

# Integral- und Differentialrechnungen für USW

## Lösungen der Beispiele des 7. Übungsblatts

### 1. Steigende und Fallende Funktionen:

Die waagerechte Asymptote für die Funktion  $r(t) = t/(2t + 3)$  ist gegeben durch

$$r^* = \lim_{t \rightarrow \infty} r(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t}{2t + 3} \left( \frac{t^{-1}}{t^{-1}} \right) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2 + 3/t} = \frac{1}{2}$$

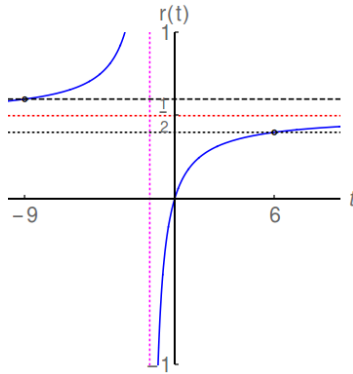
Die Gleichung  $|r^* - r(\tau)| = 1/10$  gilt, wenn entweder  $r^* - r(\tau) = -1/10$  oder  $r^* - r(\tau) = 1/10$  gelten. Die Gleichung  $r^* - r(t_1) = -1/10$  gilt, wenn

$$-\frac{1}{10} = r^* - r(t_1) = \frac{1}{2} - \frac{t_1}{2t_1 + 3} \Leftrightarrow \frac{3}{5} = \frac{t_1}{2t_1 + 3} \Leftrightarrow 6t_1 + 9 = 5t_1 \quad \text{oder} \quad t_1 = -9$$

Die Gleichung  $r^* - r(t_2) = 1/10$  gilt, wenn

$$\frac{1}{10} = r^* - r(t_2) = \frac{1}{2} - \frac{t_2}{2t_2 + 3} \Leftrightarrow \frac{2}{5} = \frac{t_2}{2t_2 + 3} \Leftrightarrow 4t_2 + 6 = 5t_2 \quad \text{oder} \quad t_2 = 6$$

Man sieht diese Punkte  $(t_1, r(t_1)) = (-9, r(-9))$  und  $(t_2, r(t_2)) = (6, r(6))$  in der folgenden grafischen Darstellung des Beispiels.



Die Grafik für  $r(t)$  ist blau, die waagerechte Asymptote ( $y = r^* = \frac{1}{2}$ ) ist gepunktet rot, die senkrechte Asymptote ( $x = -\frac{3}{2}$ ) ist gepunktet magenta und der Schlauch rund um die waagerechte Asymptote (d.h.  $y = r^* - \frac{1}{10} = \frac{4}{10}$ ,  $y = r^* + \frac{1}{10} = \frac{6}{10}$ ) liegt zwischen den schwarz gestrichelten waagerechten Linien.

Der Wert  $\tau \in \mathbb{R}_+$  (d.h.  $\tau > 0$  und  $t_1 = -9 \notin \mathbb{R}_+$ ,  $t_2 = +6 \in \mathbb{R}_+$ ), bei dem  $|r^* - r(\tau)| = 1/10$  gilt, ist daher  $\tau = t_2 = 6$ .

Die Ableitung von  $r(t)$  erfüllt

$$r'(t) = \frac{1(2t + 3) - t(2)}{(2t + 3)^2} = \frac{3}{(2t + 3)^2} > 0, \quad \forall t > \tau \quad (\text{tatsächlich } \forall t \neq -\frac{3}{2})$$

und daher ist  $r(t)$  streng steigend auf dem Intervall  $(\tau, +\infty)$ , wie man in der oberen Grafik sieht. Daher für  $t > \tau$  gilt

$$r^* - \frac{1}{10} = r(\tau) < r(t) < \lim_{t \rightarrow \infty} = r^*$$

Wenn mit  $(-1)$  multipliziert wird, ergibt sich

$$\frac{1}{10} - r^* > -r(t) > -r^*$$

Wenn  $r^*$  summiert wird, ergibt sich

$$\frac{1}{10} > r^* - r(t) > 0$$

und daher folgt die gewünschte Ungleichung

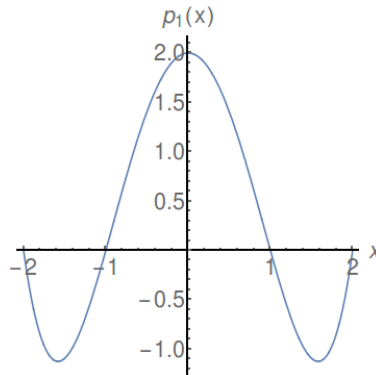
$$0 < r^* - r(t) = |r^* - r(t)| < \frac{1}{10}, \quad \forall t > \tau = 6.$$

## 2. Bildbereich durch lokale Extrema:

(a) Das Polynom

$$p_1(x) = (4 - 5x^2 + x^4)/2 \quad \text{mit} \quad D = [-2, +2]$$

hat die grafische Darstellung,



Die Ableitung ist

$$p_1'(x) = x(2x^2 - 5) = 2x(x + \sqrt{5/2})(x - \sqrt{5/2})$$

Anhand der folgenden Tabelle,

	$[-2, -\sqrt{5/2})$	$(-\sqrt{5/2}, 0)$	$(0, \sqrt{5/2})$	$(\sqrt{5/2}, +2]$
$2x$	$\ominus$	$\ominus$	$\oplus$	$\oplus$
$(x + \sqrt{5/2})$	$\ominus$	$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$
$(x - \sqrt{5/2})$	$\ominus$	$\ominus$	$\ominus$	$\oplus$
$p_1'(x)$	$\ominus$	$\oplus$	$\ominus$	$\oplus$
$p_1(x)$	fallend	steigend	fallend	steigend

sieht man,  $p_1(x)$  besitzt lokale Extrema in

$$x = -2, \quad -\sqrt{5/2}, \quad 0, \quad +\sqrt{5/2} \quad \text{und} \quad +2.$$

Auswertungen in diesen Stellen sind

$$p_1(-2) = 0, \quad p_1(-\sqrt{5/2}) = -9/8, \quad p_1(0) = 2, \quad p_1(+\sqrt{5/2}) = -9/8 \quad \text{und} \quad p_1(+2) = 0.$$

Da  $p_1(x)$  in den jeweiligen Teilintervallen,  $[-2, -\sqrt{5/2})$ ,  $(\sqrt{5/2}, 0)$ ,  $(0, \sqrt{5/2})$  und  $(\sqrt{5/2}, 2]$ , stetig und monoton ist, folgt mit dem Zwischenwertsatz, dass  $p_1(x)$  genau alle Werte annimmt, die zwischen den  $p_1$ -Werten der Endpunkte dieser Teilintervalle liegen. Insbesondere gelten die folgenden Aussagen.

In  $[-2, -\sqrt{5/2})$  nimmt  $p_1(x)$  genau die Werte zwischen  $p_1(-2) = 0$  und  $p_1(-\sqrt{5/2}) = -9/8$  an.

In  $(-\sqrt{5/2}, 0)$  nimmt  $p_1(x)$  genau die Werte zwischen  $p_1(-\sqrt{5/2}) = -9/8$  und  $p_1(0) = 2$  an.

In  $(0, \sqrt{5/2})$  nimmt  $p_1(x)$  genau die Werte zwischen  $p_1(0) = 2$  und  $p_1(\sqrt{5/2}) = -9/8$  an.

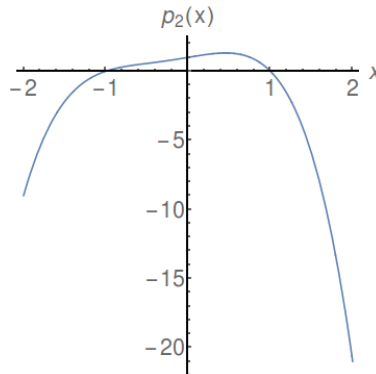
In  $(\sqrt{5/2}, 2]$  nimmt  $p_1(x)$  genau die Werte zwischen  $p_1(\sqrt{5/2}) = -9/8$  und  $p_1(2) = 0$  an.

Daher ist der Bildbereich  $B = [-9/8, 2]$ . (vgl. Seite 31 im Skriptum)

(b) Das Polynom

$$p_2(x) = 1 + x - x^3 - x^4 \quad \text{mit} \quad D = [-2, +2]$$

hat die grafische Darstellung,



Die Ableitung ist

$$p_2'(x) = 1 - 3x^2 - 4x^3$$

Wegen der Stetigkeit von  $p_2'(x)$  und den Auswertungen  $p_2'(0) = 1$  und  $p_2'(1) = -6$  existiert

eine Nullstelle für  $p'_2(x)$  im Intervalle  $[0, 1]$ . Man sieht mit dem Bisektionsverfahren,

$c$	$p'_2(c)$	$a$	$b$
0.50000	-0.25000	0.00000	1.00000
0.25000	0.75000	0.00000	0.50000
0.37500	0.36719	0.25000	0.50000
0.43750	0.09082	0.37500	0.50000
0.46875	-0.07117	0.43750	0.50000
0.45312	0.01189	0.43750	0.46875
0.46094	-0.02912	0.45312	0.46875
0.45703	-0.00849	0.45312	0.46094
0.45508	0.00173	0.45312	0.45703
0.45605	-0.00337	0.45508	0.45703
0.45557	-0.00082	0.45508	0.45605
0.45532	0.00046	0.45508	0.45557
0.45544	-0.00018	0.45532	0.45557
0.45538	0.00014	0.45532	0.45544
0.45541	-0.00002	0.45538	0.45544
0.45540	0.00006	0.45538	0.45541
0.45541	0.00002	0.45540	0.45541

$p'_2(x)$  besitzt eine Nullstelle in  $x_3 \approx 0.45541$ . Durch Polynomdivision

$$\begin{array}{r}
 -4.00000x^3 \quad -3.00000x^2 \quad \quad \quad 1.00000 \quad \div \quad x - 0.45541 \quad = \quad -4.00000x^2 - 4.82164x - 2.19582 \\
 \ominus \quad -4.00000x^3 \quad +1.82164x^2 \\
 \hline
 \quad \quad \quad 0 \quad -4.82164x^2 \quad \quad \quad \quad \quad \quad 1 \\
 \ominus \quad \quad \quad -4.82164x^2 \quad +2.19582x \quad 1.00000 \\
 \hline
 \quad \quad \quad \quad \quad 0 \quad -2.19582x \quad 1.00000 \\
 \ominus \quad \quad \quad \quad \quad -2.19582x \quad 1.00000 \\
 \hline
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad 0
 \end{array}$$

ergibt sich die Faktorisierung,

$$p'_2(x) = (x - 0.45541)(-4.00000x^2 - 4.82164x - 2.19582)$$

und die Nullstellen des quadratischen Faktors  $(-4.00000x^2 - 4.82164x + 2.19582)$  sind

$$x_{1,2} = \frac{4.82164 \pm \sqrt{4.82164^2 - 4(-4.00000)(-2.19582)}}{2(-4.00000)} = \frac{4.82164 \pm \sqrt{-11.8849}}{-8.00000} \in \mathbb{C}$$

Daher ist  $x_3 \approx 0.45541$  die *einzig* (reelle) Nullstelle von  $p'_2(x)$ . Anhand der Stetigkeit von  $p'_2(x)$  folgt mit dem Zwischenwertsatz durch die Auswertungen,

$$\begin{array}{l}
 p'_2(0) = +1 > 0 \quad \text{dass} \quad p'_2(x) > 0 \text{ gilt in } [-2, x_3] \\
 p'_2(1) = -6 < 0 \quad \text{dass} \quad p'_2(x) < 0 \text{ gilt in } (x_3, +2]
 \end{array}$$

Daher besitzt  $p_2(x)$  lokale Extrema in

$$x = -2, \quad x_3 \approx 0.45541 \quad \text{und} \quad +2.$$

Auswertungen in diesen Stellen sind

$$p_2(-2) = -9, \quad p_2(x_3) = \mu \approx 1.31794 \quad \text{und} \quad p_2(+2) = -21.$$

Da  $p_2(x)$  in den jeweiligen Teilintervallen,  $[-2, -x_3)$  und  $(x_3, 2]$ , stetig und monoton ist, folgt mit dem Zwischenwertsatz, dass  $p_2(x)$  genau alle Werte annimmt, die zwischen den  $p_2$ -Werten der Endpunkte dieser Teilintervalle liegen. Insbesondere gelten die folgenden Aussagen.

In  $[-2, x_3)$  nimmt  $p_2(x)$  genau die Werte zwischen  $p_2(-2) = -9$  und  $p_2(x_3) = \mu \approx 1.31794$  an.

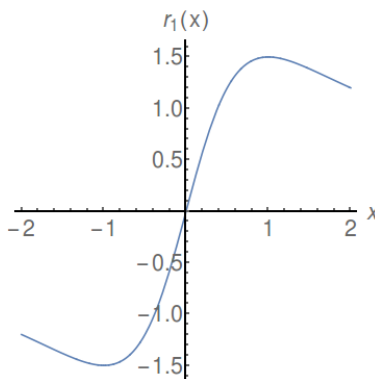
In  $(x_3, +2]$  nimmt  $p_2(x)$  genau die Werte zwischen  $p_2(x_3) = \mu \approx 1.31794$  und  $p_2(2) = -21$  an.

