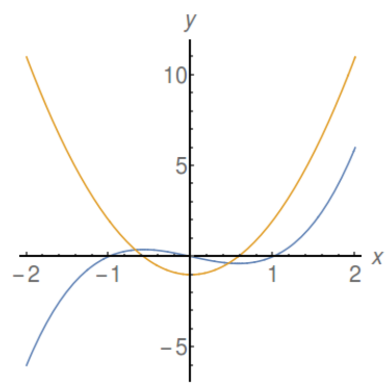
Integral- und Differentialrechnungen für USW
Lösungen der Beispiele des 6. Übungsblatts

1. Grafische Beziehung zwischen Funktion und Ableitung:

   (a) Die Ableitung der Funktion $f(x) = x^3 - x$ ist

   $$f'(x) = D_x(x^3 - x) = 3x^2 - 1$$

   (b) Die grafische Darstellung von $f(x)$ und $f'(x)$ ist

   Man merkt, $f'(x)$ ist positive oder negativ, wenn die Steigung von $f(x)$ positiv bzw. negativ ist. Weiters ist $|f'(x)|$ desto größer, je steiler die Tangentengerade von $f(x)$ ist.

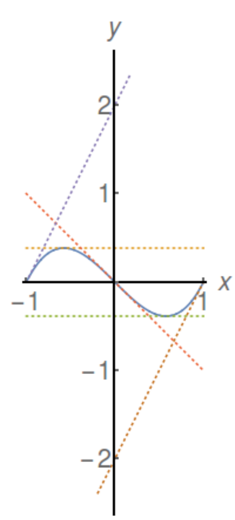
   (c) Die Tangentengerade durch einen beliebigen Punkt $(x_0, f(x_0))$ ist

   $$(y - f(x_0)) = f'(x_0)(x - x_0)$$

   und insbesondere

   $$\begin{array}{lccccc}
\text{für} & (-1, f(-1)) & : & (y-0) = 2(x+1) & \text{oder} & y = 2x+2 \\
\text{für} & (-\frac{1}{\sqrt{3}}, f(-\frac{1}{\sqrt{3}})) & : & (y - \frac{2}{3\sqrt{3}}) = 0(x + \frac{1}{\sqrt{3}}) & \text{oder} & y = \frac{2}{3\sqrt{3}} \\
\text{für} & (0, f(0)) & : & (y-0) = -(x-0) & \text{oder} & y = -x \\
\text{für} & (\frac{1}{\sqrt{3}}, f(\frac{1}{\sqrt{3}})) & : & (y + \frac{2}{3\sqrt{3}}) = 0(x - \frac{1}{\sqrt{3}}) & \text{oder} & y = -\frac{2}{3\sqrt{3}} \\
\text{für} & (1, f(1)) & : & (y-0) = 2(x-1) & \text{oder} & y = 2x-2
\end{array}$$

   (d) Die grafische Darstellung der Funktion gemeinsam mit diesen Tangentengeraden ist:

2. Ableitungen von log und exp-Funktionen:

   (a) Im Allgemeinen gilt mit der Kettenregel

$$f_1(x) = v(u(x)), \quad v(x) = \ln(x), \quad v'(x) = \frac{1}{x}, \quad f_1'(x) = v'(u(x))u'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

   und insbesondere für die jeweiligen Fälle,

   i. $u(x) = x, \quad u'(x) = 1, \quad D_x v(u(x)) = \dfrac{1}{x}$

   ii. $u(x) = xe^x, \quad u'(x) = e^x + xe^x = (1+x)e^x, \quad D_x v(u(x)) = \dfrac{(1+x)e^x}{xe^x} = \dfrac{1}{x} + 1$

   iii. $u(x) = \dfrac{1+\ln(x)}{1+e^x}, \quad u'(x) = \dfrac{\frac{1}{x}(1+e^x) - (1+\ln(x))e^x}{(1+e^x)^2}$

$$D_x v(u(x)) = \frac{\frac{1}{x}(1+e^x) - (1+\ln(x))e^x}{(1+e^x)^2} \Bigg/ \left(\frac{1+\ln(x)}{1+e^x}\right) = \frac{(1+e^x) - xe^x(1+\ln(x))}{x(1+\ln(x))(1+e^x)}$$

   iv. $u(x) = \ln(1+x^2), \quad u'(x) = \dfrac{(1+x^2)'}{(1+x^2)} = \dfrac{2x}{1+x^2}$

$$D_x v(u(x)) = \frac{2x}{1+x^2} \Bigg/ \ln(1+x^2) = \frac{2x}{(1+x^2)\ln(1+x^2)}$$

   (b) Im Allgemeinen gilt mit der Kettenregel

$$f_2(x) = v(u(x)), \quad v(x) = \log_2(x), \quad v'(x) = D_x \log_2(e)\ln(x) = \log_2(e)\frac{1}{x},$$

$$f_2'(x) = v'(u(x))u'(x) = \log_2(e)\frac{u'(x)}{u(x)}$$

   wobei die Regel der Logarithmusfunktionen

$$\log_a(x) = \log_a(b^{\log_b(x)}) = \log_b(x)\log_a(b)$$

   verwendet worden ist. Anhand der Lösungen des letzten Teils ergeben sich hier ähnliche Lösungen einfach durch Multiplikation mit $\log_2(e)$,

   i. $u(x) = x, \quad D_x v(u(x)) = \log_2(e)\dfrac{1}{x}$

   ii. $u(x) = xe^x, \quad D_x v(u(x)) = \log_2(e)\left(\dfrac{1}{x} + 1\right)$

   iii. $u(x) = \dfrac{1+\ln(x)}{1+e^x}, \quad D_x v(u(x)) = \log_2(e)\dfrac{(1+e^x) - xe^x(1+\ln(x))}{x(1+\ln(x))(1+e^x)}$

   iv. $u(x) = \ln(1+x^2), \quad D_x v(u(x)) = \log_2(e)\dfrac{2x}{(1+x^2)\ln(1+x^2)}$

   (c) Im Allgemeinen gilt mit der Kettenregel

$$f_3(x) = v(u(x)), \quad v(x) = e^x, \quad v'(x) = e^x, \quad f_3'(x) = v'(u(x))u'(x) = u'(x)e^{u(x)}$$

   und insbesondere für die jeweiligen Fälle,

   i. $u(x) = x, \quad u'(x) = 1, \quad D_x v(u(x)) = e^x$

   ii. $u(x) = xe^x, \quad u'(x) = (1+x)e^x, \quad D_x v(u(x)) = (1+x)e^x e^{xe^x}$

iii. $u(x) = \dfrac{1+\ln(x)}{1+e^x}, \quad u'(x) = \dfrac{\frac{1}{x}(1+e^x) - (1+\ln(x))e^x}{(1+e^x)^2}$

$$D_x v(u(x)) = \frac{\frac{1}{x}(1+e^x) - (1+\ln(x))e^x}{(1+e^x)^2} \exp\left(\frac{1+\ln(x)}{1+e^x}\right)$$

iv. $u(x) = \ln(1+x^2), \quad u'(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$

$$D_x v(u(x)) = \frac{2x}{1+x^2} \exp\left(\ln(1+x^2)\right) = \frac{2x}{1+x^2}(1+x^2) = 2x$$

