$$

   und für $u(x) = x$ gilt $u'(x) = 1$ in dieser Formel. Man bestätigt, es gilt $F'(x) = f(x)$.

   (b) Für eine allgemeine Funktion $u(x)$,

   $$f(x) = 2^{u(x)}u'(x) \quad \Rightarrow \quad F(x) = c + \frac{2^{u(x)}}{\ln(2)}, \quad c \in \mathbb{R}$$

   und für $u(x) = x$ gilt $u'(x) = 1$ in dieser Formel. Man bestätigt, es gilt $F'(x) = f(x)$.

   (c) Für eine allgemeine Funktion $u(x)$,

   $$f(x) = \cos(u(x))u'(x) \quad \Rightarrow \quad F(x) = c + \sin(u(x)), \quad c \in \mathbb{R}$$

   und für $u(x) = x$ gilt $u'(x) = 1$ in dieser Formel. Man bestätigt, es gilt $F'(x) = f(x)$.

   (d) Für eine allgemeine Funktion $u(x)$,

   $$f(x) = \sin(u(x))u'(x) \quad \Rightarrow \quad F(x) = c - \cos(u(x)), \quad c \in \mathbb{R}$$

   und für $u(x) = x$ gilt $u'(x) = 1$ in dieser Formel. Man bestätigt, es gilt $F'(x) = f(x)$.

   (e) Für eine allgemeine Funktion $u(x)$,

   $$f(x) = \sec^2(u(x))u'(x) \quad \Rightarrow \quad F(x) = c + \tan(u(x)), \quad c \in \mathbb{R}$$

   und für $u(x) = x$ gilt $u'(x) = 1$ in dieser Formel. Man bestätigt, es gilt $F'(x) = f(x)$.

   (f) Für eine allgemeine Funktion $u(x)$,

   $$f(x) = u'(x)/(1 + u^2(x)) \quad \Rightarrow \quad F(x) = c + \tan^{-1}(u(x)), \quad c \in \mathbb{R}$$

   und für $u(x) = x$ gilt $u'(x) = 1$ in dieser Formel. Man bestätigt, es gilt $F'(x) = f(x)$.

   Die analogen Hausaufgaben auf Seite 153 im Skriptum werden ähnlich gelöst.

3. Rationale Funktionen:

   (a) Durch die quadratische Ergänzung $(x^2 + 2x + 2) = (x+1)^2 + 1$,

   $$\int \frac{1}{2 + 2x + x^2} dx = \int \frac{dx}{(x+1)^2 + 1}$$

   Durch die Substitution $u = x + 1$, $du = dx$,

   $$\int \frac{dx}{(x+1)^2 + 1} = \int \frac{du}{u^2 + 1} = \tan^{-1} u + c = \tan^{-1}(x+1) + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

(b) Durch die algebräische Modifikation $x^2 = (x^2 + 2x + 2) - 2(x + 1)$,

$$\int \frac{x^2}{2 + 2x + x^2} dx = \int \left[\underbrace{\left(\frac{x^2 + 2x + 2}{2 + 2x + x^2} \right)}_{=1} - \frac{2(x + 1)}{(x + 1)^2 + 1} \right] dx$$

wobei die obige quadratische Ergänzung verwendet worden ist. Durch die Substitution $u = x + 1$, $du = dx$,

$$\int \frac{x^2}{2 + 2x + x^2} dx = \int dx - \int \frac{2u}{u^2 + 1} du = x - \int \frac{(u^2 + 1)'}{u^2 + 1} du$$

Durch die Kettenregel (oder äquivalent durch die Substitution $v = u^2 + 1$, $dv = 2udu$),

$$\int \frac{x^2}{2 + 2x + x^2} dx = x - \ln(u^2 + 1) + c = x - \ln((x + 1)^2 + 1) + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

oder ohne die quadratischen Ergänzung,

$$\int \frac{x^2}{2 + 2x + x^2} dx = x - \ln(x^2 + 2x + 2) + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

(c) Durch die algebräische Modifikation $x^2 + 3x + 2 = (x + 1)(x + 2)$,

$$\int \frac{x + 3}{2 + 3x + x^2} dx = \int \frac{(x + 3)}{(x + 1)(x + 2)} dx$$

Für die Partialbruchzerlegung,

$$\frac{(x + 3)}{(x + 1)(x + 2)} = \frac{A}{x + 1} + \frac{B}{x + 2}$$

multipliziert man die Gleichung mit $(x+1)(x+2)$, und die unbekannten A und B erfüllen,

$$(x + 3) = A(x + 2) + B(x + 1), \quad \forall x \quad \text{oder} \quad \begin{cases} x = -1: & 2 = A(1) + B(0) \\ x = -2: & 1 = A(0) + B(-1) \end{cases}$$

d.h. $A = 2$ und $B = -1$. Daher

$$\int \frac{x + 3}{2 + 3x + x^2} dx = \int \left[\frac{2}{x + 1} - \frac{1}{x + 2} \right] dx = 2 \int \frac{(x + 1)'}{x + 1} dx - \int \frac{(x + 2)'}{x + 2} dx$$