Daher ist der Bildbereich  $B = [-21, \mu]$ . (vgl. Seite 31 im Skriptum)

(c) Die rationale Funktion

$$r_1(x) = 3x/(1+x^2) \quad \text{mit} \quad D = [-2, +2]$$

hat die grafische Darstellung



Die Ableitung ist

$$r_1'(x) = \frac{3(1+x^2) - (3x)(2x)}{(1+x^2)^2} = \frac{3(1-x^2)}{(1+x^2)^2} = \frac{3(1+x)(1-x)}{(1+x^2)^2}$$

Anhand der folgenden Tabelle,

	$[-2, -1)$	$(-1, +1)$	$(+1, +2]$
$(1+x)$	$\ominus$	$\oplus$	$\oplus$
$(1-x)$	$\oplus$	$\oplus$	$\ominus$
$(1+x^2)^2$	$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$
$r_1'(x)$	$\ominus$	$\oplus$	$\ominus$
$r_1(x)$	fallend	steigend	fallend

sieht man,  $r_1(x)$  besitzt lokale Extrema in

$$x = -2, \quad -1, \quad +1 \quad \text{und} \quad +2.$$

Auswertungen in diesen Stellen sind

$$r_1(-2) = -6/5, \quad r_1(-1) = -3/2, \quad r_1(+1) = +3/2 \quad \text{und} \quad r_1(+2) = 6/5.$$

Da  $r_1(x)$  in den jeweiligen Teilintervallen,  $[-2, -1)$ ,  $(-1, +1)$  und  $(+1, +2]$ , stetig und monoton ist, folgt mit dem Zwischenwertsatz, dass  $r_1(x)$  genau alle Werte annimmt, die

zwischen den  $r_1$ -Werten der Endpunkte dieser Teilintervalle liegen. Insbesondere gelten die folgenden Aussagen.

In  $[-2, -1)$  nimmt  $r_1(x)$  genau die Werte zwischen  $r_1(-2) = -6/5$  und  $r_1(-1) = -3/2$  an.

In  $(-1, +1)$  nimmt  $r_1(x)$  genau die Werte zwischen  $r_1(-1) = -3/2$  und  $r_1(+1) = +3/2$  an.

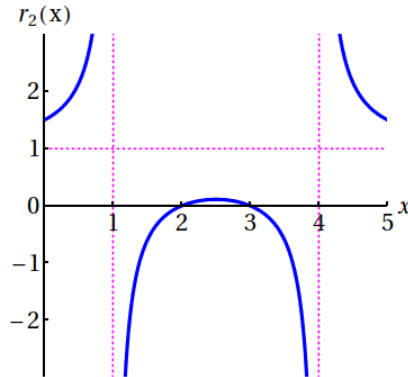
In  $(+1, +2]$  nimmt  $r_1(x)$  genau die Werte zwischen  $r_1(+1) = +3/2$  und  $r_1(+2) = +6/5$  an.

Daher ist der Bildbereich  $B = [-3/2, 3/2]$ . (vgl. Seite 35 im Skriptum)

(d) Die rationale Funktion

$$r_2(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 5x + 4} \quad \text{mit} \quad D = [0, 5] \setminus \{1, 3\}$$

hat die grafische Darstellung



Die Ableitung ist

$$r_2'(x) = \frac{(2x - 5)(x^2 - 5x + 4) - (x^2 - 5x + 6)(2x - 5)}{(x^2 - 5x + 4)^2} = \frac{10 - 4x}{(x^2 - 5x + 4)^2}$$

Anhand der folgenden Tabelle,

	$[0, 1)$	$(1, 5/2)$	$(5/2, 4)$	$(4, 5]$
$(10 - 4x)$	$\oplus$	$\oplus$	$\ominus$	$\ominus$
$(x^2 - 5x + 4)^2$	$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$
$r_2'(x)$	$\oplus$	$\oplus$	$\ominus$	$\ominus$
$r_2(x)$	steigend	steigend	fallend	fallend

sieht man,  $r_2(x)$  besitzt lokale Extrema in

$$x = 0, \quad 5/2 \quad \text{und} \quad 5.$$

Auswertungen in diesen Stellen und Grenzwerte in  $\{1^\pm, 4^\pm\}$  (isolierte Punkte außerhalb von  $D$ ) sind

$$\begin{aligned} r_2(0) &= 3/2, \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} r_2(x) &= +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} r_2(x) = -\infty, \\ r_2(5/2) &= 1/9 \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} r_2(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 4^+} r_2(x) = +\infty$$

und  $r_2(5) = 3/2$ .

Da  $r_2(x)$  in den jeweiligen Teilintervallen,  $[0, 1)$ ,  $(1, 5/2]$ ,  $[5/2, 4)$  und  $(4, 5]$ , stetig und monoton ist, folgt mit dem Zwischenwertsatz, dass  $r_2(x)$  genau alle Werte annimmt, die zwischen den  $r_2$ -Werten oder  $r_2$ -Grenzwerten der Endpunkte dieser Teilintervalle liegen. Insbesondere gelten die folgenden Aussagen.

In  $[0, 1)$  nimmt  $r_2(x)$  genau die Werte zwischen  $r_2(0) = 3/2$  und  $\lim_{x \rightarrow 1^-} r_2(x) = +\infty$  an.

In  $(1, 5/2]$  nimmt  $r_2(x)$  genau die Werte zwischen  $\lim_{x \rightarrow 1^+} r_2(x) = -\infty$  und  $r_2(5/2) = 1/9$  an.

In  $[5/2, 4)$  nimmt  $r_2(x)$  genau die Werte zwischen  $r_2(5/2) = 1/9$  und  $\lim_{x \rightarrow 4^-} r_2(x) = -\infty$  an.

In  $(4, 5]$  nimmt  $r_2(x)$  genau die Werte zwischen  $\lim_{x \rightarrow 4^+} r_2(x) = +\infty$  und  $r_2(5) = 3/2$  an.

Daher ist der Bildbereich  $B = [3/2, +\infty) \cup (-\infty, 1/9]$ . (vgl. Seite 68 im Skriptum)

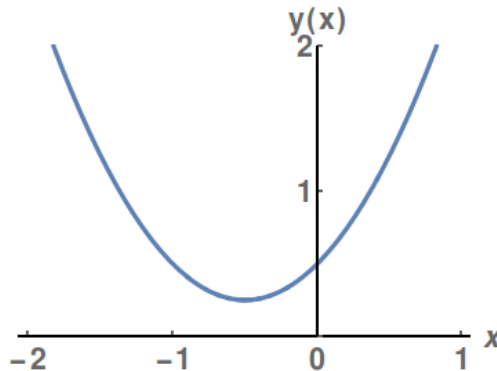
### 3. Kriterien der lokalen Extrema:

- (a) Die folgenden sind alle lokalen Extrema der auf Seiten 92 - 101 im Skriptum abgebildeten Funktionen, für die das Kriterium der ersten Ableitung zutrifft. Für Details über die Berechnung der Ableitungen sehen Sie Blatt 6, Beispiel 4.

- i. Die grafische Darstellung der Funktion

$$y(x) = x^2 + x + 1/2, \quad D = \mathbb{R}$$

ist



Es gelten

$$y'(x) = 2x + 1 = 2(x + 1/2)$$

	$(-\infty, -1/2)$	$(-1/2, +\infty)$
$(x + 1/2)$	$\ominus$	$\oplus$
$y'(x)$	$\ominus$	$\oplus$
$y(x)$	fallend	steigend

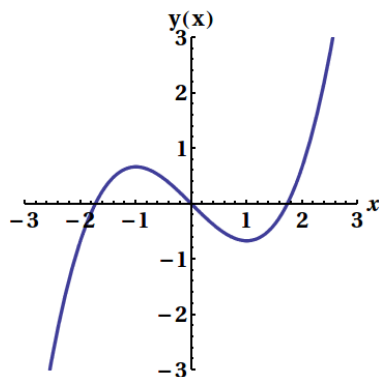
und daher laut des Kriteriums der ersten Ableitung gibt es ein lokales Minimum in  $x = -\frac{1}{2}$ .

Falls der Definitionsbereich auf  $D = [-2, +1]$  eingeschränkt wäre, gäbe es durch das Kriterium der ersten Ableitung lokale Maxima in  $x = -2$  und in  $x = +1$ .

ii. Die grafische Darstellung der Funktion

$$y(x) = x^3/3 - x, \quad D = \mathbb{R}$$

ist



Es gelten

$$y'(x) = x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1)$$

	$(-\infty, -1)$	$(-1, +1)$	$(+1, \infty)$
$(x + 1)$	$\ominus$	$\oplus$	$\oplus$
$(x - 1)$	$\ominus$	$\ominus$	$\oplus$
$y'(x)$	$\oplus$	$\ominus$	$\oplus$
$y(x)$	steigend	fallend	steigend

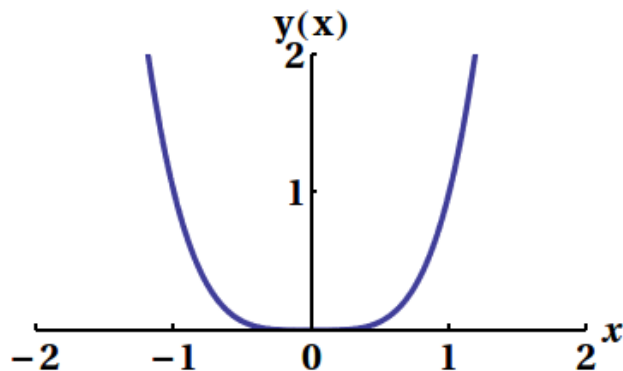
und daher laut des Kriteriums der ersten Ableitung gibt es ein lokales Maximum in  $x = -1$  und ein lokales Minimum in  $x = +1$ .

Falls der Definitionsbereich auf  $D = [-2, +2]$  eingeschränkt wäre, gäbe es durch das Kriterium der ersten Ableitung ein lokales Minimum in  $x = -2$  und ein lokales Maximum in  $x = +2$ .

iii. Die grafische Darstellung der Funktion

$$y(x) = x^4, \quad D = \mathbb{R}$$

ist



Es gelten

$$y'(x) = 4x^3$$



	$(-\infty, 0)$	$(0, +\infty)$
$x^3$	$\ominus$	$\oplus$
$y'(x)$	$\ominus$	$\oplus$
$y(x)$	fallend	steigend

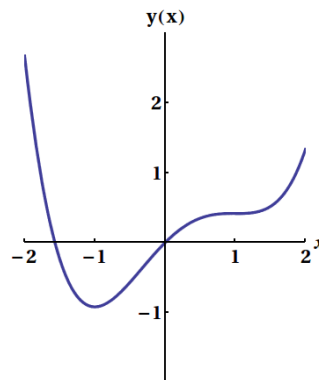
und daher laut des Kriteriums der ersten Ableitung gibt es ein lokales Minimum in  $x = 0$ .

Falls der Definitionsbereich auf  $D = [-2, +2]$  eingeschränkt wäre, gäbe es durch das Kriterium der ersten Ableitung lokale Maxima in  $x = -2$  und in  $x = +2$ .

iv. Die grafische Darstellung der Funktion,

$$y(x) = x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4, \quad D = \mathbb{R}$$

ist



Es gelten

$$y'(x) = 1 - x - x^2 + x^3 = (x + 1)(x - 1)^2$$

	$(-\infty, -1)$	$(-1, +1)$	$(+1, \infty)$
$(x + 1)$	$\ominus$	$\oplus$	$\oplus$
$(x - 1)^2$	$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$
$y'(x)$	$\ominus$	$\oplus$	$\oplus$
$y(x)$	fallend	steigend	steigend

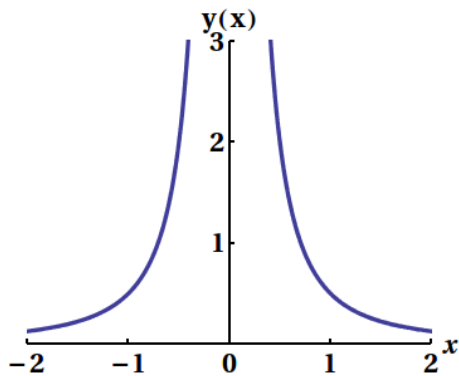
und daher laut des Kriteriums der ersten Ableitung gibt es ein lokales Minimum in  $x = -1$ . Laut des Kriteriums der ersten Ableitung gibt es aber kein lokales Extremum in  $x = 1$ .

Falls der Definitionsbereich auf  $D = [-2, +2]$  eingeschränkt wäre, gäbe es durch das Kriterium der ersten Ableitung lokale Maxima in  $x = -2$  und in  $x = +2$ .

v. Die grafische Darstellung der Funktion,

$$y(x) = \frac{1}{2x^2}, \quad D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

ist



Es gelten

$$y'(x) = -\frac{1}{x^3}, \quad x \neq 0$$

	$(-\infty, 0)$	$(0, +\infty)$
$-x^3$	$\oplus$	$\ominus$
$y'(x)$	$\oplus$	$\ominus$
$y(x)$	steigend	fallend

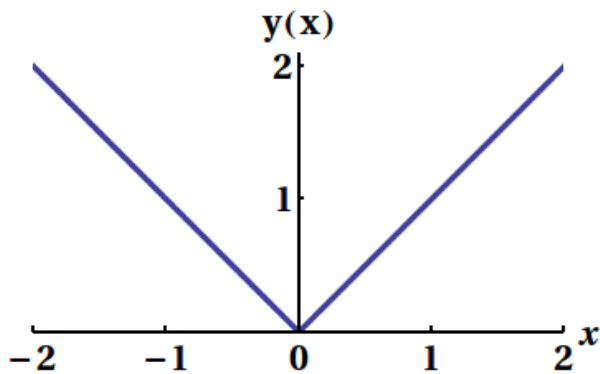
Anhand der Tabelle vermutet man, dass  $x = 0$  ein lokales Maximum ist, aber diese Stelle ist nicht im Definitionsbereich der Funktion. Daher besitzt die Funktion *keine* lokalen Extrema.