(d) Im Allgemeinen gilt mit der Kettenregel

$$f_4(x) = v(u(x)), \quad v(x) = 2^x = \exp_2(x)$$

$$v'(x) = D_x 2^x = D_x e^{\ln(2^x)} = D_x e^{x\ln(2)} = \ln(2)e^{x\ln(2)} = \ln(2)e^{\ln(2^x)} = \ln(2)2^x$$

$$f_4'(x) = v'(u(x))u'(x) = \ln(2)u'(x)2^{u(x)}$$

wobei die Regeln der Logarithmusfunktionen verwendet worden sind. Anhand der Lösungen des letzten Teils ergeben sich hier ähnliche Lösungen durch Multiplikation mit $\ln(2)$,

i. $u(x) = x, \quad u'(x) = 1, \quad D_x 2^x = \ln(2)2^x$

ii. $u(x) = xe^x, \quad u'(x) = (1+x)e^x, \quad D_x v(u(x)) = \ln(2)(1+x)e^x 2^{xe^x}$

iii. $u(x) = \dfrac{1+\ln(x)}{1+e^x}, \quad u'(x) = \dfrac{\frac{1}{x}(1+e^x) - (1+\ln(x))e^x}{(1+e^x)^2}$

$$D_x v(u(x)) = \ln(2)\left(\frac{\frac{1}{x}(1+e^x) - (1+\ln(x))e^x}{(1+e^x)^2}\right) \exp_2\left(\frac{1+\ln(x)}{1+e^x}\right)$$

iv. $u(x) = \ln(1+x^2), \quad u'(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$

$$D_x v(u(x)) = \ln(2)\frac{2x}{1+x^2} \exp_2(\ln(1+x^2))$$

3. Ableitungen von Winkelfunktionen und ihrer Umkehrfunktionen:

(a) Im Allgemeinen gilt mit der Kettenregel

$$g_1(x) = v(u(x)), \quad v(x) = \sin(x), \quad v'(x) = \cos(x), \quad g_1'(x) = v'(u(x))u'(x) = \cos(u(x))u'(x)$$

und insbesondere für die jeweiligen Fälle,

i. $u(x) = x, \quad u'(x) = 1, \quad D_x v(u(x)) = \cos(x)$

ii. $u(x) = x\sin(x), \quad u'(x) = \sin(x) + x\cos(x)$

$$D_x v(u(x)) = (\sin(x) + x\cos(x))\cos(x\sin(x))$$

iii. $u(x) = \dfrac{1+\sin(x)}{1+\cos(x)}$

$$u'(x) = \frac{\cos(x)(1+\cos(x)) - (1+\sin(x))(-\sin(x))}{(1+\cos(x))^2}$$

$$= \frac{(\cos^2(x) + \sin^2(x))_{=1} + \cos(x) + \sin(x)}{(1+\cos(x))^2} = \frac{1+\sin(x)+\cos(x)}{(1+\cos(x))^2}$$

$$D_x v(u(x)) = \frac{1+\sin(x)+\cos(x)}{(1+\cos(x))^2} \cos\left(\frac{1+\sin(x)}{1+\cos(x)}\right)$$

iv. $u(x) = \tan^{-1}(1+x^2), \quad u'(x) = \dfrac{(1+x^2)'}{1+(1+x^2)^2} = \dfrac{2x}{1+(1+x^2)^2}$

$$D_x v(u(x)) = \frac{2x}{1+(1+x^2)^2}\cos(\tan^{-1}(1+x^2)) = \frac{2x}{1+(1+x^2)^2}\frac{1}{\sqrt{1+(1+x^2)^2}}$$
$$= \frac{2x}{(1+(1+x^2)^2)^{\frac{3}{2}}}$$

(b) Im Allgemeinen gilt mit der Kettenregel

$$g_2(x) = v(u(x)), \quad v(x) = \cos(x), \quad v'(x) = -\sin(x), \quad g_2'(x) = v'(u(x))u'(x) = -\sin(u(x))u'(x)$$

und insbesondere für die jeweiligen Fälle,

i. $u(x) = x, \quad u'(x) = 1, \quad D_x v(u(x)) = -\sin(x)$

ii. $u(x) = x\sin(x), \quad u'(x) = \sin(x) + x\cos(x)$

$$D_x v(u(x)) = -(\sin(x) + x\cos(x))\sin(x\sin(x))$$

iii. $u(x) = \dfrac{1+\sin(x)}{1+\cos(x)}, \quad u'(x) = \dfrac{1+\sin(x)+\cos(x)}{(1+\cos(x))^2}$

$$D_x v(u(x)) = -\frac{1+\sin(x)+\cos(x)}{(1+\cos(x))^2}\sin\left(\frac{1+\sin(x)}{1+\cos(x)}\right)$$

iv. $u(x) = \tan^{-1}(1+x^2), \quad u'(x) = \dfrac{2x}{1+(1+x^2)^2}$

$$D_x v(u(x)) = -\frac{2x}{1+(1+x^2)^2}\sin(\tan^{-1}(1+x^2)) = -\frac{2x}{1+(1+x^2)^2}\frac{1+x^2}{\sqrt{1+(1+x^2)^2}}$$
$$= -\frac{2x(1+x^2)}{(1+(1+x^2)^2)^{\frac{3}{2}}}$$

(c) Im Allgemeinen gilt mit der Kettenregel

$$g_3(x) = v(u(x)), \quad v(x) = \tan(x), \quad v'(x) = \sec^2(x), \quad g_3'(x) = v'(u(x))u'(x) = \sec^2(u(x))u'(x)$$

und insbesondere für die jeweiligen Fälle,

i. $u(x) = x, \quad u'(x) = 1, \quad D_x v(u(x)) = \sec^2(x)$

ii. $u(x) = x\sin(x), \quad u'(x) = \sin(x) + x\cos(x)$

$$D_x v(u(x)) = (\sin(x) + x\cos(x))\sec^2(x\sin(x))$$

iii. $u(x) = \dfrac{1+\sin(x)}{1+\cos(x)}, \quad u'(x) = \dfrac{1+\sin(x)+\cos(x)}{(1+\cos(x))^2}$

$$D_x v(u(x)) = \frac{1+\sin(x)+\cos(x)}{(1+\cos(x))^2}\sec^2\left(\frac{1+\sin(x)}{1+\cos(x)}\right)$$

iv. $u(x) = \tan^{-1}(1+x^2), \quad u'(x) = \dfrac{2x}{1+(1+x^2)^2}$

$$D_x v(u(x)) = \frac{2x}{1+(1+x^2)^2}\sec^2(\tan^{-1}(1+x^2)) = \frac{2x}{1+(1+x^2)^2}(1+(1+x^2)^2) = 2x$$