Durch die Kettenregel (oder äquivalent durch die Substitutionen $x + 1 = u$, $dx = du$ bzw. $x + 2 = v$, $dx = dv$),

$$\int \frac{x + 3}{2 + 3x + x^2} dx = \int \left[\frac{2}{x + 1} - \frac{1}{x + 2} \right] dx = 2 \ln(x + 1) - \ln(x + 2) + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

oder mit den Eigenschaften der Logarithmusfunktion,

$$\int \frac{x + 3}{2 + 3x + x^2} dx = \ln(x + 1)^2 - \ln(x + 2) + c = \ln\left(\frac{(x + 1)^2}{(x + 2)} \right) + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

4. Partielle Integration:

(a) Für das Integral

$$\int x\cos(x)dx$$

wird x durch ihre Ableitung vereinfacht. Daher verwendet man die Substitutionen,

$x\cos(x) = u(x)v'(x)$	$u(x) = x$	$v'(x) = \cos(x)$	
	$u'(x) = 1$	$v(x) = \sin(x)$	$u'(x)v(x) = \sin(x)$

Durch partielle Integration,

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx$$

ergibt sich

$$\int x\cos(x)dx = x\sin(x) - \int \sin(x)dx = x\sin(x) + \cos(x) + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

(b) Für das Integral

$$\int x\ln(x)dx$$

wird $\ln(x)$ durch ihre Ableitung vereinfacht. Daher verwendet man die Substitutionen,

$x\ln(x) = u(x)v'(x)$	$u(x) = \ln(x)$	$v'(x) = x$	
	$u'(x) = 1/x$	$v(x) = x^2/2$	$u'(x)v(x) = x/2$

Durch partielle Integration,

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx$$

ergibt sich

$$\int x\ln(x)dx = \tfrac{1}{2}x^2\ln(x) - \int \tfrac{1}{2}xdx = \tfrac{2}{4}x^2\ln(x) - \tfrac{1}{4}x^2 = \frac{\ln(x^2)-1}{4}x^2 + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

(c) Für das Integral

$$\int xe^x dx$$

wird x durch ihre Ableitung vereinfacht. Daher verwendet man die Substitutionen,

$xe^x = u(x)v'(x)$	$u(x) = x$	$v'(x) = e^x$	
	$u'(x) = 1$	$v(x) = e^x$	$u'(x)v(x) = e^x$

Durch partielle Integration,

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx$$

ergibt sich

$$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + c = e^x(x-1) + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

(d) Für das Integral

$$\int e^{2x} \sin(3x) dx$$

verwendet man den ähnlichen Ansatz auf Seiten 151-152 im Skriptum. Zuerst verwendet man die Substitutionen,

$e^{2x} \sin(3x) = u(x)v'(x)$	$u(x) = \sin(3x)$	$v'(x) = e^{2x}$	
	$u'(x) = 3\cos(3x)$	$v(x) = e^{2x}/2$	$u'(x)v(x) = \frac{3}{2}e^{2x}\cos(3x)$

Durch partielle Integration,

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx$$

ergibt sich

$$\int e^{2x} \sin(3x)dx = \tfrac{1}{2}e^{2x}\sin(3x) - \tfrac{3}{2}\int e^{2x}\cos(3x)dx$$

Dann für das letzte Integral verwendet man die Substitutionen,

$e^{2x} \cos(3x) = f(x)g'(x)$	$f(x) = \cos(3x)$	$g'(x) = e^{2x}$	
	$f'(x) = -3\sin(3x)$	$g(x) = e^{2x}/2$	$f'(x)g(x) = -\frac{3}{2}e^{2x}\sin(3x)$

Durch partielle Integration,

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

ergibt sich zwischen den eckigen Klammern,

$$\int e^{2x}\sin(3x)dx = \tfrac{1}{2}e^{2x}\sin(3x) - \tfrac{3}{2}\left[\tfrac{1}{2}e^{2x}\cos(3x) + \tfrac{3}{2}\int e^{2x}\sin(3x)dx\right]$$