Falls der Definitionsbereich auf  $D = [-2, +2]$  eingeschränkt wäre, gäbe es durch das Kriterium der ersten Ableitung lokale Minima in  $x = -2$  und in  $x = +2$ .

vi. Die grafische Darstellung der Funktion,

$$y(x) = |x|, \quad D = \mathbb{R}$$

ist



Es gelten

$$y'(x) = \text{sign}(x), \quad x \neq 0$$

	$(-\infty, 0)$	$(0, \infty)$
$\text{sign}(x) =$	$-1$	$+1$
$y'(x)$	$\ominus$	$\oplus$
$y(x)$	fallend	steigend

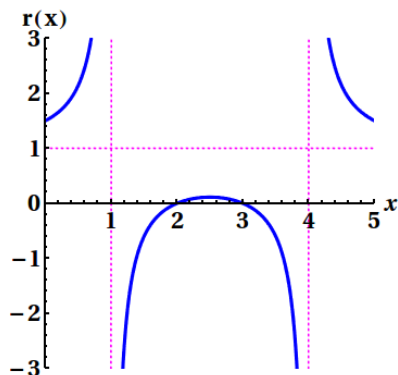
und daher laut des Kriteriums der ersten Ableitung gibt es ein lokales Minimum in  $x = 0$ .

Falls der Definitionsbereich auf  $D = [-2, +2]$  eingeschränkt wäre, gäbe es durch das Kriterium der ersten Ableitung lokale Maxima in  $x = -2$  und in  $x = +2$ .

vii. Die grafische Darstellung der Funktion,

$$r(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 5x + 4}, \quad D = \mathbb{R} \setminus \{1, 4\}$$

ist



Es gelten

$$r'(x) = \frac{10 - 4x}{(x^2 - 5x + 4)^2} = 4 \frac{5/2 - x}{(x - 1)^2(x - 4)^2}, \quad x \neq 1, 4$$

	$(-\infty, +1)$	$(+1, +5/2)$	$(+5/2, +4)$	$(+4, +\infty)$
$(x - 1)^2$	$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$
$(x - 4)^2$	$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$
$(5/2 - x)$	$\oplus$	$\oplus$	$\ominus$	$\ominus$
$r'(x)$	$\oplus$	$\oplus$	$\ominus$	$\ominus$
$r(x)$	steigend	steigend	fallend	fallend

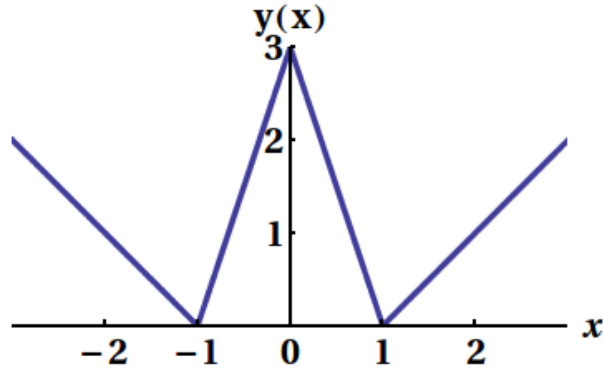
und daher laut des Kriteriums der ersten Ableitung gibt es ein lokales Maximum in  $x = 5/2$ . Obwohl es hier wenig gefähr gibt, dass man die Stellen der senkrechten Asymptoten irrtümlich als Extremstellen nennen würde, darf man nicht vergessen, dass die Stellen  $x = 1$  und  $x = 4$  nicht im Definitionsbereich liegen, und daher sind sie für Extremstellen sowieso ausgeschlossen.

Falls der Definitionsbereich auf  $D = [0, 5] \setminus \{1, 4\}$  eingeschränkt wäre, gäbe es durch das Kriterium der ersten Ableitung lokale Minima in  $x = 0$  und in  $x = 5$ .

viii. Die grafische Darstellung der Funktion,

$$y(x) = 2|x + 1| - 3|x| + 2|x - 1| - 1, \quad D = \mathbb{R}$$

ist



Es gelten

$$y'(x) = 2\text{sign}(x + 1) - 3\text{sign}(x) + 2\text{sign}(x - 1), \quad x \neq -1, 0, +1$$

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, +1)$	$(+1, +\infty)$
$+2\text{sign}(x + 1) =$	-2	+2	+2	+2
$-3\text{sign}(x) =$	+3	+3	-3	-3
$+2\text{sign}(x - 1) =$	-2	-2	-2	+2
$y'(x) =$	-1	+3	-3	+1
$y(x)$	fallend	steigend	fallend	steigend

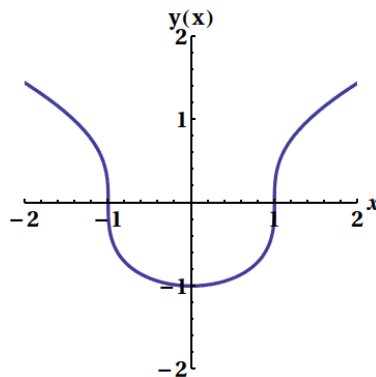
und daher laut des Kriteriums der ersten Ableitung gibt es lokale Minima in  $x = -1$  und  $x = +1$  und ein lokales Maximum in  $x = 0$ .

Falls der Definitionsbereich auf  $D = [-3, +3]$  eingeschränkt wäre, gäbe es durch das Kriterium der ersten Ableitung lokale Maxima in  $x = -3$  und in  $x = +3$ .

ix. Die grafische Darstellung der Funktion,

$$y(x) = (x^2 - 1)^{\frac{1}{3}}, \quad D = \mathbb{R}$$

ist



Es gelten

$$y'(x) = \frac{2x}{3(x^2 - 1)^{\frac{2}{3}}} = \frac{2x}{3(x + 1)^{\frac{2}{3}}(x - 1)^{\frac{2}{3}}}, \quad x \neq -1, +1$$

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, +1)$	$(+1, +\infty)$
$(x+1)^{\frac{2}{3}}$	$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$
$(x-1)^{\frac{2}{3}}$	$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$
$x$	$\ominus$	$\ominus$	$\oplus$	$\oplus$
$y'(x)$	$\ominus$	$\ominus$	$\oplus$	$\oplus$
$y(x)$	fallend	fallend	steigend	steigend

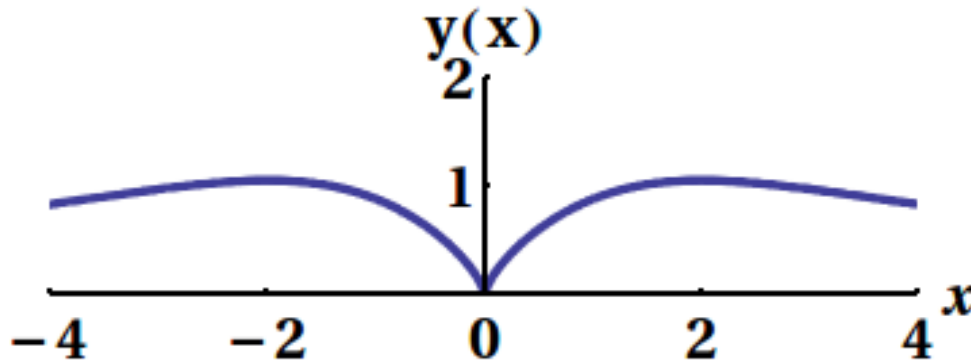
und daher laut des Kriteriums der ersten Ableitung gibt es ein lokales Minimum in  $x = 0$ .

Falls der Definitionsbereich auf  $D = [-2, +2]$  eingeschränkt wäre, gäbe es durch das Kriterium der ersten Ableitung lokale Maxima in  $x = -2$  und in  $x = +2$ .

x. Die grafische Darstellung der Funktion,

$$y(x) = \frac{8\sqrt[3]{x^2}}{8+x^2}, \quad D = \mathbb{R}$$

ist



Es gelten

$$y'(x) = \frac{32(4-x^2)}{3\sqrt[3]{x}(8+x^2)^2} = \frac{32}{3(8+x^2)^2} \frac{(2+x)(2-x)}{\sqrt[3]{x}}, \quad x \neq 0$$

	$(-\infty, -2)$	$(-2, 0)$	$(0, +2)$	$(+2, \infty)$
$(2+x)$	$\ominus$	$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$
$(2-x)$	$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$	$\ominus$
$\sqrt[3]{x}$	$\ominus$	$\ominus$	$\oplus$	$\oplus$
$y'(x)$	$\oplus$	$\ominus$	$\oplus$	$\ominus$
$y(x)$	steigend	fallend	steigend	fallend

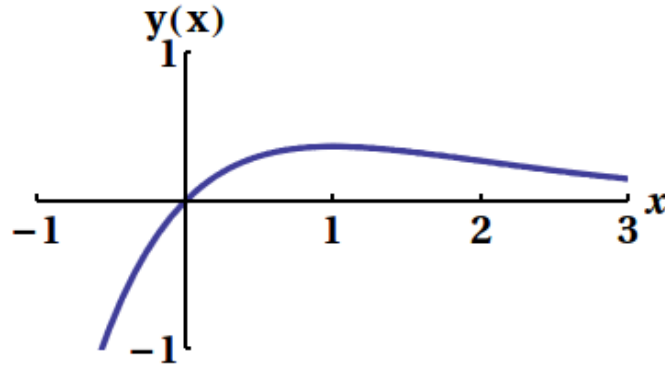
und daher laut des Kriteriums der ersten Ableitung gibt es lokale Maxima in  $x = -2$  und  $x = +2$  und ein lokales Minimum in  $x = 0$ .

Falls der Definitionsbereich auf  $D = [-4, +4]$  eingeschränkt wäre, gäbe es durch das Kriterium der ersten Ableitung lokale Minima in  $x = -4$  und in  $x = +4$ .

xi. Die grafische Darstellung der Funktion,

$$y(x) = xe^{-x}, \quad D = \mathbb{R}$$

ist



Es gelten

$$y'(x) = e^{-x}(1-x) \quad \begin{cases} > 0, & x < 1 \\ < 0, & x > 1 \end{cases}$$

$$y(x) \quad \begin{cases} \text{steigend,} & x < 1 \\ \text{fallend,} & x > 1 \end{cases}$$

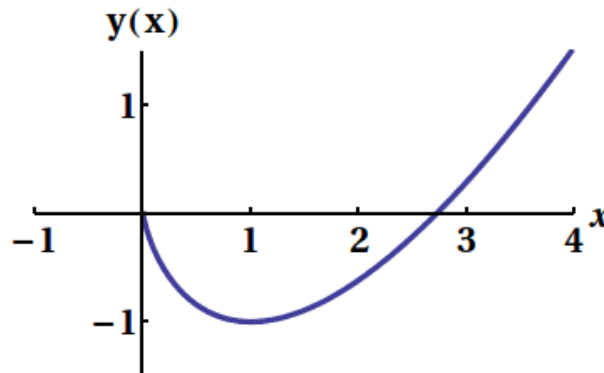
und daher laut des Kriteriums der ersten Ableitung gibt es ein lokales Maximum in  $x = 1$ .

Falls der Definitionsbereich auf  $D = [-1, +3]$  eingeschränkt wäre, gäbe es durch das Kriterium der ersten Ableitung lokale Minima in  $x = -1$  und in  $x = +3$ .

xii. Die grafische Darstellung der Funktion,

$$y(x) = x \ln(x) - x, \quad D = \mathbb{R}_+$$

ist



Es gelten

$$y'(x) = \ln(x), \quad x > 0$$

$$y'(x) \quad \begin{cases} < 0, & x \in (0, 1) \\ > 0, & x > 1 \end{cases}$$

$$y(x) \quad \begin{cases} \text{fallend,} & x \in (0, 1) \\ \text{steigend,} & x > 1 \end{cases}$$

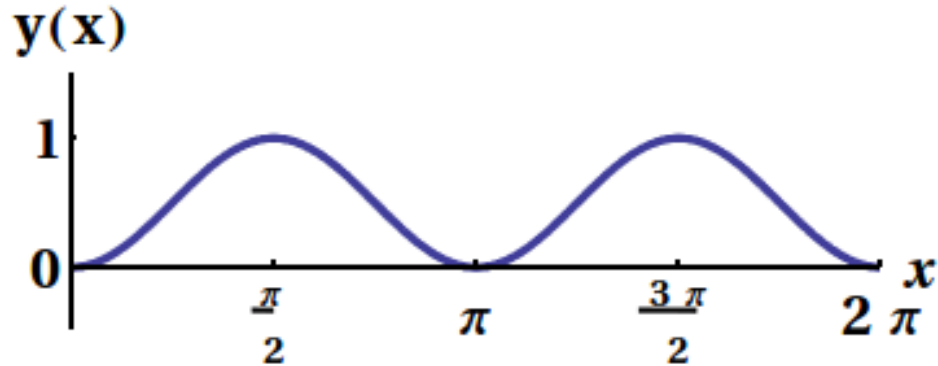
und daher laut des Kriteriums der ersten Ableitung gibt es ein lokales Minimum in  $x = 1$ .