(d) Im Allgemeinen gilt mit der Kettenregel

$$g_4(x) = v(u(x)), \quad v(x) = \sin^{-1}(x), \quad v'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$g_4'(x) = v'(u(x))u'(x) = \frac{u'(x)}{\sqrt{1-u(x)^2}}$$

und insbesondere für die jeweiligen Fälle,

i. $u(x) = x, \quad u'(x) = 1, \quad D_x v(u(x)) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

ii. $u(x) = x\sin(x), \quad u'(x) = \sin(x) + x\cos(x), \quad D_x v(u(x)) = \dfrac{\sin(x)+x\cos(x)}{\sqrt{1-(x\sin(x))^2}}$

iii. $u(x) = \dfrac{1+\sin(x)}{1+\cos(x)}, \quad u'(x) = \dfrac{1+\sin(x)+\cos(x)}{(1+\cos(x))^2}$

$$D_x v(u(x)) = \frac{1+\sin(x)+\cos(x)}{(1+\cos(x))^2} \Bigg/ \sqrt{1-\left(\frac{1+\sin(x)}{1+\cos(x)}\right)^2}$$

iv. $u(x) = \tan^{-1}(1+x^2), \quad u'(x) = \dfrac{2x}{1+(1+x^2)^2}$

$$D_x v(u(x)) = \frac{2x}{1+(1+x^2)^2} \Bigg/ \sqrt{1-(\tan^{-1}(1+x^2))^2}$$

(e) Im Allgemeinen gilt mit der Kettenregel

$$g_5(x) = v(u(x)), \quad v(x) = \cos^{-1}(x), \quad v'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$g_5'(x) = v'(u(x))u'(x) = -\frac{u'(x)}{\sqrt{1-u(x)^2}}$$

und insbesondere für die jeweiligen Fälle,

i. $u(x) = x, \quad u'(x) = 1, \quad D_x v(u(x)) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

ii. $u(x) = x\sin(x), \quad u'(x) = \sin(x) + x\cos(x), \quad D_x v(u(x)) = -\dfrac{\sin(x)+x\cos(x)}{\sqrt{1-(x\sin(x))^2}}$

iii. $u(x) = \dfrac{1+\sin(x)}{1+\cos(x)}, \quad u'(x) = \dfrac{1+\sin(x)+\cos(x)}{(1+\cos(x))^2}$

$$D_x v(u(x)) = -\frac{1+\sin(x)+\cos(x)}{(1+\cos(x))^2} \Bigg/ \sqrt{1-\left(\frac{1+\sin(x)}{1+\cos(x)}\right)^2}$$

iv. $u(x) = \tan^{-1}(1+x^2), \quad u'(x) = \dfrac{2x}{1+(1+x^2)^2}$

$$D_x v(u(x)) = -\frac{2x}{1+(1+x^2)^2} \Bigg/ \sqrt{1-(\tan^{-1}(1+x^2))^2}$$

(f) Im Allgemeinen gilt mit der Kettenregel

$$g_5(x) = v(u(x)), \quad v(x) = \tan^{-1}(x), \quad v'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$g_5'(x) = v'(u(x))u'(x) = \frac{u'(x)}{1+u(x)^2}$$

und insbesondere für die jeweiligen Fälle,

i. $u(x) = x, \quad u'(x) = 1, \quad D_x v(u(x)) = \dfrac{1}{1+x^2}$

ii. $u(x) = x\sin(x), \quad u'(x) = \sin(x) + x\cos(x), \quad D_x v(u(x)) = \dfrac{\sin(x) + x\cos(x)}{1 + (x\sin(x))^2}$

iii. $u(x) = \dfrac{1+\sin(x)}{1+\cos(x)}, \quad u'(x) = \dfrac{1+\sin(x)+\cos(x)}{(1+\cos(x))^2}$

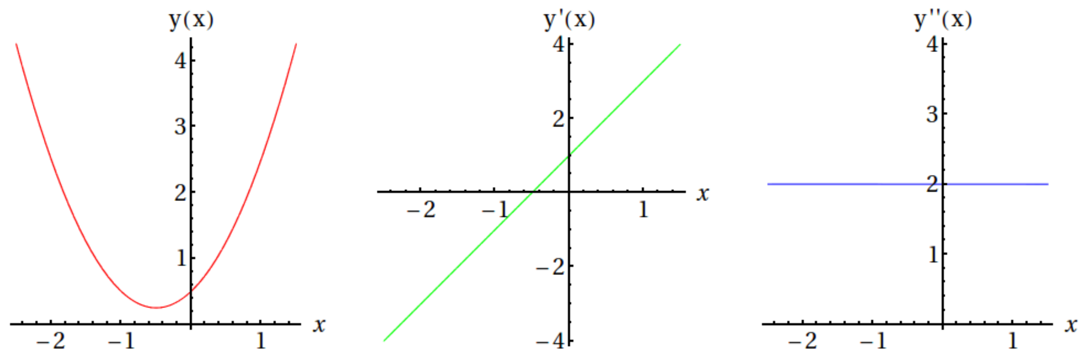
$$D_x v(u(x)) = \frac{1+\sin(x)+\cos(x)}{(1+\cos(x))^2} \Bigg/ \left(1 + \left(\frac{1+\sin(x)}{1+\cos(x)}\right)^2\right) = \frac{1+\sin(x)+\cos(x)}{3+2\sin(x)+2\cos(x)}$$

iv. $u(x) = \tan^{-1}(1+x^2), \quad u'(x) = \dfrac{2x}{1+(1+x^2)^2}$

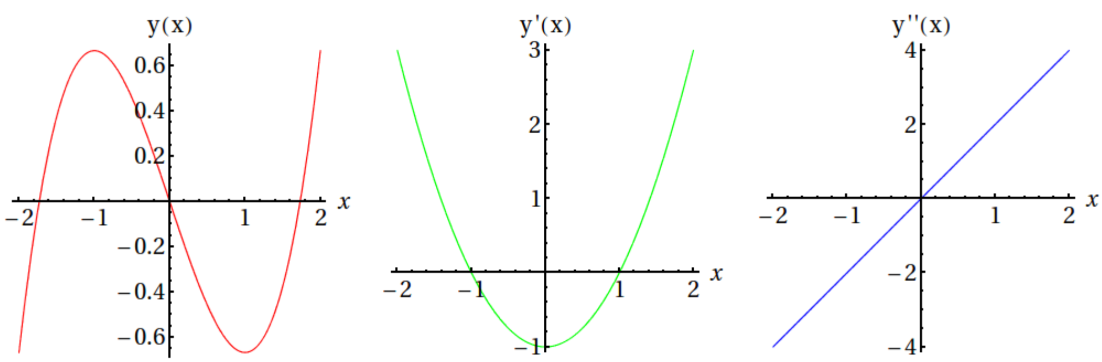
$$D_x v(u(x)) = \frac{2x}{1+(1+x^2)^2} \Bigg/ \left(1 + (\tan^{-1}(1+x^2))^2\right)$$