Man summiert das letzte Integral auf beiden Seiten,

$$(1 + \tfrac{9}{4})\int e^{2x}\sin(3x)dx = \tfrac{1}{2}e^{2x}\sin(3x) - \tfrac{3}{4}e^{2x}\cos(3x)$$

und es folgt,

$$\int e^{2x}\sin(3x)dx = e^{2x}\frac{2\sin(3x) - 3\cos(3x)}{13} + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

5. Trigonometrische Identitäten:

(a) Für das Integral

$$\int \sqrt{1-x^2}dx$$

erkennt man in $\sqrt{1-x^2}$ die Form der trigonometrischen Identität $1 - \sin^2(\theta) = \cos^2(\theta)$. Anhand der Substitution

$$x = \sin(\theta), \quad dx = \cos(\theta)d\theta$$

bekommt man die folgende Transformation des Integrands

$$\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\sin^2(\theta)} = |\cos(\theta)| = \cos(\theta)$$

wobei vorläufig angenommen wird, dass $|\cos(\theta)| = \cos(\theta) \geq 0$ gilt. Man sieht unten, dass diese Annahme zu einer gültigen Stammfunktion führt. Mit der obigen Substitution ergibt sich

$$\int \sqrt{1-x^2}dx = \int \cos^2(\theta)d\theta$$

Mit der trigonometrischen Identität $\cos^2(\theta) = \frac{1}{2}(1+\cos(2\theta))$ lässt sich der Integrand $\cos^2(\theta)$ so vereinfachen,

$$\int \cos^2(\theta)d\theta = \frac{1}{2}\int [1+\cos(2\theta)]d\theta = \frac{1}{2}\left[\theta + \frac{1}{2}\sin(2\theta)\right]$$

Der Term $\sin(2\theta)$ lässt sich direkt bezüglich x umschreiben, wenn die trigonometrische Identität $\sin(2\theta) = 2\sin(\theta)\cos(\theta)$ verwendet wird. Das Integral bezüglich θ ist dann

$$\int \cos^2(\theta)d\theta = \frac{1}{2}\left[\theta + \sin(\theta)\cos(\theta)\right] + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

Mit $x = \sin(\theta)$ und $\sqrt{1-x^2} = \cos(\theta)$ ergibt sich

$$\int \sqrt{1-x^2}dx = \int \cos^2(\theta)d\theta = \frac{1}{2}\left[\theta + \sin(\theta)\cos(\theta)\right] = \frac{1}{2}\left[\sin^{-1}(x) + x\sqrt{1-x^2}\right] + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

In Hinblick auf die obige Annahme dass $|\cos(\theta)| = \cos(\theta)$ gilt, bestätigt man zur Kontrolle, dass die Ableitung der rechten Seite mit dem Integrand $\sqrt{1-x^2}$ übereinstimmt.

(b) Für das Integral

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-1}}$$

erkennt man in $\sqrt{x^2-1}$ die Form der trigonometrischen Identität $\sec^2(\theta) - 1 = \tan^2(\theta)$. Anhand der Substitution

$$x = \sec(\theta), \quad dx = \sec(\theta)\tan(\theta)d\theta$$

bekommt man die folgende Transformation des Nenners des Integrands

$$x^2\sqrt{x^2-1} = \sec^2(\theta)\sqrt{\sec^2(\theta)-1} = \sec^2(\theta)|\tan(\theta)| = \sec^2(\theta)\tan(\theta)$$

wobei vorläufig angenommen wird, dass $|\tan(\theta)| = \tan(\theta) \geq 0$ gilt. Man sieht unten, dass diese Annahme zu einer gültigen Stammfunktion führt. Mit der obigen Substitution ergibt sich

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-1}} = \int \frac{\sec(\theta)\tan(\theta)d\theta}{\sec^2(\theta)\tan(\theta)} = \int \cos(\theta)d\theta = \sin(\theta) + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

Durch $x = \sec(\theta)$ und

$$x\sin(\theta) = \sin(\theta)\sec(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} = \tan(\theta) = |\tan(\theta)| = \sqrt{\sec^2(\theta)-1} = \sqrt{x^2-1}$$

ergibt sich

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-1}} = \sin(\theta) + c = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

In Hinblick auf die obige Annahme dass $|\tan(\theta)| = \tan(\theta)$ gilt, bestätigt man zur Kontrolle, dass die Ableitung der rechten Seite mit dem Integrand $1/(x^2\sqrt{x^2-1})$ übereinstimmt.