Die Funktion lässt sich mit dem Punkt  $(0, 0)$  stetig ergänzen. Falls der Definitionsbereich auf  $D = [0, +4]$  ergänzt bzw. eingeschränkt wäre, gäbe es durch das Kriterium der ersten Ableitung lokale Maxima in  $x = 0$  und in  $x = +4$ .

xiii. Die grafische Darstellung der Funktion,

$$y(x) = \sin^2(x), \quad D = [0, 2\pi]$$

ist



Es gelten

$$y'(x) = 2 \sin(x) \cos(x) = \sin(2x)$$

$$y'(x) \begin{cases} = 0, & x = \frac{k}{2}\pi, & k = 0, 1, 2, 3, 4 \\ = +1, & x = \frac{1}{4}\pi \Rightarrow > 0, & x \in (0, \frac{1}{2}\pi) \\ = +1, & x = \frac{5}{4}\pi \Rightarrow > 0, & x \in (\pi, \frac{3}{2}\pi) \\ = -1, & x = \frac{3}{4}\pi \Rightarrow < 0, & x \in (\frac{1}{2}\pi, \pi) \\ = -1, & x = \frac{7}{4}\pi \Rightarrow < 0, & x \in (\frac{3}{2}\pi, 2\pi) \end{cases}$$

$$y(x) \begin{cases} \text{steigend,} & x \in (0, \frac{1}{2}\pi) \cup (\pi, \frac{3}{2}\pi) \\ \text{fallend,} & x \in (\frac{1}{2}\pi, \pi) \cup (\frac{3}{2}\pi, 2\pi) \end{cases}$$

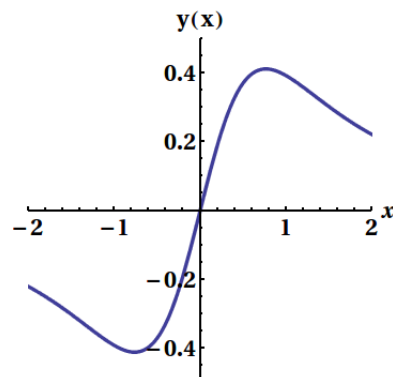
und daher laut des Kriteriums der ersten Ableitung gibt es lokale Minima in  $x = 0, \pi, 2\pi$  und lokale Maxima in  $x = \pi/2, 3\pi/2$ .

Falls der Definitionsbereich auf  $D = [\pi/4, 5\pi/4]$  eingeschränkt wäre, gäbe es durch das Kriterium der ersten Ableitung ein lokales Minimum in  $x = \pi/4$  und ein lokales Maximum in  $x = 5\pi/4$ .

xiv. Die grafische Darstellung der Funktion,

$$y(x) = \tan^{-1}(x)/(1 + x^2), \quad D = \mathbb{R}$$

ist



Es gelten mit  $x_0 \approx 0.7654$  durch das Bisektionsverfahren gefunden (Blatt 5, Beispiel 3a),

$$y'(x) = \frac{1 - 2x \tan^{-1}(x)}{(1 + x^2)^2}, \quad y'(x_0) = 0,$$

$$y'(x) \begin{cases} = 0, & x = \pm x_0 \\ = +1, & x = 0 \Rightarrow > 0, \quad x \in (-x_0, x_0) \\ \approx -0.1, & x = -1 \Rightarrow < 0, \quad x \in (-\infty, -x_0) \\ \approx -0.1, & x = +1 \Rightarrow < 0, \quad x \in (x_0, +\infty) \end{cases}$$

$$y(x) \begin{cases} \text{fallend,} & x \in (-\infty, -x_0) \\ \text{steigend,} & x \in (-x_0, x_0) \\ \text{fallend,} & x \in (x_0, +\infty) \end{cases}$$

und daher laut des Kriteriums der ersten Ableitung gibt es ein lokales Minimum in  $x = -x_0$  und ein lokales Maximum in  $x = x_0$ .

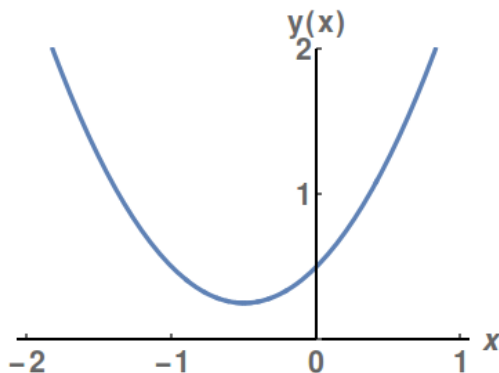
Falls der Definitionsbereich auf  $D = [-2, +2]$  eingeschränkt wäre, gäbe es durch das Kriterium der ersten Ableitung ein lokales Maximum in  $x = -2$  und ein lokales Minimum in  $x = +2$ .

- (b) Die folgenden sind alle lokalen Extrema der auf Seiten 107 - 116 im Skriptum abgebildeten Funktionen, für die das Kriterium der zweiten Ableitung zutrifft. Für Details über die Berechnung der Ableitungen sehen Sie Blatt 6, Beispiel 4.

- i. Die grafische Darstellung der Funktion,

$$y(x) = x^2 + x + 1/2, \quad D = \mathbb{R}$$

ist



Es gelten

$$y'(x) = 2(x + 1/2), \quad y''(x) = 2 > 0$$

$$y'(-\frac{1}{2}) = 0, \quad y''(-\frac{1}{2}) = 2 > 0$$

und daher laut des Kriteriums der zweiten Ableitung gibt es ein lokales Minimum in  $x = -\frac{1}{2}$ .

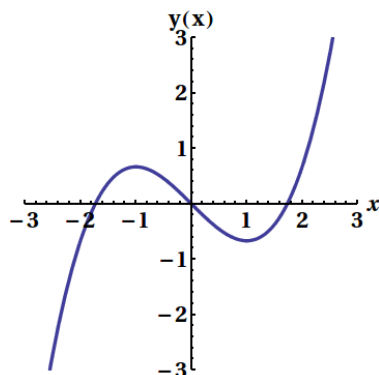
Falls der Definitionsbereich auf  $D = [-2, +1]$  eingeschränkt wäre, gäbe es lokale Maxima in  $x = -2$  und in  $x = +1$ , aber diese könnten mit dem Kriterium der zweiten Ableitung nicht identifiziert werden.



ii. Die grafische Darstellung der Funktion,

$$y(x) = x^3/3 - x, \quad D = \mathbb{R}$$

ist



Es gelten

$$y'(x) = x^2 - 1 = (x+1)(x-1), \quad y''(x) = 2x$$

$$y'(-1) = 0, \quad y''(-1) = -2 < 0$$

$$y'(1) = 0, \quad y''(1) = +2 > 0$$

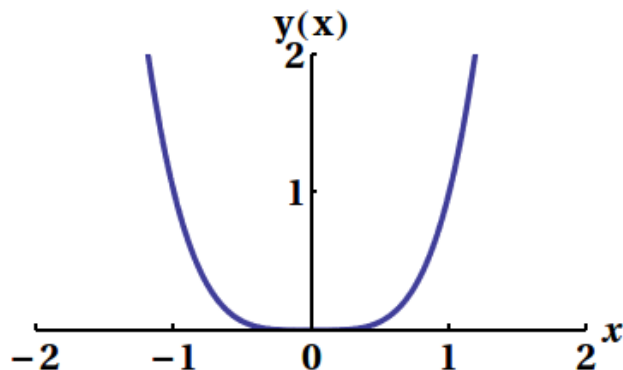
und daher laut des Kriteriums der zweiten Ableitung gibt es ein lokales Maximum in  $x = -1$  und ein lokales Minimum in  $x = +1$ .

Falls der Definitionsbereich auf  $D = [-2, 2]$  eingeschränkt wäre, gäbe es ein lokales Minimum in  $x = -2$  und ein lokales Maximum in  $x = 2$ , aber diese könnten mit dem Kriterium der zweiten Ableitung nicht identifiziert werden.

iii. Die grafische Darstellung der Funktion,

$$y(x) = x^4, \quad D = \mathbb{R}$$

ist



Es gelten

$$y'(x) = 4x^3, \quad y''(x) = 12x^2$$

$$y'(0) = 0, \quad y''(0) = 0$$

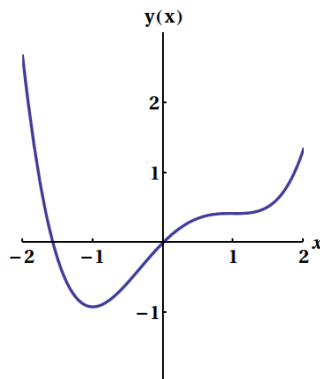
und daher kann mit dem Kriterium der zweiten Ableitung nicht festgestellt werden, dass es ein lokales Minimum in  $x = 0$  gibt!

Falls der Definitionsbereich auf  $D = [-2, +2]$  eingeschränkt wäre, gäbe es lokale Maxima in  $x = -2$  und in  $x = +2$ , aber diese könnten mit dem Kriterium der zweiten Ableitung nicht identifiziert werden.

iv. Die grafische Darstellung der Funktion,

$$y(x) = x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4, \quad D = \mathbb{R}$$

ist



Es gelten

$$y'(x) = 1 - x - x^2 + x^3 = (x+1)(x-1)^2$$

$$y''(x) = -1 - 2x + 3x^2 = (x-1)(3x+1)$$

$$y'(-1) = 0, \quad y''(-1) = 2 > 0$$

$$y'(1) = 0, \quad y''(1) = 0$$

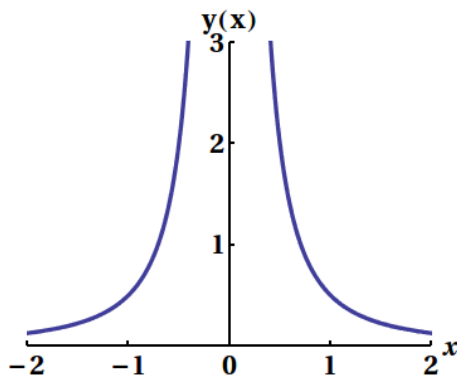
und daher gibt es ein lokales Minimum in  $x = -1$ , aber mit dem Kriterium der zweiten Ableitung kann es nicht festgestellt werden, dass es kein lokales Extremum in  $x = 1$  gibt!

Falls der Definitionsbereich auf  $D = [-2, +2]$  eingeschränkt wäre, gäbe es lokale Maxima in  $x = -2$  und in  $x = +2$ , aber diese könnten mit dem Kriterium der zweiten Ableitung nicht identifiziert werden.

v. Die grafische Darstellung der Funktion,

$$y(x) = \frac{1}{2x^2}, \quad D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

ist



Es gelten

$$y'(x) = -\frac{1}{x^3}, \quad x \neq 0$$

$$y''(x) = \frac{3}{x^4}, \quad x \neq 0$$

$y'(0)$  existiert nicht und  $y''(0)$  existiert nicht.

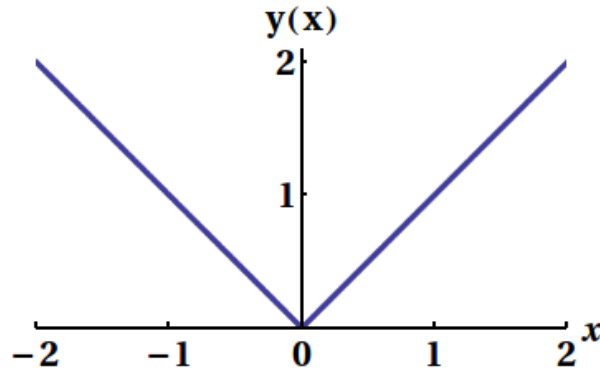
und daher kann mit dem Kriterium der zweiten Ableitung nichts über die Stelle  $x = 0$  festgestellt werden.

Falls der Definitionsbereich auf  $D = [-2, +2]$  eingeschränkt wäre, gäbe es lokale Maxima in  $x = -2$  und in  $x = +2$ , aber diese könnten mit dem Kriterium der zweiten Ableitung nicht identifiziert werden.

vi. Die grafische Darstellung der Funktion,

$$y(x) = |x|, \quad D = \mathbb{R}$$

ist



Es gelten

$$y'(x) = \text{sign}(x), \quad x \neq 0$$

$$y''(x) = 0, \quad x \neq 0$$

$y'(0)$  existiert nicht und  $y''(0)$  existiert nicht.

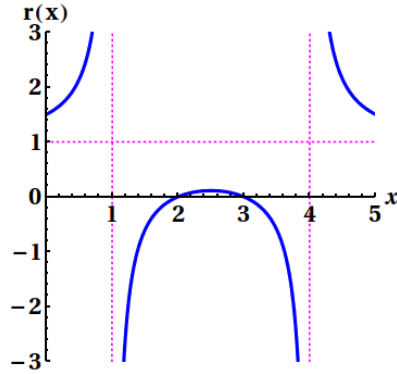
und daher kann mit dem Kriterium der zweiten Ableitung nicht festgestellt werden, dass es ein lokales Minimum in  $x = 0$  gibt.

Falls der Definitionsbereich auf  $D = [-2, +2]$  eingeschränkt wäre, gäbe es lokale Maxima in  $x = -2$  und in  $x = +2$ , aber diese könnten mit dem Kriterium der zweiten Ableitung nicht identifiziert werden.

vii. Die grafische Darstellung der Funktion,

$$r(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 5x + 4}, \quad D = \mathbb{R} \setminus \{1, 4\}$$

ist



Es gelten

$$r'(x) = \frac{10 - 4x}{(x^2 - 5x + 4)^2} = 4 \frac{5/2 - x}{(x - 1)^2(x - 4)^2}, \quad x \neq 1, 4$$

$$r''(x) = \frac{12(7 - 5x + x^2)}{(x^2 - 5x + 4)^3} = 12 \frac{(x - 5/2)^2 + 3/4}{(x - 1)^3(x - 4)^3}, \quad x \neq 1, 4$$

$y'(1)$  &  $y''(1)$  und  $y'(4)$  &  $y''(4)$  existieren nicht, aber

$$y'(5/2) = 0, \quad y''(5/2) = -64/81 < 0$$

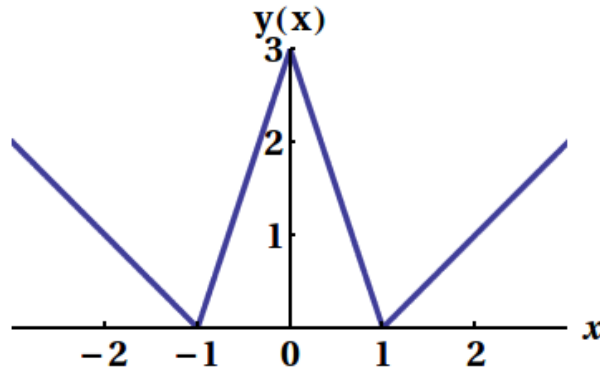
und daher gibt es ein lokales Maximum in  $x = 5/2$ , aber mit dem Kriterium der zweiten Ableitung kann nichts über die Stellen  $x = 1, 4$  festgestellt werden.