4. Vorbereitung auf die Monotonie und Krümmung:

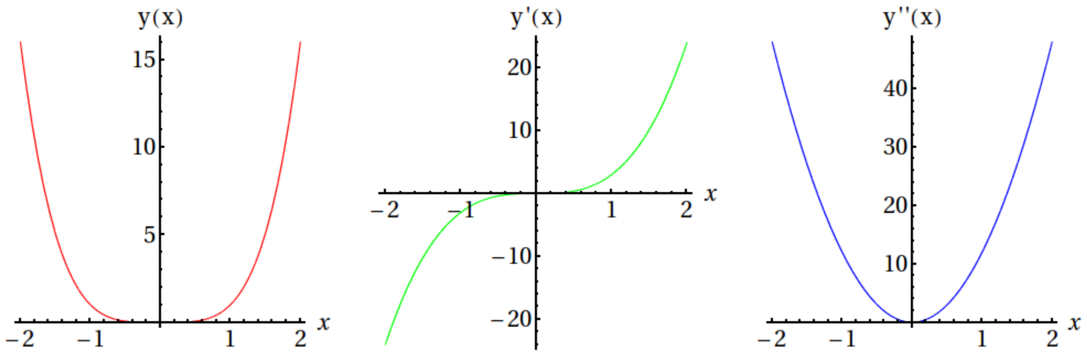
(a) $y_1(x) = x^2 + x + \frac{1}{2}$, $y_1'(x) = 2x + 1$, $y_1''(x) = 2$, grafische Darstellung:



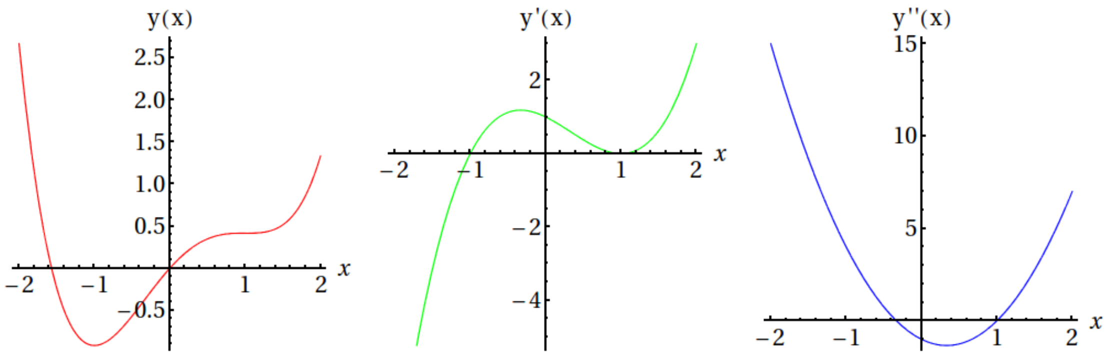
(b) $y_2(x) = \frac{1}{3}x^3 - x$, $y_2'(x) = x^2 - 1$, $y_2''(x) = 2x$, grafische Darstellung:



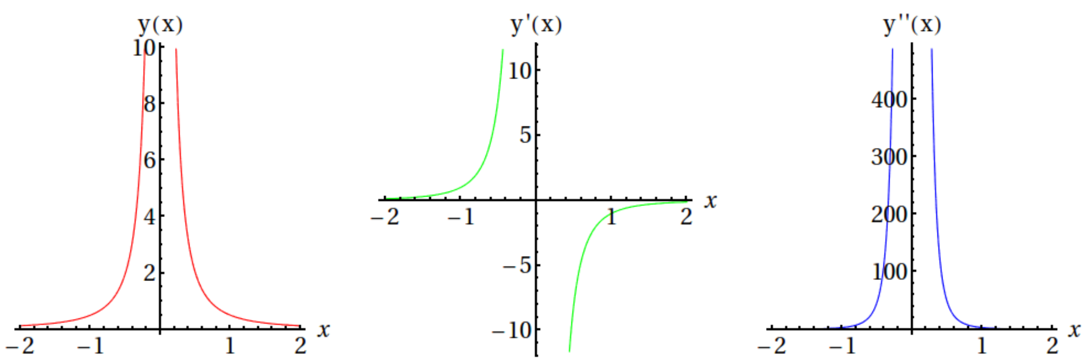
(c) $y_3(x) = x^4$, $y_3'(x) = 4x^3$, $y_3''(x) = 12x^2$, grafische Darstellung:



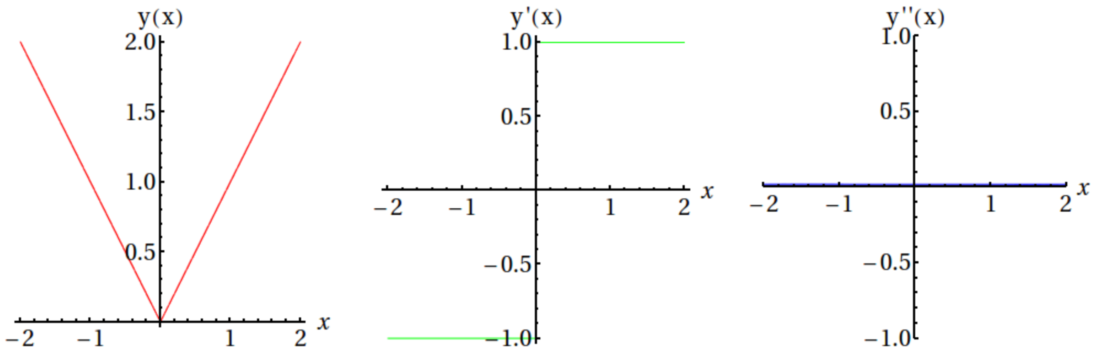
(d) $y_4(x) = x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4$, $y_4'(x) = 1 - x - x^2 + x^3$, $y_4''(x) = -1 - 2x + 3x^2$, grafische Darstellung:



(e) $y_5(x) = \frac{1}{2}x^{-2}$, $y_5'(x) = -x^{-3}$, $y_5''(x) = 3x^{-4}$, grafische Darstellung:



(f) $y_6(x) = |x|$, $y_6'(x) = \text{sign}(x),\ x \neq 0,$ (Seite 79 im Skriptum), $y_6''(x) = 0,\ x \neq 0$, grafische Darstellung:

