Integral- und Differentialrechnungen für USW
Lösungen der Beispiele des 8. Übungsblatts

1. Globale Extrema:

   (a) Laut des Rezepts (Seite 122 im Skriptum) zur Bestimmung der globalen Extrema der Funktion

   $$y_1(x) = x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 \quad \text{mit} \quad D = [-2, +2]$$

   i. bestimmt man die kritschen Punkte anhand der Ableitung (Seite 93 im Skriptum),

   $$y_1'(x) = 1 - x - x^2 + x^3 = (x+1)(x-1)^2$$

   durch

   A. $z \in D$, wobei $y'(x) = 0$, sind $z = -1, +1$,

   B. $c \in D$, wobei $y'(x)$ nicht existiert, sind keine und

   C. r am Rand von D sind $r = -2, +2$,

   ii. und wertet in diesen Stellen aus,

   A. $y_1(z)$ für jedes z sind $y_1(-1) = -11/12$, $y_1(+1) = 5/12$,

   B. $y_1(c)$ für jedes c sind keine und

   C. $y_1(r)$ für jedes r sind $y_1(-2) = 8/3$, $y_1(+2) = 4/3$.

   iii. Anhand dieser Auswertungen ist das globale Maximum gegeben durch den größten Wert $y_1(-2) = 8/3$, und das globale Minimum ist gegeben durch den kleinsten Wert $y_1(-1) = -11/12$.

   (b) Laut des Rezepts (Seite 122 im Skriptum) zur Bestimmung der globalen Extrema der Funktion

   $$y_2(x) = 8\sqrt[3]{x^2}/(8 + x^2) \quad \text{mit} \quad D = [-4, +4]$$

   i. bestimmt man die kritschen Punkte anhand der Ableitung (Seite 98 im Skriptum),

   $$y_2'(x) = \frac{32(4 - x^2)}{3\sqrt[3]{x}(8 + x^2)^2} = \frac{32}{3(8 + x^2)^2}\,\frac{(2 + x)(2 - x)}{\sqrt[3]{x}}$$

   durch

   A. $z \in D$, wobei $y_2'(x) = 0$, sind $z = -2, +2$,

   B. $c \in D$, wobei $y'(x)$ nicht existiert, ist $c = 0$ und

   C. r am Rand von D sind $r = -4, +4$,

   ii. und wertet in diesen Stellen aus,

   A. $y_2(z)$ für jedes z sind $y_2(-2) = 2^{\frac{5}{3}}/3 = y_2(+2)$,

   B. $y_2(c)$ für jedes c ist $y_2(0) = 0$ und

   C. $y_2(r)$ für jedes r sind $y_2(-4) = 2^{\frac{4}{3}}/3 = y_2(+4)$.

   iii. Anhand dieser Auswertungen ist das globale Maximum gegeben durch den größten Wert $y_2(-2) = y_2(+2) = 2^{\frac{5}{3}}/3$, und das globale Minimum ist gegeben durch den kleinsten Wert $y_2(0) = 0$.

(c) Laut des Rezepts (Seite 122 im Skriptum) zur Bestimmung der globalen Extrema der Funktion

$$y_3(x) = \frac{\text{sign}(x)}{1+|x|} \quad \text{mit} \quad D = [-2, +2]$$

i. bestimmt man die kritschen Punkte anhand der Ableitung (vgl. Beispiel 5c auf Übungsblatt 6),

$$y_3'(x) = \begin{cases} D_x \dfrac{-1}{1-x}, & x < 0 \\ D_x \dfrac{1}{1+x}, & x < 0 \\ \text{nicht stetig} \Rightarrow \text{nicht differenzierbar}, & x = 0 \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{-1}{(1-x)^2}, & x < 0 \\ \dfrac{-1}{(1+x)^2}, & x > 0 \\ \text{existiert nicht}, & x = 0 \end{cases} \quad \text{d.h.} \quad y_3'(x) = \frac{-1}{(1+|x|)^2}, \quad x \neq 0$$

durch

A. $z \in D$, wobei $y_3'(x) = 0$, sind keine,

B. $c \in D$, wobei $y_3'(x)$ nicht existiert, ist $c = 0$ und

C. r am Rand von D sind $r = -1, +1$,

ii. und wertet in diesen Stellen aus,

A. $y_3(z)$ für jedes z sind keine,

B. $y_3(c)$ ($\lim_{x \to c^\pm} y(x)$, y nicht stetig) für jedes c sind $y_3(0) = 0$,

$$\lim_{x \to 0^-} y(x) = -1 \quad \text{und} \quad \lim_{x \to 0^+} y(x) = +1 \quad \text{und}$$

C. $y_3(r)$ für jedes r sind $y_3(-1) = -1/2$, $y_2(+1) = 1/2$.

iii. Anhand dieser Auswertungen ist der größte Wert $\lim_{x \to 0^+} y_3(0) = +1$ das globale Supremum (d.h. der Wert wird von der Funktion nur angenähert aber nicht angenommen), und der kleinste Wert $\lim_{x \to 0^-} y_3(0) = -1$ ist das globale Infimum (d.h. der Wert wird von der Funktion nur angenähert aber nicht angenommen).