Falls der Definitionsbereich auf  $D = [0, 5] \setminus \{1, 4\}$  eingeschränkt wäre, gäbe es lokale Minima in  $x = 0$  und in  $x = 5$ , aber diese könnten mit dem Kriterium der zweiten Ableitung nicht identifiziert werden.

viii. Die grafische Darstellung der Funktion,

$$y(x) = 2|x + 1| - 3|x| + 2|x - 1| - 1, \quad D = \mathbb{R}$$

ist



Es gelten

$$y'(x) = 2\text{sign}(x + 1) - 3\text{sign}(x) + 2\text{sign}(x - 1), \quad x \neq -1, 0, +1$$

$$y''(x) = 0, \quad x \neq -1, 0, +1$$

$$y'(-1) \text{ \& } y''(-1), \quad y'(0) \text{ \& } y''(0) \text{ und } y'(1) \text{ \& } y''(1) \text{ existieren nicht}$$

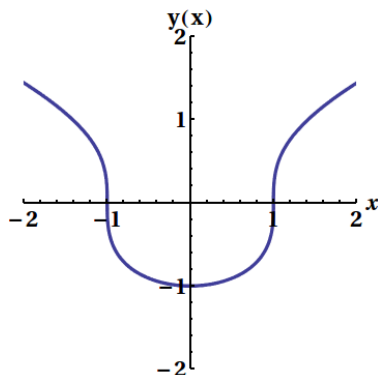
und daher mit dem Kriterium der zweiten Ableitung kann nicht festgestellt werden, dass es lokale Extrema in  $x = -1, 0, +1$  gibt.

Falls der Definitionsbereich auf  $D = [-3, +3]$  eingeschränkt wäre, gäbe es lokale Maxima in  $x = -3$  und in  $x = +3$ , aber diese könnten mit dem Kriterium der zweiten Ableitung nicht identifiziert werden.

ix. Die grafische Darstellung der Funktion,

$$y(x) = (x^2 - 1)^{\frac{1}{3}}, \quad D = \mathbb{R}$$

ist



Es gelten

$$y'(x) = \frac{2x}{3(x^2 - 1)^{\frac{2}{3}}} = \frac{2x}{3(x+1)^{\frac{2}{3}}(x-1)^{\frac{2}{3}}}, \quad x \neq -1, +1$$

$$y''(x) = \frac{2(x^2 + 3)}{9(x^2 - 1)^{\frac{5}{3}}} = \frac{2(x^2 + 3)}{9(x+1)^{\frac{5}{3}}(x-1)^{\frac{5}{3}}}, \quad x \neq -1, +1$$

$y'(-1)$  &  $y''(-1)$  und  $y'(1)$  &  $y''(1)$  existieren nicht, aber

$$y'(0) = 0, \quad y''(0) = 2/3 > 0$$

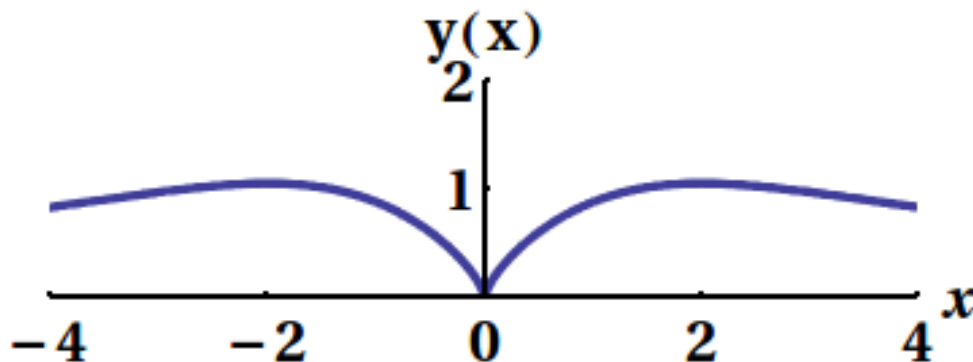
und daher gibt es ein lokales Minimum in  $x = 0$ , aber mit dem Kriterium der zweiten Ableitung kann nichts über die Stellen  $x = -1, +1$  festgestellt werden.

Falls der Definitionsbereich auf  $D = [-2, +2]$  eingeschränkt wäre, gäbe es lokale Maxima in  $x = -2$  und in  $x = +2$ , aber diese könnten mit dem Kriterium der zweiten Ableitung nicht identifiziert werden.

x. Die grafische Darstellung der Funktion,

$$y(x) = \frac{8\sqrt[3]{x^2}}{8 + x^2}, \quad D = \mathbb{R}$$

ist



Es gelten

$$y'(x) = \frac{32(4-x^2)}{3\sqrt[3]{x}(8+x^2)^2} = \frac{32}{3(8+x^2)^2} \frac{(2+x)(2-x)}{\sqrt[3]{x}}, \quad x \neq 0$$

$$y''(x) = \frac{32(7x^4 - 92x^2 - 32)}{9\sqrt[3]{x^4}(8+x^2)^3}, \quad x \neq 0$$

$y'(0)$  &  $y''(0)$  existieren nicht, aber

$$y'(-2) = 0, \quad y''(-2) = -4^{\frac{4}{3}}/27 < 0 \quad \text{und} \quad y'(2) = 0, \quad y''(2) = -4^{\frac{4}{3}}/27 < 0$$

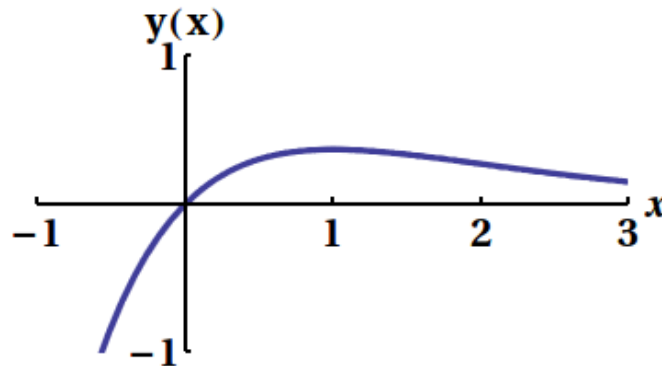
und daher gibt es lokale Maxima in  $x = -2$  und  $x = +2$ , aber mit dem Kriterium des zweiten Ableitung kann nicht festgestellt, dass es ein lokales Minimum in  $x = 0$  gibt!

Falls der Definitionsbereich auf  $D = [-4, +4]$  eingeschränkt wäre, gäbe es lokale Minima in  $x = -4$  und in  $x = +4$ , aber diese könnten mit dem Kriterium der zweiten Ableitung nicht identifiziert werden.

xi. Die grafische Darstellung der Funktion,

$$y(x) = xe^{-x}, \quad D = \mathbb{R}$$

ist



Es gelten

$$y'(x) = e^{-x}(1-x)$$

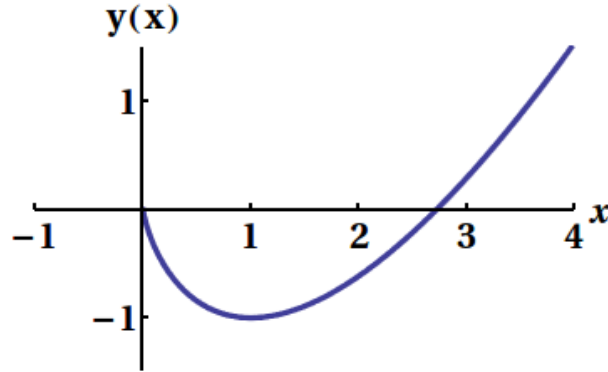
$$y''(x) = e^{-x}(x-2)$$

$$y'(1) = 0, \quad y''(1) = -e < 0$$

und daher gibt es ein lokales Maximum in  $x = 1$ .

Falls der Definitionsbereich auf  $D = [-1, +3]$  eingeschränkt wäre, gäbe es ein lokale Minima in  $x = -1$  und in  $x = +3$ , aber diese könnten mit dem Kriterium der zweiten Ableitung nicht identifiziert werden.

xii. Die grafische Darstellung der Funktion,



Es gelten

$$y(x) = x \ln(x) - x, \quad D = \mathbb{R}_+$$

$$y'(x) = \ln(x), \quad x > 0$$

$$y''(x) = \frac{1}{x}, \quad x > 0$$

$$y'(1) = 0, \quad y''(1) = 1 > 0$$

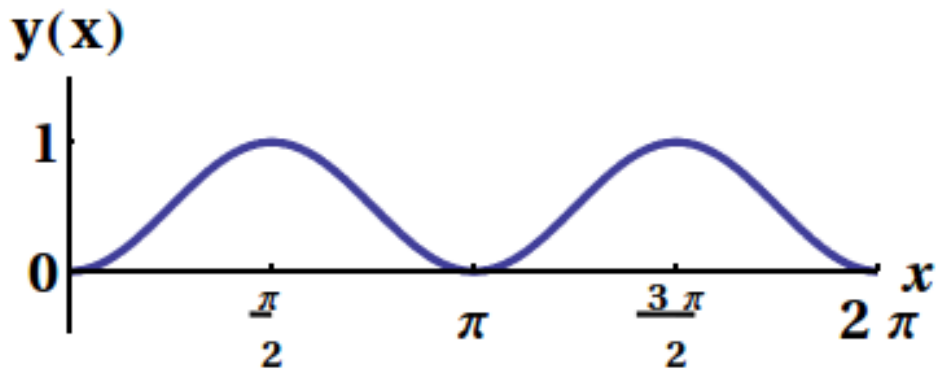
und daher gibt es ein lokales Minimum in  $x = 1$ .

Die Funktion lässt sich mit dem Punkt  $(0,0)$  stetig ergänzen. Falls der Definitionsbereich auf  $D = [0, +4]$  ergänzt bzw. eingeschränkt wäre, gäbe es lokale Maxima in  $x = 0$  und in  $x = +4$ , aber diese könnten mit dem Kriterium der zweiten Ableitung nicht identifiziert werden.

xiii. Die grafische Darstellung der Funktion,

$$y(x) = \sin^2(x), \quad D = [0, 2\pi]$$

ist



Es gelten

$$y'(x) = 2 \sin(x) \cos(x) = \sin(2x)$$

$$y''(x) = 2 \cos^2(x) - 2 \sin^2(x) = 2 \cos(2x)$$

$$y'(0) = y'(\pi) = y'(2\pi) = 0 = y'(\pi/2) = y'(3\pi/2)$$

$$y''(0) = y''(\pi) = y''(2\pi) = 2, \quad y''(\pi/2) = y''(3\pi/2) = -2$$

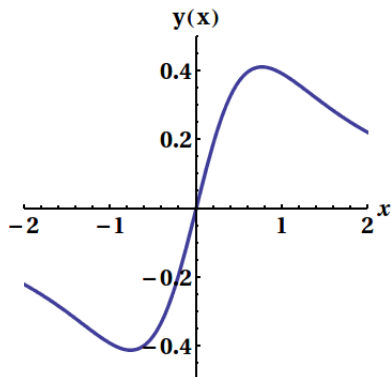
und daher gibt es lokale Minima in  $x = 0, \pi, 2\pi$  und lokale Maxima in  $x = \pi/2, 3\pi/2$ .

Falls der Definitionsbereich auf  $D = [\pi/4, 5\pi/4]$  eingeschränkt wäre, gäbe es ein lokales Minimum in  $x = \pi/4$  und ein lokales Maximum in  $x = 5\pi/4$ , aber diese könnten mit dem Kriterium der zweiten Ableitung nicht identifiziert werden.

xiv. Die grafische Darstellung der Funktion,

$$y(x) = \tan^{-1}(x)/(1 + x^2), \quad D = \mathbb{R}$$

ist



Es gelten mit  $x_0 \approx 0.7654$  durch das Bisektionsverfahren gefunden (Blatt 5, Beispiel 3a),

$$y'(x) = \frac{1 - 2x \tan^{-1}(x)}{(1 + x^2)^2}$$

$$y''(x) = \frac{(6x^2 - 2) \tan^{-1}(x) - 6x}{(1 + x^2)^3}$$

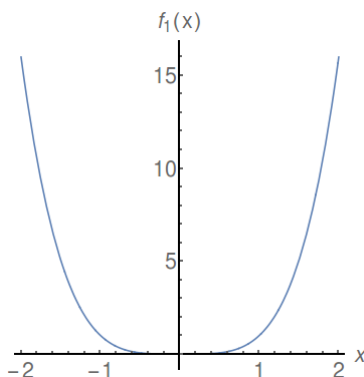
$$y'(-x_0) = 0, \quad y''(-x_0) \approx +0.903332 > 0 \quad \text{und} \quad y'(x_0) = 0, \quad y''(x_0) \approx -0.903332 < 0$$

und daher gibt es ein lokales Minimum in  $x = -x_0$  und ein lokales Maximum in  $x = x_0$ .

Falls der Definitionsbereich auf  $D = [-2, +2]$  eingeschränkt wäre, gäbe es ein lokales Maximum in  $x = -2$  und ein lokales Minimum in  $x = +2$ , aber diese könnten mit dem Kriterium der zweiten Ableitung nicht identifiziert werden.