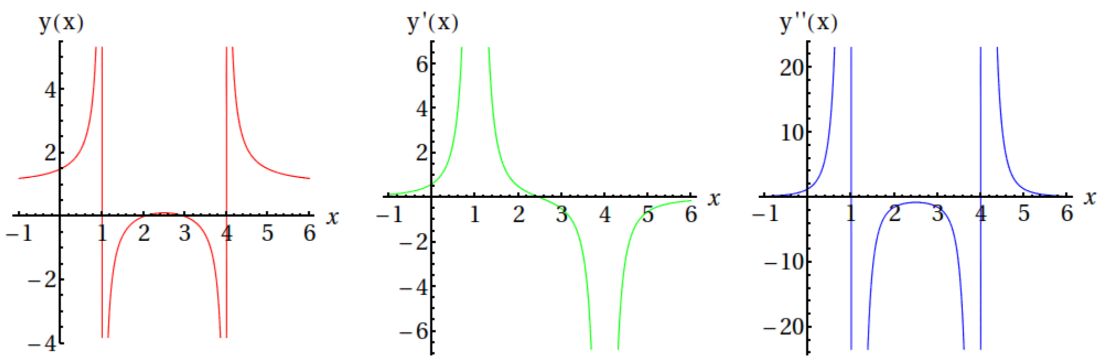


(g) $y_7(x) = (x^2 - 5x + 6)/(x^2 - 5x + 4)$,

$$y_7'(x) = \frac{(2x-5)(x^2-5x+4) - (x^2-5x+6)(2x-5)}{(x^2-5x+4)^2} = \frac{10-4x}{(x^2-5x+4)^2},$$

$$y_7''(x) = \frac{-4(x^2-5x+4)^2 - (10-4x)2(x^2-5x+4)(2x-5)}{(x^2-5x+4)^4} = \frac{12(7-5x+x^2)}{(4-5x+x^2)^3},$$

grafische Darstellung:



(h) Für $v(x) = |x|$ und $v'(x) = \operatorname{sign}(x)$, $x \neq 0$, (Seite 79 im Skriptum) folgt mit der Kettenregel

$$D_x v(u(x)) = v'(u(x)) = \operatorname{sign}(u(x))u'(x), \quad u(x) \neq 0$$

d.h. die Ableitung existiert nicht, wo $u(x) = 0$ gilt. Insbesondere gelten

$$D_x 2|x+1| = 2D_x|x+1| = 2\operatorname{sign}(x+1), \quad x+1 \neq 0$$

$$D_x 3|x| = 3D_x|x| = 3\operatorname{sign}(x), \quad x \neq 0$$

und

$$D_x 2|x-1| = 2D_x|x-1| = 2\operatorname{sign}(x-1), \quad x-1 \neq 0$$

Daher für $y_8(x) = 2|x+1| - 3|x| + 2|x-1| - 1$ folgt

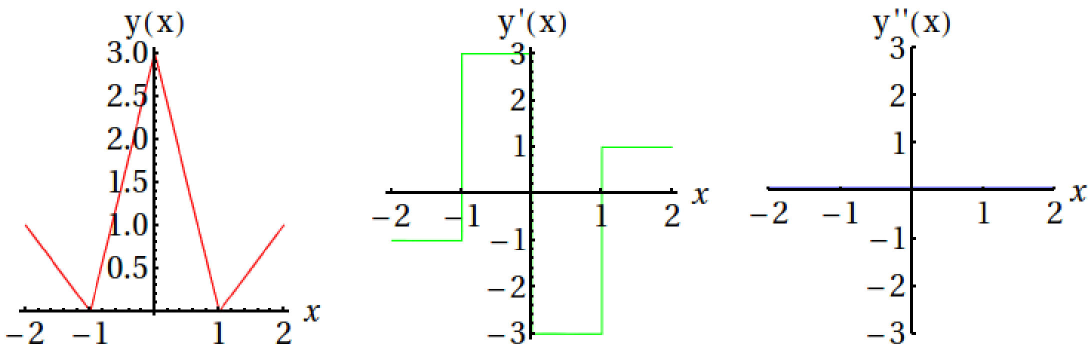
$$y_8'(x) = 2D_x|x+1| - 3D_x|x| + 2D_x|x-1| - D_x 1$$

$$= 2\operatorname{sign}(x+1) - 3\operatorname{sign}(x) + 2\operatorname{sign}(x-1), \quad x \neq -1, 0, +1$$

d.h. die Ableitung existiert nicht in $x = -1, 0, +1$. Da $y_8'(x)$ in den Teilintervallen $(-\infty, -1)$, $(-1, 0)$ und $(0, +1)$ konstant ist, folgt

$$y_8''(x) = 0, \quad x \neq -1, 0, +1$$

Die grafische Darstellung ist

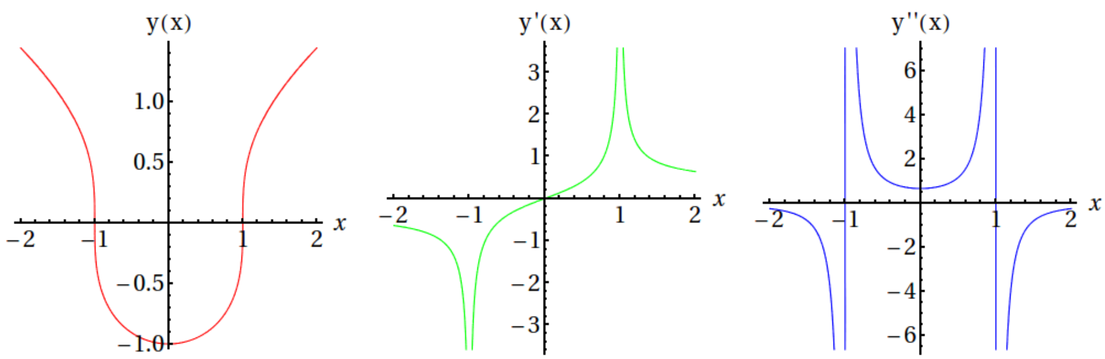


(i) $y_9(x) = (x^2-1)^{\frac{1}{3}}$,

$$y_9'(x) = \frac{1}{3}(x^2-1)^{-\frac{2}{3}}(2x) = \frac{2x}{3(x^2-1)^{\frac{2}{3}}}$$

$$y_9''(x) = \frac{2\cdot 3(x^2-1)^{\frac{2}{3}} - (2x)\cdot 3\cdot \frac{2}{3}(x^2-1)^{-\frac{1}{3}}(2x)}{9(x^2-1)^{\frac{4}{3}}} = -\frac{2(x^2+3)}{9(x^2-1)^{\frac{5}{3}}}$$

grafische Darstellung:



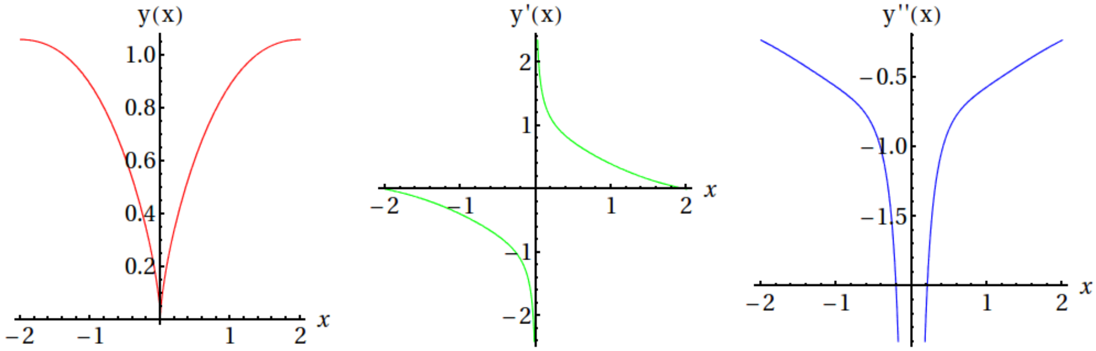
(j) $y_{10}(x) = 8x^{\frac{2}{3}}/(8+x^2)$,

$$y_{10}'(x) = \frac{8\cdot\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}(8+x^2) - 8x^{\frac{2}{3}}(2x)}{(8+x^2)^2} = \frac{32(4-x^2)}{3x^{\frac{1}{3}}(8+x^2)^2}$$

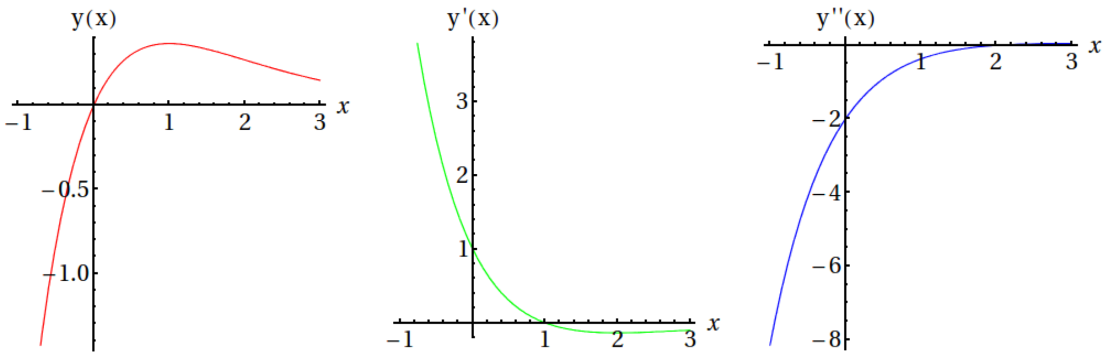
$$y_{10}''(x) = \frac{-32\cdot 2x(3x^{\frac{1}{3}}(8+x^2)^2) - 32(4-x^2)[3\cdot\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}(8+x^2)^2 + 3x^{\frac{1}{3}}2(8+x^2)(2x)]}{9x^{\frac{2}{3}}(8+x^2)^4}$$

$$= \frac{32(7x^4-92x^2-32)}{9x^{\frac{4}{3}}(8+x^2)^3}$$

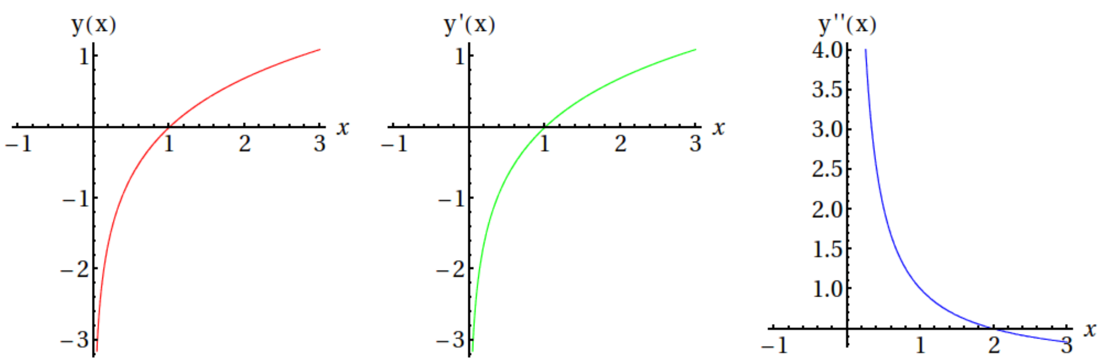
grafische Darstellung:



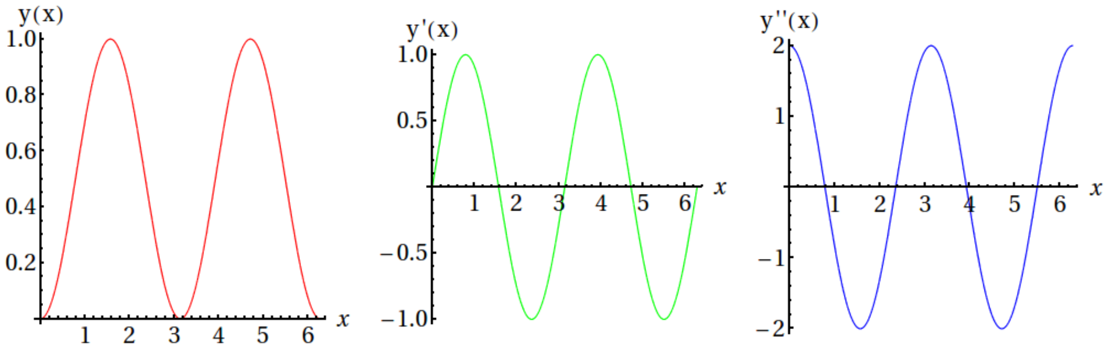
(k) $y_{11}(x) = xe^{-x}$, $y'_{11}(x) = e^{-x} - xe^{-x} = (1-x)e^{-x}$, $y''_{11}(x) = -e^{-x} - (1-x)e^{-x} = (x-2)e^{-x}$, grafische Darstellung:



(l) $y_{12}(x) = x\ln(x) - x$, $y'_{12}(x) = \ln(x) + x\frac{1}{x} - 1 = \ln(x)$, $y''_{12}(x) = 1/x$, grafische Darstellung:



(m) $y_{13}(x) = \sin^2(x)$, $y'_{13}(x) = 2\sin(x)\cos(x)$, $y''_{13}(x) = 2\cos^2(x) - 2\sin^2(x)$, grafische Darstellung:



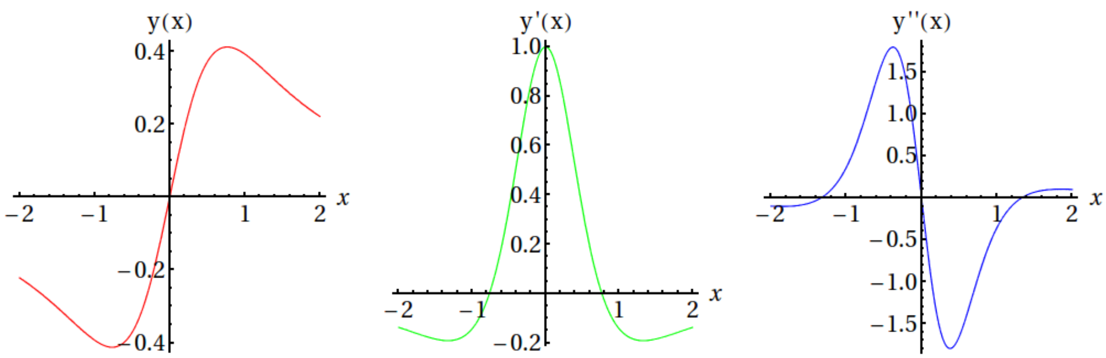
(n) $y_{14}(x) = \tan^{-1}(x)/(1+x^2)$,

$$y_{14}'(x) = \frac{\frac{1}{1+x^2}(1+x^2) - \tan^{-1}(x)(2x)}{(1+x^2)^2} = \frac{1 - 2x\tan^{-1}(x)}{(1+x^2)^2}$$

$$y_{14}''(x) = \frac{(-2\tan^{-1}(x) - 2x\frac{1}{1+x^2})(1+x^2)^2 - (1-2x\tan^{-1}(x))2(1+x^2)(2x)}{(1+x^2)^4}$$