2. Anwendung der globalen Extrema:

(a) Seien x der Radius der Dose und y die Höhe. Das Volumen ist $V = 0.0005\text{m}^3$, und es gilt

$$0.0005 = V = \pi x^2 y \quad \text{oder} \quad y = \frac{1}{2000\pi x^2}$$

Die Oberfläche der Dose ist

$$O = \pi x^2 \quad \text{(Deckel)} \quad + \pi x^2 \quad \text{(Boden)} \quad + 2\pi x y \quad \text{(Seiten)}$$

Durch die letzten zwei Gleichungen lässt sich die Oberfläche bezüglich einer einzigen Variable x darstellen,

$$O(x) = 2\pi x^2 + 2\pi x \frac{1}{2000\pi x^2}$$

Diese Funktion wird natürlich auf dem Definitionsbereich $D = (0, \infty)$ eingeschränkt, d.h. es ist nur Sinnvoll dass $x > 0$ gilt, und es ist vorher unbekannt, wie groß x sein soll.

Laut des Rezepts (Seite 122 im Skriptum) zur Bestimmung der globalen Extrema der Funktion

$$O(x) = 2\pi x^2 + \frac{1}{1000x} \quad \text{mit} \quad D = (0, \infty)$$

i. bestimmt man die kritschen Punkte anhand der Ableitung,

$$O'(x) = 4\pi x - \frac{1}{1000x^2} = \frac{4000\pi x^3 - 1}{1000x^2}$$

durch

A. $z \in D$, wobei $O'(z) = 0$, ist $z = 1/(10 \cdot \pi^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{2}{3}})$,

B. $c \in D$, wobei $O'(c)$ nicht existiert, sind keine (da $0 \notin D$) und

C. r am Rand von D sind $r = 0, +\infty$,

ii. und wertet in diesen Stellen aus,

A. $O(z)$ für jedes z ist $O(1/(10 \cdot \pi^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{2}{3}})) = 0.03(\pi/2)^{\frac{1}{3}}$,

B. $O(c)$ für jedes c sind keine und

C. $O(r)$ ($\lim_{x \to r^\pm} O(x)$, D offen) für jedes r,

$$\lim_{x \to 0^+} O(x) = +\infty = \lim_{x \to \infty} O(x)$$

iii. Anhand dieser Auswertungen ist der größte Wert $\lim_{x \to 0^+} O(x) = \lim_{x \to \infty} O(x) = +\infty$ das globale Supremum (d.h. die Funktionswerte werden beliebig groß und $+\infty$ wird von der Funktion nicht angenommen), und der kleinste Wert $O(1/(10 \cdot \pi^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{2}{3}})) = 0.03(\pi/2)^{\frac{1}{3}}$ ist das globale Minimum. Daher werden Materialkosten durch

$$x^* = \frac{1}{10 \cdot \pi^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{2}{3}}} \text{m} \approx 0.0430127\text{m} \approx 4.3\text{cm}$$

und

$$y^* = \frac{1}{2000\pi x^{*2}} \text{m} = \frac{1}{5 \cdot \pi^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{2}{3}}} \text{m} \approx 0.0860254\text{m} \approx 8.6\text{cm}.$$

minimiert.

(b) Sei der trapezförmige Querschnitt mit Eckpunkten $(-1, 0)$, $(1, 0)$, $(-z, h)$ und (z, h) mit $z, h \geq 0$ definiert. Da die Punkte $(-z, h)$ und (z, h) in der Kurve $y(x) = \sqrt{1 - x^2}$ liegen müssen, folgt $h = \sqrt{1 - z^2}$. Der gesamte Flächeninhalt (eines Trapezes) ist gegeben durch

$$F(z) = \frac{\text{Summe der Längen der parallelen Seiten}}{2} \times \text{Höhe} = \frac{2z + 2}{2} y(z) = (z + 1)\sqrt{1 - z^2}$$

Diese Funktion wird natürlich mit dem Definitionsbereich $D = [0, 1]$ versehen, da die Aushöhlung für den Tunnel durch den halbkreisförmigen Querschnitt eingeschränkt ist.