4. Sonderfälle von Extremstellen:

(a) Die grafische Darstellung der Funktion  $f_1(x) = x^4$  ist



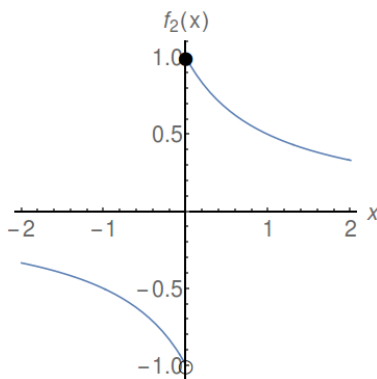


Die erste Ableitung ist  $f_1'(x) = 4x^3$ , und es gelten  $f_1'(x) < 0$ ,  $x < 0$ , und  $f_1'(x) > 0$ ,  $x > 0$ . Daher mit dem Kriterium der ersten Ableitung gibt es ein lokales Minimum in  $x = 0$ . Die zweite Ableitung ist  $f_1''(x) = 12x^2$ , und es gilt  $f_1''(0) = 0$ . Daher kann mit dem Kriterium der zweiten Ableitung nicht festgestellt werden, dass es ein lokales Minimum in  $x = 0$  gibt!

(b) Die Funktion (strategisch definiert an der Stelle  $x = 0$ )

$$f_2(x) = \begin{cases} \frac{\text{sign}(x)}{1 + |x|}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases} = \begin{cases} \frac{-1}{1-x}, & x < 0 \\ \frac{1}{1+x}, & x \geq 0 \end{cases}$$

hat die grafische Darstellung



und besitzt klar ein lokales Maximum in  $x = 0$ . Die erste Ableitung ist

$$f_2'(x) = \begin{cases} D_x \frac{-1}{1-x}, & x < 0 \\ D_x \frac{1}{1+x}, & x > 0 \\ \text{nicht stetig} \Rightarrow \text{nicht} \\ \text{differenzierbar,} & x = 0 \end{cases} = \begin{cases} \frac{-1}{(1-x)^2}, & x < 0 \\ \frac{-1}{(1+x)^2}, & x > 0 \\ \text{existiert} & x = 0 \\ \text{nicht,} & \end{cases}$$

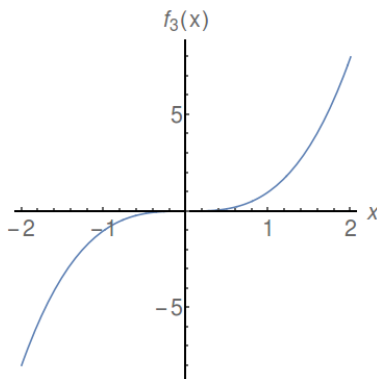
Um eine eindeutige Tangentengerade an einer Stelle zu besitzen, muss eine Kurve an dieser Stelle stetig sein. Also wenn eine Funktion nicht stetig ist, ist sie nicht differenzierbar. Daher ist  $f_2(x)$  an der Stelle  $x = 0$  nicht differenzierbar. Weiters gilt  $f_2'(x) < 0$ ,  $x \neq 0$ , und daher mit dem Kriterium der ersten Ableitung kann nicht festgestellt werden, dass es ein lokales Maximum in  $x = 0$  gibt.

Da die Funktion in  $x = 0$  nicht differenzierbar ist, ist sie an dieser Stelle nicht zweimal differenzierbar. Sonst ist die zweite Ableitung gegeben durch

$$f_2''(x) = \begin{cases} D_x \frac{-1}{(1-x)^2}, & x < 0 \\ D_x \frac{-1}{(1+x)^2}, & x > 0 \\ \text{existiert} & x = 0 \\ \text{nicht,} & \end{cases} = \begin{cases} \frac{2}{(1-x)^3}, & x < 0 \\ \frac{2}{(1+x)^3}, & x > 0 \\ \text{existiert} & x = 0 \\ \text{nicht,} & \end{cases}$$

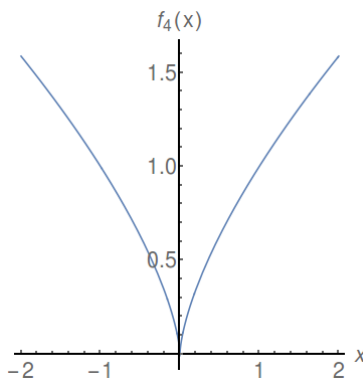
Da  $f_2''(0)$  nicht existiert, kann mit dem Kriterium der zweiten Ableitung nicht festgestellt werden, dass es ein lokales Maximum in  $x = 0$  gibt.

(c) Die grafische Darstellung der Funktion  $f_3(x) = x^3$  ist



Die erste Ableitung ist  $f'_3(x) = 3x^2$ , und es gilt  $f'_3(0) = 0$ . Weiters gilt  $f'_3(x) > 0$ ,  $x \neq 0$ . Da das Vorzeichen von  $f'_3(x)$  durch  $x = 0$  sich nicht ändert, gibt es kein lokales Extremum an dieser Stelle.

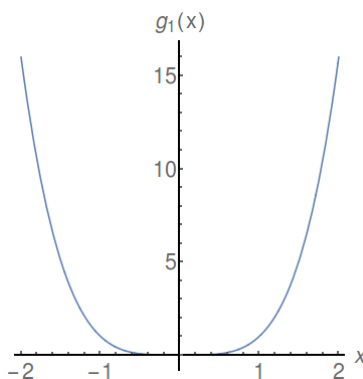
(d) Die grafische Darstellung von  $f_4(x) = \sqrt[3]{x^2}$  ist



Die erste Ableitung ist  $f'_4(x) = D_x x^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$ ,  $x \neq 0$ , d.h. die Funktion ist nicht differenzierbar in  $x = 0$ . Es gelten aber  $f'_4(x) < 0$ ,  $x < 0$ , und  $f'_4(x) > 0$ ,  $x > 0$ . Laut des Kriteriums der ersten Ableitung gibt es ein lokales Minimum in  $x = 0$ . Da die Funktion in  $x = 0$  nicht differenzierbar ist, ist sie nicht zweimal differenzierbar, d.h.  $f''(0)$  existiert nicht, und es kann daher mit dem Kriterium der zweiten Ableitung nicht festgestellt werden, dass es ein lokales Minimum in  $x = 0$  gibt.

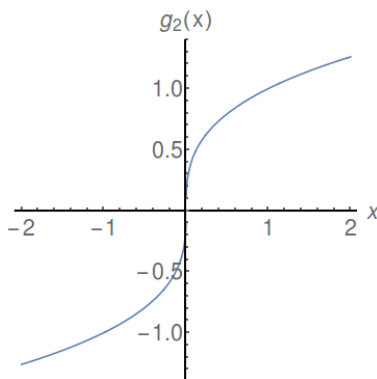
5. Wendepunkte:

(a) Die grafische Darstellung der Funktion  $g_1(x) = x^4$  ist



Die erste Ableitung ist  $g_1'(x) = 4x^3$  und die zweite Ableitung ist  $g_1''(x) = 12x^2$ . Es gilt  $g_1''(0) = 0$ , aber die Stelle  $x = 0$  entspricht keinem Wendepunkt, da  $g_1''(x) > 0$  für  $x \neq 0$  gilt, d.h. das Krümmungsverhalten von  $g(x)$  ändert sich durch  $x = 0$  nicht.

- (b) Die grafische Darstellung der Funktion  $g_2(x) = \sqrt[3]{x}$  ist



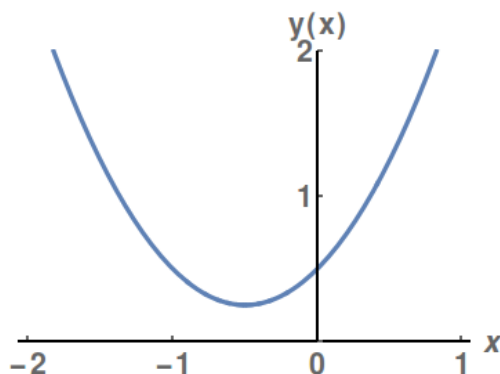
Die erste Ableitung ist  $g_2'(x) = D_x x^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$ ,  $x \neq 0$ , und die zweite Ableitung ist  $g_2''(x) = -\frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}}$ ,  $x \neq 0$ . Die Funktion ist an der Stelle  $x = 0$  nicht differenzierbar und deswegen nicht zweimal differenzierbar. Es gelten  $g_2''(x) > 0$ ,  $x < 0$ , und  $g_2''(x) < 0$ ,  $x > 0$ . Da das Krümmungsverhalten sich durch  $x = 0$  wechselt, entspricht diese Stelle einem Wendepunkt.

- (c) Die folgenden sind alle Wendepunkte der auf Seiten 107 - 116 im Skriptum abgebildeten Funktionen. Für Details über die Berechnung der Ableitungen sehen Sie Blatt 6, Beispiel 4.

- i. Die grafische Darstellung der Funktion,

$$y(x) = x^2 + x + 1/2, \quad D = \mathbb{R}$$

ist



Es gelten

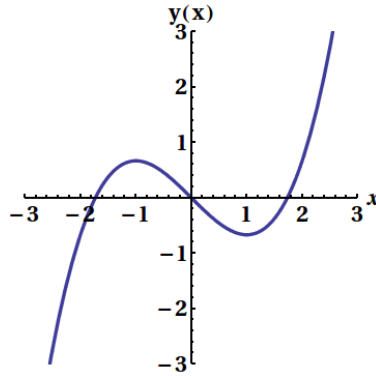
$$y'(x) = 2(x + 1/2), \quad y''(x) = 2 > 0$$

Die Funktion ist konvex überall im  $\mathbb{R}$ , und das Krümmungsverhalten ändert sich durch keine Stelle. Es gibt daher keine Wendepunkte.

- ii. Die grafische Darstellung der Funktion,

$$y(x) = x^3/3 - x, \quad D = \mathbb{R}$$

ist



Es gelten

$$y'(x) = x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1)$$

$$y''(x) = 2x \begin{cases} < 0, & x \in (-\infty, 0) \\ > 0, & x \in (0, +\infty) \end{cases}$$

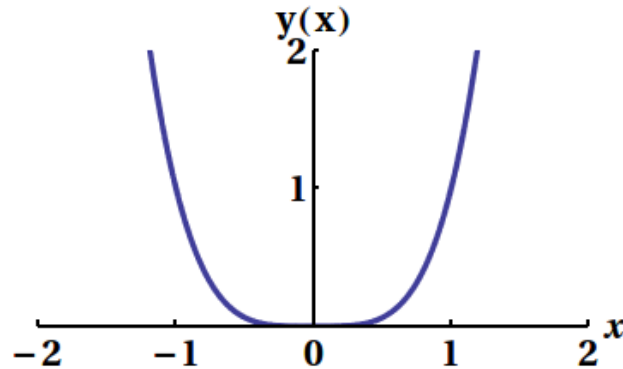
$$y(x) \begin{cases} \text{konkav,} & x \in (-\infty, 0) \\ \text{konvex,} & x \in (0, +\infty) \end{cases}$$

Das Krümmungsverhalten ändert sich durch die Stelle  $x = 0$ . Diese Stelle entspricht daher einem Wendepunkt.

iii. Die grafische Darstellung der Funktion,

$$y(x) = x^4, \quad D = \mathbb{R}$$

ist



Es gelten

$$y'(x) = 4x^3, \quad y''(x) = 12x^2$$

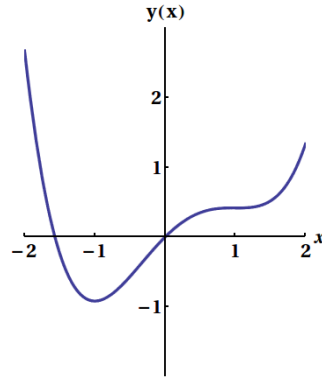
	$(-\infty, 0]$	$[0, +\infty)$
$x^2$	$\oplus$	$\oplus$
$y'(x)$	$\oplus$	$\oplus$
$y(x)$	konvex	konvex

Das Krümmungsverhalten ändert sich durch keine Stelle. Es gibt daher keine Wendepunkte.

iv. Die grafische Darstellung der Funktion,

$$y(x) = x - \frac{1}{2}x^2/2 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4, \quad D = \mathbb{R}$$

ist



Es gelten

$$y'(x) = 1 - x - x^2 + x^3 = (x + 1)(x - 1)^2$$

$$y''(x) = -1 - 2x + 3x^2 = (x - 1)(3x + 1)$$

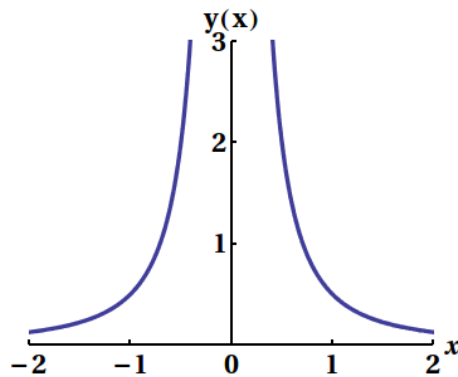
	$(-\infty, -\frac{1}{3})$	$(-\frac{1}{3}, +1)$	$(+1, \infty)$
$(3x + 1)$	$\ominus$	$\oplus$	$\oplus$
$(x - 1)$	$\ominus$	$\ominus$	$\oplus$
$y''(x)$	$\oplus$	$\ominus$	$\oplus$
$y(x)$	konvex	konkav	konvex

Das Krümmungsverhalten ändert sich durch die Stellen  $x = -\frac{1}{3}$  und  $x = 1$ . Diese Stellen entsprechen daher jeweils einem Wendepunkt.