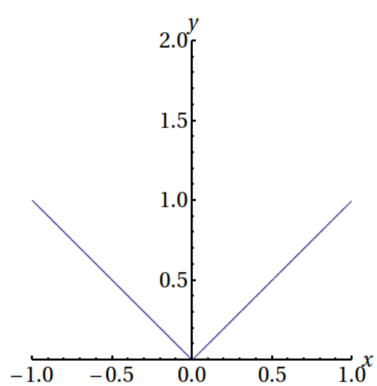
$$= \frac{-6x + (6x^2-2)\tan^{-1}(x)}{(1+x^2)^3}$$

grafische Darstellung:



5. Differenzierbarkeit:

(a) Die grafische Darstellung von $z_1(x) = |x|$ ist



und ein Knick ist in $(0,0)$ ersichtlich. Die Ableitung ist

$$z_1'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{z_1(x+h) - z_1(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|x+h| - |x|}{h}$$

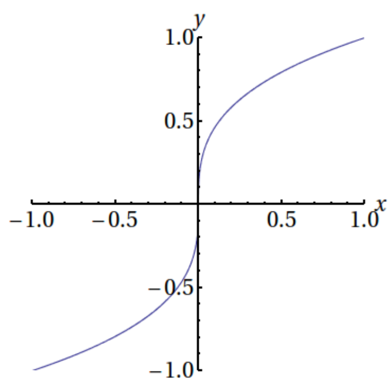
$$= \lim_{h\to 0} \begin{cases} \frac{+(x+h)-x}{h}, & x > 0 \\ \frac{-(x+h)+x}{h}, & x < 0 \\ \frac{|h|}{h}, & x = 0 \end{cases} = \begin{cases} +1, & x > 0 \\ -1, & x < 0 \\ ?, & x = 0 \end{cases} = \operatorname{sign}(x), \quad x \neq 0$$

d.h. $z_1'(x) = \operatorname{sign}(x)$ gilt nur für $x \neq 0$. Die Ableitung an der Stelle $x = 0$ existiert nicht, wie man folgendmaßen sieht. Die einseitigen Grenzwerte existieren,

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{|h|}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{-h}{h} = -1, \qquad \lim_{h\to 0^+} \frac{|h|}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{+h}{h} = +1$$

aber sie stimmen nicht überein. Sollte der (allgemeine, nicht einseitige) Grenzwert $\lim_{h\to 0} \frac{|h|}{h}$ existieren, muss ein solcher Wert von $|h|/h$ angenähert werden, wenn h sich an $h = 0$ *beliebig* annähern würde, insbesondere von links oder von rechts. Da unterschiedliche Werte von links und rechts angenähert werden, existiert der (allgemeine, nicht einseitige) Grenzwert nicht. Daher ist z_1 an der Stelle $x = 0$ nicht differenzierbar.

(b) Die grafische Darstellung von $z_2(x) = x^{\frac{1}{3}}$ ist



und ein Vertikal ist in $(0,0)$ ersichtlich. Die Ableitung ist

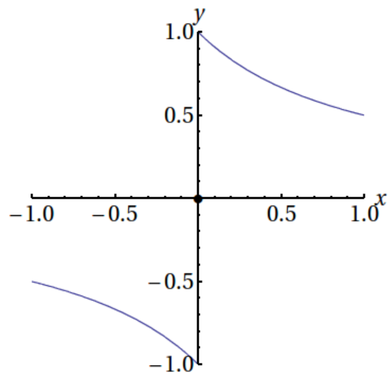
$$z_2'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}, \qquad x \neq 0$$

und für $x = 0$,

$$z_2'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{z_2(0+h) - z_2(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^{\frac{1}{3}} - 0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h^{\frac{2}{3}}} = +\infty$$

d.h. der Grenzwert ist uneigentlich, und die Ableitung kann keinen reelen Wert in $x = 0$ annehmen. Daher ist z_2 an dieser Stelle nicht differenzierbar.

(c) Die grafische Darstellung von $z_3(x) = \operatorname{sign}(x)/(1 + |x|)$ ist



und eine Unstetigkeit ist in $(0,0)$ ersichtlich. Damit eine eindeutige Tangentengerade an einer Stelle existiert, muss die Kurve an der Stelle ununterbrochen sein, d.h. eine differenzierbare Funktion muss stetig sein. Da z_3 an der Stelle $x = 0$ nicht stetig ist, ist die Funktion hier nicht differenzierbar. Sonst wird die Ableitung an anderen Stellen folgendermaßen bestimmt.

$$z_3'(x) = D_x \begin{cases} \dfrac{+1}{1+x}, & x > 0 \\ \dfrac{-1}{1-x}, & x < 0 \end{cases} = D_x \begin{cases} (x+1)^{-1}, & x > 0 \\ (x-1)^{-1}, & x < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} -(x+1)^{-2}, & x > 0 \\ -(x-1)^{-2}, & x < 0 \end{cases} = \begin{cases} -\dfrac{1}{(1+x)^2}, & x > 0 \\ -\dfrac{1}{(1-x)^2}, & x < 0 \end{cases} = -\frac{1}{(1+|x|)^2}, \quad x \neq 0$$

Zur Bestätigung sieht man folgendermaßen, dass die Ableitung an der Stelle $x = 0$ nicht existiert,

$$z_3'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{z_3(0+h) - z_3(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\text{sign}(h)}{h(1+|h|)} = \lim_{h\to 0} \begin{cases} \dfrac{+1}{h(1+h)}, & h > 0 \\ \dfrac{-1}{h(1-h)}, & h < 0 \end{cases} = +\infty$$

d.h. der Grenzwert ist uneigentlich, und die Ableitung kann keinen reelen Wert in $x = 0$ annehmen. Daher ist z_3 an dieser Stelle nicht differenzierbar.