Laut des Rezepts (Seite 122 im Skriptum) zur Bestimmung der globalen Extrema der Funktion

$$F(z) = (z + 1)\sqrt{1 - z^2} \quad \text{mit} \quad D = [0, 1]$$

i. bestimmt man die kritschen Punkte anhand der Ableitung,

$$F'(z) = \sqrt{1 - z^2} + (1 + z)\frac{-z}{\sqrt{1 - z^2}} = \frac{1 - z - 2z^2}{\sqrt{1 - z^2}} = \frac{(1 - 2z)(1 + z)}{\sqrt{1 - z}\sqrt{1 + z}}$$

durch

A. $z \in D$, wobei $F'(z) = 0$, ist $z = 1/2$ ($-1 \notin D$),

B. $c \in D$, wobei $F'(c)$ nicht existiert, ist $c = 1$ ($-1 \notin D$) und

C. r am Rand von D sind $r = 0, 1$

ii. und wertet in diesen Stellen aus,

A. $F(z)$ für jedes z ist $F(1/2) = 3\sqrt{3}/4$,

B. $F(c)$ für jedes c ist $F(1) = 0$ und

C. $F(r)$ für jedes r sind $F(0) = 0$, $F(1) = 0$.

iii. Anhand dieser Auswertungen ist das globale Maximum gegeben durch den größten Wert $F(1/2) = 3\sqrt{3}/4$, und das globale Minimum ist gegeben durch den kleinsten Wert $F(0) = F(1) = 0$. Daher wird der Flächeninhalt (und folglich der Durchfluss) durch $z = 1/2$ maximiert.

3. Findung einer Nullstelle:

(a) Der Wert $\sqrt[3]{2}$ wird als Nullstelle der Funktion $f(x) = x^3 - 2$ annäherungsweise mit dem Bisektionsverfahren folgendermaßen bestimmt. Als Polynom ist f auf $\mathbb{R}$ stetig, und mit $a = 0$ und $b = 2$ gelten $f(a) = -2 < 0$ und $f(b) = 6 > 0$.

Daher wendet man das Bisektionsverfahren im Intervall $[0, 2]$ an. Mit den Anfangswerten $a = 0$ und $b = 2$ und immer $c = (a+b)/2$ liefert das Bisektionsverfahren folgende Ergebnisse:

c	$f(c)$	a	b
1.00000	−1.00000	0.00000	2.00000
1.50000	+1.37500	1.00000	2.00000
1.25000	−0.04688	1.00000	1.50000
1.37500	+0.59961	1.25000	1.50000
1.31250	+0.26099	1.25000	1.37500
1.28125	+0.10330	1.25000	1.31250
1.26562	+0.02729	1.25000	1.28125
1.25781	−0.01002	1.25000	1.26562
1.26172	+0.00857	1.25781	1.26562
1.25977	−0.00074	1.25781	1.26172
1.26074	+0.00391	1.25977	1.26172
1.26025	+0.00159	1.25977	1.26074
1.26001	+0.00042	1.25977	1.26025
1.25989	−0.00016	1.25977	1.26001
1.25995	+0.00013	1.25989	1.26001
1.25992	−0.00001	1.25989	1.25995
1.25993	+0.00006	1.25992	1.25995

d.h. eine Nullstelle für $f(x)$ ist $x_0 \approx 1.2599$.

(b) Der Wert $\sqrt[3]{2}$ wird als Nullstelle der Funktion $f(x) = x^3 - 2$ annäherungsweise mit dem Newtonschen Verfahren folgendermaßen bestimmt. Als Polynom ist f auf $\mathbb{R}$ differenzierbar. Die Iteration des Newtonschen Verfahrens ist

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k - \frac{x_k^3 - 2}{3x_k^2}$$

oder

$$x_{k+1} = \frac{2(1 + x_k^3)}{3x_k^2}, \quad k = 0, 1, 2 \dots$$

Mit $x_0 = 2$ liefert das Newtonsche Verfahren folgende Ergebnisse

k	x_k
0	2.0000
1	1.5000
2	1.2963
3	1.2609
4	1.2599
5	1.2599

d.h. eine Nullstelle für $f(x)$ ist $x_0 \approx 1.2599$. Hier findet man das Ergebnis mit viel weniger Aufwand durch das Newtonschen Verfahren als durch das Bisektionsverfahren.

4. Regel der l'Hôpital:

Bevor die Regel der l'Hôpital angewendet werden darf, muss kontrolliert werden, ob es sich um eine unbestimmte Form handelt, z.B. $0/0$, ∞/∞, 0^∞, ∞^0, etc.