v. Die grafische Darstellung der Funktion,

$$y(x) = \frac{1}{2x^2}, \quad D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

ist



Es gelten

$$y'(x) = -\frac{1}{x^3}, \quad x \neq 0$$

$$y''(x) = \frac{3}{x^4}, \quad x \neq 0$$

$$y''(x) \begin{cases} > 0, & x \in (-\infty, 0) \\ > 0, & x \in (0, +\infty) \end{cases}$$

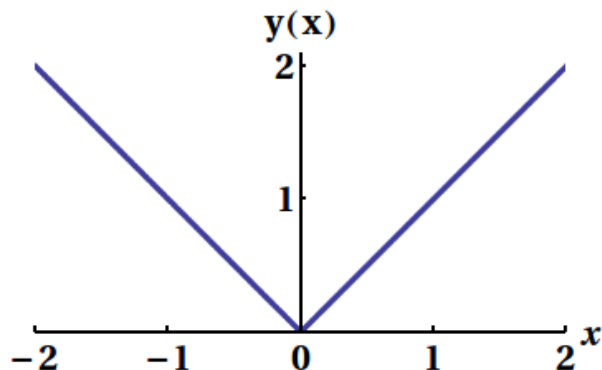
$$y(x) \begin{cases} \text{konvex}, & x \in (-\infty, 0) \\ \text{konvex}, & x \in (0, +\infty) \end{cases}$$

Da die Stelle  $x = 0$  sich im Definitionsbereich der Funktion nicht befindet, kann diese Stelle sowieso keinem Wendepunkt entsprechen. Außerdem ändert sich das Krümmungsverhalten durch diese Stelle nicht.

vi. Die grafische Darstellung der Funktion,

$$y(x) = |x|, \quad D = \mathbb{R}$$

ist



Es gelten

$$y'(x) = \text{sign}(x), \quad x \neq 0$$

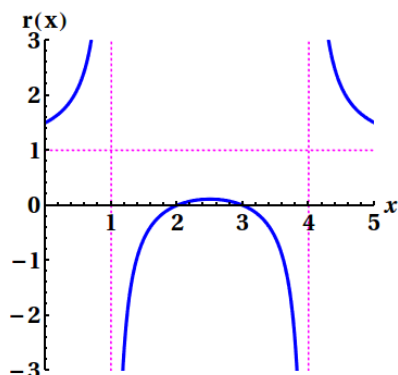
$$y''(x) = 0, \quad x \neq 0$$

Die Gerade durch  $(x_1, y(x_1))$  und  $(x_2, y(x_2))$  liegt oberhalb vom Graphen von  $y(x)$ , wenn  $x_1 x_2 < 0$  gilt, aber nicht für beliebig  $\{x_1, x_2\}$ . Daher ist die Funktion konvex aber nicht streng konvex in  $D$ . Es gibt keine Wendepunkte, da das Krümmungsverhalten sich durch keine Stelle ändert.

vii. Die grafische Darstellung der Funktion,

$$r(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 5x + 4}, \quad D = \mathbb{R} \setminus \{1, 4\}$$

ist



Es gelten

$$r'(x) = \frac{10 - 4x}{(x^2 - 5x + 4)^2} = 4 \frac{5/2 - x}{(x - 1)^2(x - 4)^2}, \quad x \neq 1, 4$$

$$r''(x) = \frac{12(7 - 5x + x^2)}{(x^2 - 5x + 4)^3} = 12 \frac{(x - 5/2)^2 + 3/4}{(x - 1)^3(x - 4)^3}, \quad x \neq 1, 4$$

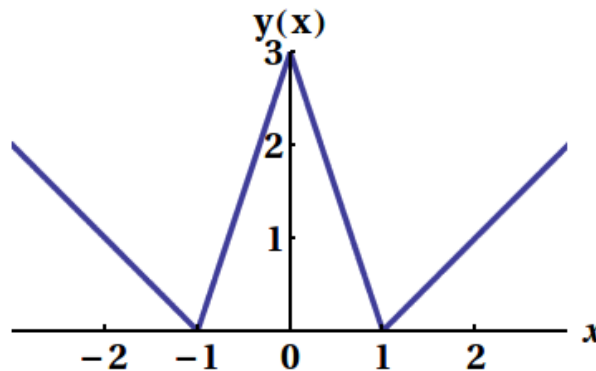
	$(-\infty, +1)$	$(+1, +4)$	$(+4, +\infty)$
$(x - 1)^3$	$\ominus$	$\oplus$	$\oplus$
$(x - 4)^3$	$\ominus$	$\ominus$	$\oplus$
$(x - 5/2)^2$	$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$
$r''(x)$	$\oplus$	$\ominus$	$\oplus$
$r(x)$	konvex	konkav	konvex

Obwohl das Krümmungsverhalten sich durch die Stellen  $x = 1, 4$  ändert, befinden sich diese Stellen im Definitionsbereich nicht. Daher gibt es keine Wendepunkte.

viii. Die grafische Darstellung der Funktion,

$$y(x) = 2|x + 1| - 3|x| + 2|x - 1| - 1, \quad D = \mathbb{R}$$

ist



Es gelten

$$y'(x) = 2\text{sign}(x + 1) - 3\text{sign}(x) + 2\text{sign}(x - 1), \quad x \neq -1, 0, +1$$

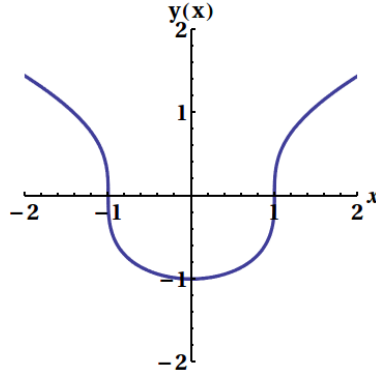
$$y''(x) = 0, \quad x \neq -1, 0, +1$$

Die Gerade durch  $(x_1, y(x_1))$  und  $(x_2, y(x_2))$  liegt oberhalb vom Graphen von  $y(x)$ , wenn  $x_1 < -1$  und  $x_2 \in (-1, 0]$  gelten, aber nicht für beliebig  $x_1, x_2 \in (-\infty, 0]$ . Daher ist die Funktion (nicht streng) konvex in  $(-\infty, 0]$ . Ähnlich ist die Funktion (nicht streng) konvex in  $[0, +\infty)$ . Die Gerade durch  $(x_1, y(x_1))$  und  $(x_2, y(x_2))$  liegt unterhalb vom Graphen von  $y(x)$ , wenn  $x_1 \in [-1, 0)$  und  $x_2 \in (0, +1]$  gelten, aber nicht für beliebig  $x_1, x_2 \in [-1, +1]$ . Daher ist die Funktion (nicht streng) konkav in  $[-1, +1]$ . Es gibt keine Wendepunkte, da das Krümmungsverhalten sich durch keine Stelle ändert.

ix. Die grafische Darstellung der Funktion,

$$y(x) = (x^2 - 1)^{\frac{1}{3}}, \quad D = \mathbb{R}$$

ist



Es gelten

$$y'(x) = \frac{2x}{3(x^2 - 1)^{\frac{2}{3}}} = \frac{2x}{3(x+1)^{\frac{2}{3}}(x-1)^{\frac{2}{3}}}, \quad x \neq -1, +1$$

$$y''(x) = \frac{2(x^2 + 3)}{9(x^2 - 1)^{\frac{5}{3}}} = \frac{2(x^2 + 3)}{9(x+1)^{\frac{5}{3}}(x-1)^{\frac{5}{3}}}, \quad x \neq -1, +1$$

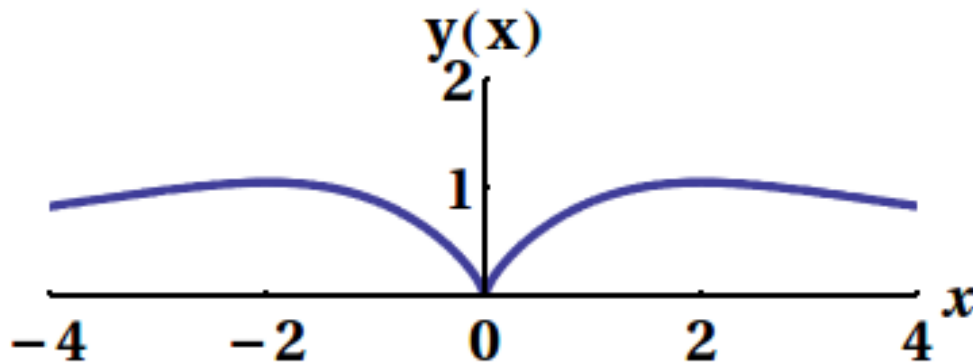
	$(-\infty, -1)$	$(-1, +1)$	$(+1, +\infty)$
$(1+x)^{\frac{5}{3}}$	$\ominus$	$\oplus$	$\oplus$
$(1-x)^{\frac{5}{3}}$	$\oplus$	$\oplus$	$\ominus$
$(x^2+3)$	$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$
$y''(x)$	$\ominus$	$\oplus$	$\ominus$
$y(x)$	konkav	konvex	konkav

Das Krümmungsverhalten ändert sich durch die Stellen  $x = -1$  und  $x = +1$ . Diese Stellen entsprechen daher jeweils einem Wendepunkt.

x. Die grafische Darstellung der Funktion,

$$y(x) = \frac{8\sqrt[3]{x^2}}{8+x^2}, \quad D = \mathbb{R}$$

ist



Es gelten

$$y'(x) = \frac{32(4-x^2)}{3\sqrt[3]{x}(8+x^2)^2} = \frac{32}{3(8+x^2)^2} \frac{(2+x)(2-x)}{\sqrt[3]{x}}, \quad x \neq 0$$



und mit  $\left\{\frac{92 \pm \sqrt{92^2 - 4 \cdot 7 \cdot (-32)}}{2 \cdot 7}\right\} = \{-\tilde{x}^2, \hat{x}^2\}$ ,  $\tilde{x}^2 \approx 0.339$ ,  $\hat{x} \approx 3.67$ ,

$$y''(x) = \frac{32(7x^4 - 92x^2 - 32)}{9\sqrt[3]{x^4}(8+x^2)^3} = \left[ \frac{7 \cdot 32(x^2 + \tilde{x}^2)}{9\sqrt[3]{x^4}(8+x^2)^2} \right]_{=A} (x + \hat{x})(x - \hat{x}), \quad x \neq 0$$

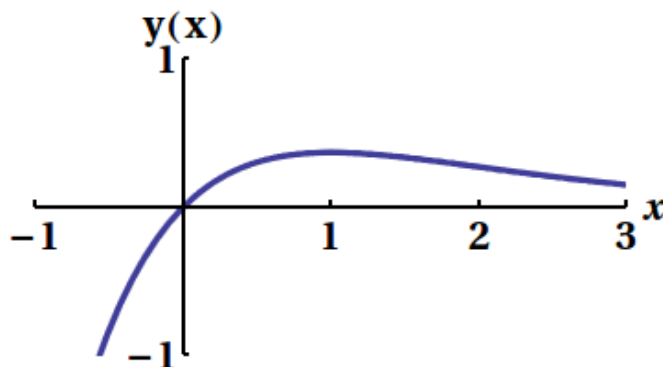
	$(-\infty, -\hat{x})$	$(-\hat{x}, 0)$	$(0, \hat{x})$	$(\hat{x}, \infty)$
$(x + \hat{x})$	$\ominus$	$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$
$(x - \hat{x})$	$\ominus$	$\ominus$	$\ominus$	$\oplus$
$A$	$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$
$y''(x)$	$\oplus$	$\ominus$	$\ominus$	$\oplus$
$y(x)$	konvex	konkav	konkav	konvex

Das Krümmungsverhalten ändert sich durch die Stellen  $x = x_1$  und  $x = x_2$ . Diese Stellen entsprechen daher jeweils einem Wendepunkte.

xi. Die grafische Darstellung der Funktion,

$$y(x) = xe^{-x}, \quad D = \mathbb{R}$$

ist



Es gelten

$$y'(x) = e^{-x}(1 - x)$$

$$y''(x) = e^{-x}(x - 2)$$

$$y''(x) \begin{cases} < 0, & x < 2 \\ > 0, & x > 2 \end{cases}$$

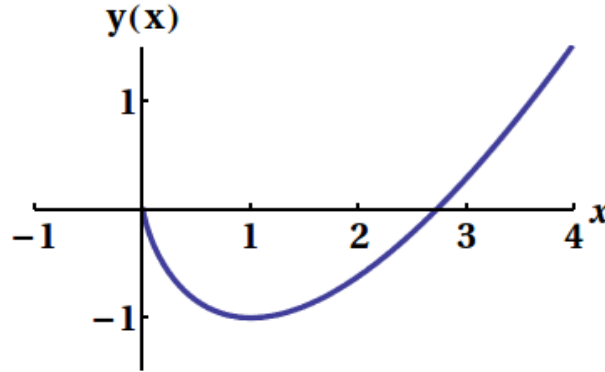
$$y(x) \begin{cases} \text{konkav}, & x < 2 \\ \text{konvex}, & x > 2 \end{cases}$$

Das Krümmungsverhalten ändert sich durch die Stelle  $x = 2$ . Die Stelle entspricht daher einem Wendepunkt.