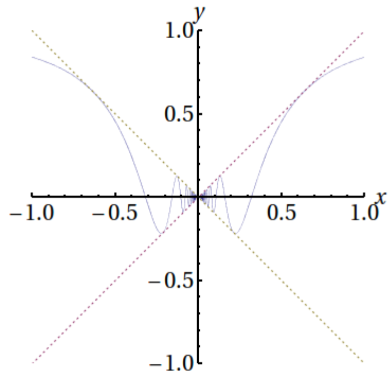
Achtung: Man darf zeilenweise ableiten, nur wenn eine für die Funktion definierende Formel in einem Intervall gilt, z.B. in der folgenden Darstellung,

$$z_3(x) = \begin{cases} \dfrac{+1}{1+x}, & x > 0 \\ \dfrac{-1}{1-x}, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

gilt die Formel $z_3(0) = 0$ nur in einem Punkt $x = 0$, und die irrtümliche (zeilenweise) Rechnung $z_3'(0) = D_x 0 = 0$ stimmt mit dem (richtigen) Ergebnis nicht überein, dass z_3 in $x = 0$ nicht stetig und daher nicht differenzierbar ist. Die anderen definierenden Formeln gelten in Intervallen, und hier darf man zeilenweise ableiten: $z_3'(x) = D_x[+1/(1+x)]$, $x > 0$, $z_3'(x) = D_x[-1/(1-x)]$, $x < 0$.

Bemerkung: Die Ableitungsfunktion $z_3'(x)$ lässt sich mit dem Punkt $(0,1)$ stetig ergänzen. Man sieht von der grafischen Darstellung von $z_3(x)$, dass die Steigung links und rechts von $x=0$ gegen -1 strebt.

(d) Die grafische Darstellung von $z_4(x) = x\sin(1/x)$, $x \neq 0$, $z_4(0) = 0$, ist



wobei die Kurve von $z_4(x)$ zwischen den gestrichelten Kurven $y_1(x) = +|x|$ und $y_2(x) = -|x|$ liegt. Da $z_4(x)$ sich in der Nähe von $x=0$ an die nicht differenzierbaren Funktionen $y_1(x)$ und $y_2(x)$ annähert, gibt es schon den Hinweis, dass $z_4(x)$ an dieser Stelle nicht differenzierbar ist. Dies ist der Fall, wie man mit der folgenden direkten Rechnung bestätigt.

$$z_4'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{z_4(0+h) - z_4(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h\sin(1/h) - 0}{h} = \lim_{h\to 0} \sin(1/h) = \ ?$$

Wie auf dem 4. Übungsblatt gesehen, es gelten

$$h_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0, \quad \sin(1/h_n) = \sin(\tfrac{\pi}{2} + 2n\pi) = 1 \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$$

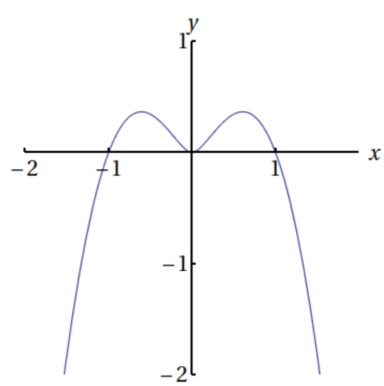
und

$$h_m = -\frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2m\pi} \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0, \quad \sin(1/h_m) = \sin(-\tfrac{\pi}{2} - 2m\pi) = -1 \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} -1$$

d.h. unterschiedliche Werte werden von $\sin(1/h)$ angenähert, wenn h sich an 0 auf unterschiedlichen Wegen annähert. Daher existiert der Grenzwert $\lim_{h\to 0}\sin(1/h)$ nicht. Also ist $z_4(x)$ an der Stelle $x=0$ nicht differenzierbar. Sonst für $x \neq 0$ gilt

$$z_4'(x) = \sin(1/x) + x\cos(1/x)(-1/x^2) = \sin(1/x) - \frac{\cos(1/x)}{x^2}$$

(e) Die grafische Darstellung von $z_5(x) = x^2\ln(1/x^2)$, $x \neq 0$, $z_5(0) = 0$, ist



und die globale Glattheit der Kurve ist ersichtlich, d.h. trotz der scheinbar schwierigen Stelle $x = 0$ in der Formel für $z_5(x)$ ist zu vermuten, dass die Funktion an jeder Stelle differenzierbar ist. Dies ist der Fall, wie man mit der folgenden direkten Rechnung bestätigt. (Seite 63 im Skriptum)

$$z_5'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{z_5(0+h) - z_5(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2 \ln(1/h^2)}{h} = \lim_{h\to 0} h \ln(h^{-2}) = -2 \lim_{h\to 0} h \ln(h) = 0$$

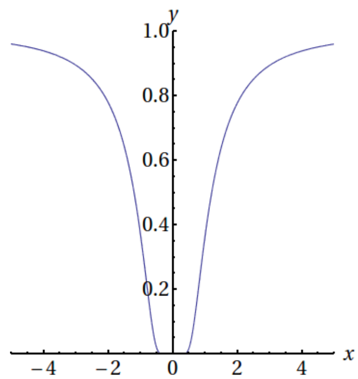
Sonst für $x \neq 0$ gilt

$$\begin{aligned} z_5'(x) &= D_x x^2 \ln(x^{-2}) = -D_x x^2 \ln(x^2) = -\left[(x^2)' \ln(x^2) + x^2 (\ln(x^2))'\right] \\ &= -2x \ln(x^2) - x^2 \frac{(x^2)'}{x^2} = -2x \ln(x^2) - 2x \end{aligned}$$

wobei die letzte Logarithmusfunktion sich (für $x > 0$ *oder* $x < 0$) so umschreiben lässt:

$$\ln(x^2) = \ln(|x|^2) = 2\ln(|x|)$$

(f) Die grafische Darstellung von $z_6(x) = \exp(-1/x^2)$, $x \neq 0$, $z_6(0) = 0$, ist



und die globale Glattheit der Kurve ist ersichtlich, d.h. trotz der scheinbar schwierigen Stelle $x = 0$ in der Formel für $z_6(x)$ ist zu vermuten, dass die Funktion an jeder Stelle differenzierbar ist. Dies ist der Fall, wie man mit der folgenden direkten Rechnung bestätigt.

$$z_6'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{z_6(0+h) - z_6(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\exp(-1/h^2)}{h} = 0$$

Um die letzte Gleichung zu zeigen, berechnet man die übereinstimmenden einseitigen Grenzwerte (Seite 63 im Skriptum):

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{e^{-1/h^2}}{h} \quad \overset{\sqrt{t}=-1/h}{=} \quad -\lim_{t\to\infty} \sqrt{t} e^{-t} = 0$$

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{e^{-1/h^2}}{h} \quad \overset{\sqrt{t}=+1/h}{=} \quad +\lim_{t\to\infty} \sqrt{t} e^{-t} = 0$$

d.h. $z_6'(0) = 0$. Sonst für $x \neq 0$ gilt

$$z_6'(x) = D_x e^{-x^{-2}} = e^{-x^{-2}} D_x(-x^{-2}) = e^{-x^{-2}}(+2x^{-3}) = \frac{2e^{-1/x^2}}{x^3}$$