(a) Für die Funktion $f_1(x) = \sin(2x)/x$ gibt es den Grenzwert $\sin(2x) \stackrel{x\to 0}{\longrightarrow} 0$ für den Zahler von f_1 und den Grenzwert $x \stackrel{x\to 0}{\longrightarrow} 0$ für den Nenner von f_1. Daher folgt mit der Regel der l'Hôpital,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{D_x \sin(2x)}{D_x x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos(2x) D_x(2x)}{1} = \lim_{x\to 0} 2\cos(2x) = 2$$

(b) Für die Funktion $f_2(x) = xe^{-2x}$ gibt es den Grenzwert $e^{2x} \stackrel{x\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ für den Nenner des Terms $e^{-2x} = 1/e^{2x}$ in f_2 und den Grenzwert $x \stackrel{x\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$ für den Zahler x von f_2. Daher folgt mit der Regel der l'Hôpital,

$$\lim_{x\to\infty} xe^{-2x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^{2x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{D_x x}{D_x e^{2x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{e^{2x} D_x(2x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2e^{2x}} = 0$$

(c) Für die Funktion $f_3(x) = x\ln(1/x)$ gibt es den Grenzwert $x^{-1} \stackrel{x\to 0^+}{\longrightarrow} \infty$ für den Nenner des Terms $x = 1/x^{-1}$ in f_3 und den Grenzwert $\ln(1/x) = -\ln(x) \stackrel{x\to 0^+}{\longrightarrow} +\infty$ für den Zahler $\ln(1/x)$ von f_3. Daher folgt mit der Regel der l'Hôpital,

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln(1/x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x^{-1})}{1/x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-\ln(x)}{x^{-1}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-D_x \ln(x)}{D_x x^{-1}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-1/x}{-1/x^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{1/x} = \lim_{x\to 0^+} x = 0$$

5. Implizites Ableiten:

(a) In Abhängigkeit von der Zeit t (sek) ist die Beziehung zwischen dem Volumen $V(t)$ (cm^3), dem Radius $r(t)$ (cm) und der Höhe $h(t)$ (cm) des zylinderförmigen Pizzateigs gegeben durch

$$500 = V(t) = \pi r^2(t) h(t).$$

Da das Volumen konstant bleibt, ist die zeitliche Änderungsrate des Volumens

$$V'(t) = 0 \text{ cm}^3/\text{sek}.$$

Gegeben worden ist, die zeitliche Änderungsrate der Höhe ist

$$h'(t) = -1 \text{ cm/sek}$$

Auch gegeben worden sind, die Anfangshöhe ist

$$h(0) = 10 \text{ cm}$$

und die Endhöhe ist

$$h(\tau) = 0.5 \text{ cm},$$

wobei τ die Endzeit bezeichnet. Mit der obigen zeitlichen Änderungsrate der Höhe $h'(t) = -1$ cm/sek $= h'$ (Konstante), $0 \leq t \leq \tau$, folgt

$$h(t) = h(0) + h' \times t = 10 - t.$$

Durch die Auswertung in $t = \tau$ folgt aus $0.5 = h(\tau) = 10 - \tau$ dass

$$\tau = 9.5 \text{ sek}.$$

(b) Aus der Anfangsbeziehung zwischen Volumen, Radius und Höhe,

$$500 = V(0) = \pi r(0)^2 h(0) = 10\pi r(0)^2$$

folgt der Anfangsradius

$$r(0) = \sqrt{50/\pi} \approx 4.0 \text{ cm}.$$

Aus der Endbeziehung zwischen Volumen, Radius und Höhe,

$$500 = V(\tau) = \pi r(\tau)^2 h(\tau) = 0.5\pi r(\tau)^2$$

folgt der Endradius

$$r(\tau) = \sqrt{1000/\pi} \approx 17.8 \text{ cm}.$$

Aus der Beziehung zwischen den durch implizites Ableiten gegebenen Änderungsraten

$$0 = V'(t) = 2\pi r(t) r'(t) h(t) + \pi r(t)^2 h'(t) = 2\pi r(t) r'(t)(10 - t) - \pi r(t)^2$$

folgen anfänglich d.h. zur Zeit $t = 0$,

$$0 = V'(0) = 20\pi r(0) r'(0) - \pi r(0)^2 = 20\pi \sqrt{50/\pi} r'(0) - \pi(\sqrt{50/\pi})^2$$

$$\text{oder} \quad r'(0) = 1/(2\sqrt{2\pi}) \approx 0.2 \text{ cm/sek}$$

und endlich d.h. zur Zeit $t = \tau$,

$$0 = V'(\tau) = \pi r(\tau) r'(\tau) - \pi r(\tau)^2 = \pi \sqrt{1000/\pi} r'(\tau) - \pi(\sqrt{1000/\pi})^2$$

$$\text{oder} \quad r'(\tau) = \sqrt{1000/\pi} \approx 17.8 \text{ cm/sek}.$$