xii. Die grafische Darstellung der Funktion,

$$y(x) = x \ln(x) - x, \quad D = \mathbb{R}_+$$

ist



Es gelten

$$y'(x) = \ln(x), \quad x > 0$$

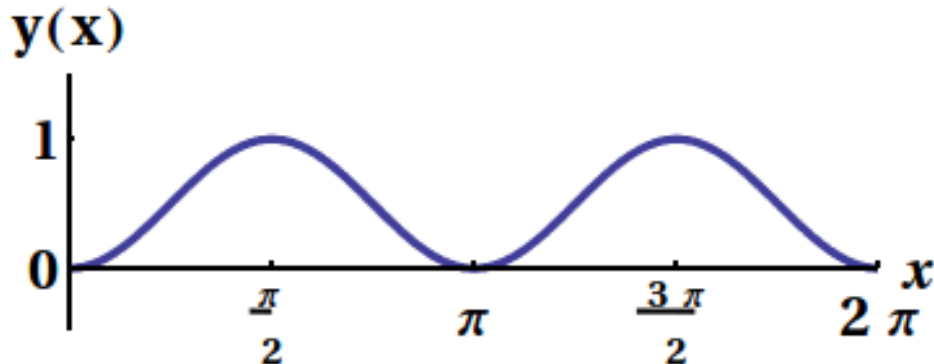
$$y''(x) = \frac{1}{x} > 0, \quad x > 0$$

Die Funktion ist konvex für  $x > 0$ . Es gibt keine Wendepunkte, da das Krümmungsverhalten sich durch keine Stelle ändert.

xiii. Die grafische Darstellung der Funktion,

$$y(x) = \sin^2(x), \quad D = [0, 2\pi]$$

ist



Es gelten

$$y'(x) = 2 \sin(x) \cos(x) = \sin(2x)$$

$$y''(x) = 2 \cos^2(x) - 2 \sin^2(x) = 2 \cos(2x)$$

$$y''(x) = \begin{cases} = 0, & x = \frac{2k+1}{4}\pi, & k = 0, 1, 2, 3 \\ = \sqrt{2}, & x = \frac{1}{8}\pi & \Rightarrow > 0, & x \in \left(\frac{0}{4}\pi, \frac{1}{4}\pi\right) \\ = -2, & x = \frac{1}{2}\pi & \Rightarrow < 0, & x \in \left(\frac{1}{4}\pi, \frac{3}{4}\pi\right) \\ = +2, & x = \pi & \Rightarrow > 0, & x \in \left(\frac{3}{4}\pi, \frac{5}{4}\pi\right) \\ = -2, & x = \frac{3}{2}\pi & \Rightarrow < 0, & x \in \left(\frac{5}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi\right) \\ = \sqrt{2}, & x = \frac{15}{8}\pi & \Rightarrow > 0, & x \in \left(\frac{7}{4}\pi, \frac{8}{4}\pi\right) \end{cases}$$

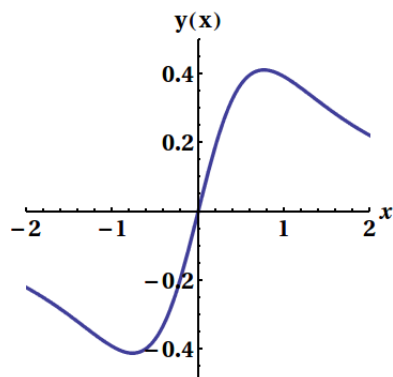
$$y(x) \begin{cases} \text{konvex,} & x \in \left(0, \frac{1}{4}\pi\right) \cup \left(\frac{3}{4}\pi, \frac{5}{4}\pi\right) \cup \left(\frac{7}{4}\pi, \frac{8}{4}\pi\right) \\ \text{konkav,} & x \in \left(\frac{1}{4}\pi, \frac{3}{4}\pi\right) \cup \left(\frac{5}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi\right) \end{cases}$$

Das Krümmungsverhalten ändert sich durch die Stellen  $x = \pi/4, 3\pi/4, 5\pi/4, 7\pi/4$ . Diese Stellen entsprechen daher jeweils einem Wendepunkt.

xiv. Die grafische Darstellung der Funktion,

$$y(x) = \tan^{-1}(x)/(1+x^2), \quad D = \mathbb{R}$$

ist



Es gelten mit  $x_1 \approx 1.330$  durch das Bisektionsverfahren gefunden (Blatt 5, Beispiel 3b),

$$y'(x) = \frac{1 - 2x \tan^{-1}(x)}{(1+x^2)^2}$$

$$y''(x) = \frac{(6x^2 - 2) \tan^{-1}(x) - 6x}{(1+x^2)^3}, \quad y''(x_1) = 0$$

$$y''(x) \begin{cases} = 0, & x = 0, \pm x_1 \\ \approx -0.1, & x = -2 \Rightarrow < 0, & x \in (-\infty, -x_1) \\ \approx +0.6, & x = -1 \Rightarrow > 0, & x \in (-x_1, 0) \\ \approx -0.6, & x = +1 \Rightarrow < 0, & x \in (0, x_1) \\ \approx +0.1, & x = +2 \Rightarrow > 0, & x \in (x_1, +\infty) \end{cases}$$

$$y(x) \begin{cases} \text{konkav,} & x \in (-\infty, -x_1) \cup (0, x_1) \\ \text{konvex,} & x \in (-x_1, 0) \cup (x_1, +\infty) \end{cases}$$

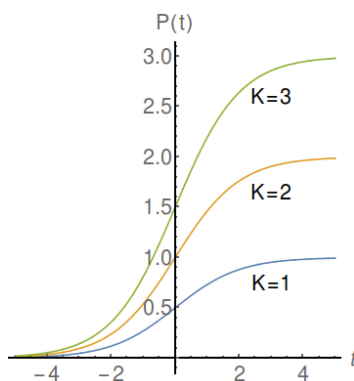
Die Stellen  $x = -x_1$  und  $x = +x_1$  entsprechen jeweils einem Wendepunkt, da das Krümmungsverhalten sich durch diese Stellen ändert.

6. Logistisches Wachstum:

(a) Die grafische Darstellung für

$$P(t) = \frac{K}{1 + e^{-t}}, \quad K = 1, 2, 3$$

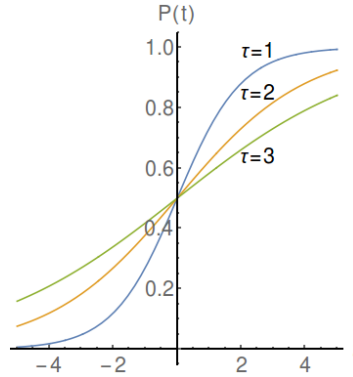
ist



So sieht man,  $K$  (die Kapazität) entspricht einer waagerechten Asymptote. Die grafische Darstellung für

$$P(t) = \frac{1}{1 + e^{-t/\tau}}, \quad \tau = 1, 2, 3$$

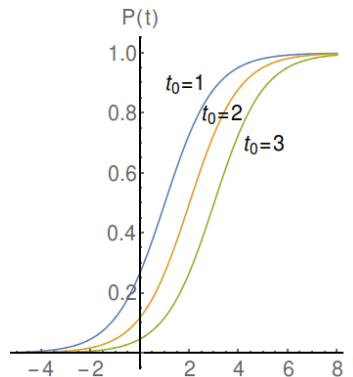
ist



So sieht man, die Steigung im Wendepunkt wird seichter, wenn  $\tau$  (die Zeitskala) größer wird. Die grafische Darstellung für

$$P(t) = \frac{1}{1 + e^{-(t-t_0)/\tau}}, \quad t_0 = 1, 2, 3$$

ist



So sieht man, der Wendepunkt  $(t_0, K/2)$  wird verschoben, wenn  $t_0$  verschoben wird.

(b) Für die Funktion

$$P(t) = \frac{K}{1 + e^{-(t-t_0)/\tau}}$$

gelten

$$\begin{aligned} P'(t) &= K D_t (1 + e^{-(t-t_0)/\tau})^{-1} = -K (1 + e^{-(t-t_0)/\tau})^{-2} D_t (1 + e^{-(t-t_0)/\tau}) \\ &= \frac{-K}{(1 + e^{-(t-t_0)/\tau})} e^{-(t-t_0)/\tau} D_t (-(t-t_0)/\tau) = \frac{K e^{-(t-t_0)/\tau}}{\tau (1 + e^{-(t-t_0)/\tau})^2} \end{aligned}$$

und

$$P''(t) = \frac{K}{\tau} \frac{(e^{-(t-t_0)/\tau})' (1 + e^{-(t-t_0)/\tau})^2 - e^{-(t-t_0)/\tau} ((1 + e^{-(t-t_0)/\tau})^2)'}{(1 + e^{-(t-t_0)/\tau})^4}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{K e^{-(t-t_0)/\tau} (-1/\tau) (1 + e^{-(t-t_0)/\tau})^2 - e^{-(t-t_0)/\tau} 2(1 + e^{-(t-t_0)/\tau}) e^{-(t-t_0)/\tau} (-1/\tau)}{\tau (1 + e^{-(t-t_0)/\tau})^4} \\
&= \frac{K - e^{-(t-t_0)/\tau} - e^{-2(t-t_0)/\tau} + 2e^{-2(t-t_0)/\tau}}{\tau^2 (1 + e^{-(t-t_0)/\tau})^3} = \frac{K e^{-2(t-t_0)/\tau} - e^{-(t-t_0)/\tau}}{\tau^2 (1 + e^{-(t-t_0)/\tau})^3}
\end{aligned}$$

oder

$$P''(t) = \frac{K e^{-(t-t_0)/\tau}}{\tau^2 (1 + e^{-(t-t_0)/\tau})^3} (e^{-(t-t_0)/\tau} - 1) \quad \begin{cases} > 0, & t < t_0 \\ < 0, & t > t_0 \end{cases}$$

und daher ist  $(t_0, P(t_0)) = (t_0, K/2)$  ein Wendepunkt.

(c) Mit den Daten  $P(0) = 1$ ,  $P(\ln(2)) = 4/3$  und  $P(\ln(4)) = 8/5$  ergibt sich das Gleichungssystem für die unbekannt Parameter  $(K, \tau, t_0)$ ,

$$\begin{aligned}
1 = P(0) &= \frac{K}{1 + e^{-(0-t_0)/\tau}} \\
4/3 = P(\ln(2)) &= \frac{K}{1 + e^{-(\ln(2)-t_0)/\tau}} \\
8/5 = P(\ln(4)) &= \frac{K}{1 + e^{-(\ln(4)-t_0)/\tau}}
\end{aligned}$$

Die jeweiligen Nenner können so vereinfacht werden,

$$\begin{aligned}
e^{-(0-t_0)/\tau} &= e^{t_0/\tau} \\
e^{-(\ln(2)-t_0)/\tau} &= e^{\ln(2^{-1/\tau})} e^{t_0/\tau} = 2^{-1/\tau} e^{t_0/\tau} \\
e^{-(\ln(4)-t_0)/\tau} &= e^{\ln(4^{-1/\tau})} e^{t_0/\tau} = 2^{-2/\tau} e^{t_0/\tau}
\end{aligned}$$

Man löst nach  $K$  im Gleichungssystem auf und bekommt

$$K = 1 + e^{t_0/\tau} = \frac{4}{3}(1 + 2^{-1/\tau} e^{t_0/\tau}) = \frac{8}{5}(1 + 2^{-2/\tau} e^{t_0/\tau})$$

Aus der Gleichung  $1 + e^{t_0/\tau} = \frac{4}{3}(1 + 2^{-1/\tau} e^{t_0/\tau})$  folgt

$$(1 - \frac{4}{3} 2^{-1/\tau}) e^{t_0/\tau} = \frac{4}{3} - 1 = \frac{1}{3} \quad \text{oder} \quad e^{t_0/\tau} = \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{4}{3} 2^{-1/\tau}} \left( \frac{3}{3} \right) = \frac{1}{3 - 4 \cdot 2^{-1/\tau}}$$

Aus der Gleichung  $1 + e^{t_0/\tau} = \frac{8}{5}(1 + 2^{-2/\tau} e^{t_0/\tau})$  folgt

$$(1 - \frac{8}{5} 2^{-2/\tau}) e^{t_0/\tau} = \frac{8}{5} - 1 = \frac{3}{5} \quad \text{oder} \quad e^{t_0/\tau} = \frac{\frac{3}{5}}{1 - \frac{8}{5} 2^{-2/\tau}} \left( \frac{5}{5} \right) = \frac{3}{5 - 8 \cdot 2^{-2/\tau}}$$

Aus den letzten zwei Gleichungen

$$e^{t_0/\tau} = \frac{1}{3 - 4 \cdot 2^{-1/\tau}} = \frac{3}{5 - 8 \cdot 2^{-2/\tau}}$$

folgt mit  $x = 2^{-1/\tau}$ ,

$$\frac{1}{3 - 4x} = \frac{3}{5 - 8x^2} \quad \text{oder} \quad 8x^2 - 12x + 4 = 0 \quad \text{d.h.} \quad x = \frac{1}{2} \quad \text{oder} \quad x = 1$$

Die Lösung  $x = 1 = 2^{-1/\tau}$  kann ausgeschlossen werden, da der Wert  $\tau = +\infty$  sich ergeben würde. Die Lösung  $x = \frac{1}{2} = 2^{-1/\tau}$  entspricht dem Wert

$$\boxed{\tau = 1}$$

Mit  $\tau = 1$  folgt aus der Gleichung  $1 + e^{t_0/\tau} = \frac{4}{3}(1 + 2^{-1/\tau} e^{t_0/\tau})$ ,

$$\frac{1}{3} e^{t_0} = (1 - \frac{4}{3} 2^{-1}) e^{t_0} = \frac{4}{3} - 1 = \frac{1}{3} \quad \text{oder} \quad e^{t_0} = 1 \quad \text{oder} \quad \boxed{t_0 = 0}$$

Mit  $\tau = 1$  und  $t_0 = 0$  folgt aus der Gleichung  $K = 1 + e^{t_0/\tau}$  der Wert  $\boxed{K = 2}$ .