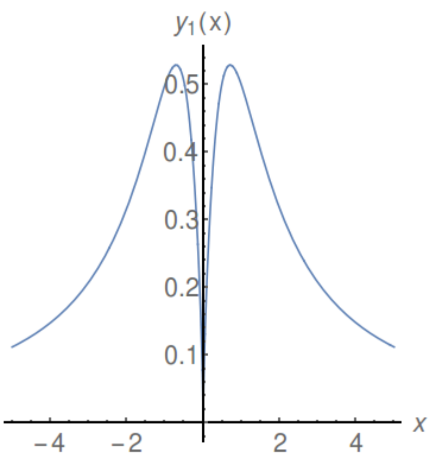
Integral- und Differentialrechnungen für USW
Lösungen der Beispiele des 5. Übungsblatts

1. Stetigkeit und Grenzwerte:

   (a) Aus der folgenden grafischen Darstellung von $y_1(x) = |x|^{2/3}/(1+x^2)$ ist ersichtlich, dass $y_1(x)$ für jedes $x \in \mathbb{R}$ stetig ist. Die Stetigkeit wird bezüglich der Eigenschaften auf Seite 61 im Skriptum folgendermaßen begründet. Erstens kann die Funktion so geschrieben werden,

$$y_1(x) = \frac{f(g(x))}{p(x)} \quad \text{mit} \quad f(x) = \sqrt[3]{x}, \quad g(x) = x^2, \quad p(x) = 1 + x^2$$



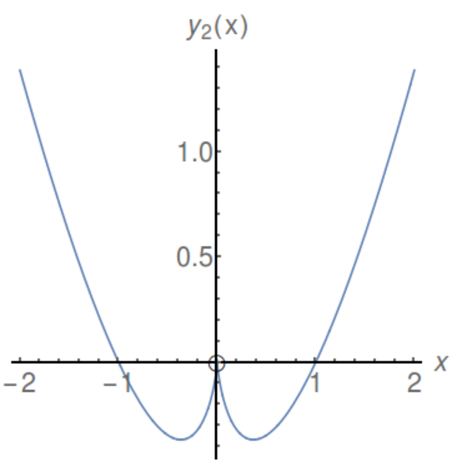
Diese Funktionen haben folgende Eigenschaften:

- $f(x)$, Potenzfunktion, Wurzel ungerade, stetig auf $D_f = \mathbb{R}$.
- $g(x)$, Polynom, stetig auf $D_g = \mathbb{R}$.
- $p(x)$, Polynom, stetig auf $D_p = \mathbb{R}$.
- $f(g(x))$, Komposition, stetig auf $D_{f\circ g} = \{x \in D_g : g(x) \in D_f) = \{x \in \mathbb{R} : x^2 \in \mathbb{R}) = \mathbb{R}$.
- $f(g(x))/p(x)$, Quotient mit $p(x) = 1 + x^2 \geq 1 > 0$, stetig auf $\{x \in D_{f\circ g} \cap D_p : p(x) \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : p(x) \neq 0\} = \mathbb{R}$.

und daher ist $y_1(x) = f(g(x))/p(x)$ stetig für jedes $x \in \mathbb{R}$.

   (b) Aus der folgenden grafischen Darstellung von $y_2(x) = |x| \ln |x|$ ist ersichtlich, dass $y_2(x)$ für jedes $x \neq 0$ stetig ist. Die Stetigkeit wird bezüglich der Eigenschaften auf Seite 61 im Skriptum folgendermaßen begründet. Erstens kann die Funktion so geschrieben werden,

$$y_2(x) = b(x) f(b(x)) \quad \text{mit} \quad b(x) = |x|, \quad f(x) = \ln(x)$$



Diese Funktionen haben folgende Eigenschaften:

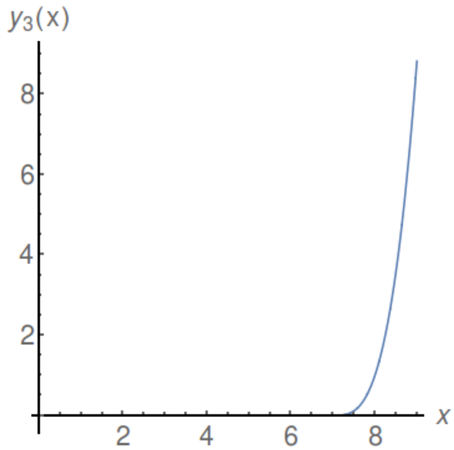
- $b(x)$, Betragsfunktion, stetig auf $D_b = \mathbb{R}$.
- $f(x)$, Logarithmusfunktion, stetig auf $\mathbb{R}_+$.
- $f(b(x))$, Komposition, stetig auf $D_{f\circ b} = \{x \in D_b : b(x) \in D_f\} = \{x \in \mathbb{R} : |x| \in \mathbb{R}_+\} = \mathbb{R}\backslash\{0\}$.
- $b(x)f(b(x))$, Produkt, stetig auf $D_b \cap D_{f\circ b} = \mathbb{R} \cap (\mathbb{R}\backslash\{0\}) = \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

und daher ist $y_2(x) = b(x)f(b(x))$ stetig für jedes $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

- Mit der zusätzlichen Zuweisung $y_2(0) = 0$ wird $y_2(x)$ an der Stelle $x_0 = 0$ stetig ergänzt.

   (c) Aus der folgenden grafischen Darstellung von $y_3(x) = (x-7)^\pi$ ist ersichtlich, dass $y_3(x)$ für jedes $x \geq 7$ stetig ist. Die Stetigkeit wird bezüglich der Eigenschaften auf Seite 61 im Skriptum folgendermaßen begründet. Erstens kann die Funktion so geschrieben werden,

$$y_3(x) = f(g(x)) \quad \text{mit} \quad f(x) = x^\pi, \quad g(x) = x - 7$$



Diese Funktionen haben folgende Eigenschaften:

- $f(x)$, Potenzfunktion, Potenz > 0, stetig auf $D_f = [0, \infty)$.
- $g(x)$, Polynom, stetig auf $D_g = \mathbb{R}$.
- $f(g(x))$, Komposition, stetig auf $D_{f \circ g} = \{x \in D_g : g(x) \in D_f\} = \{x \in \mathbb{R} : x - 7 \in [0, \infty)\} = [7, \infty)$.

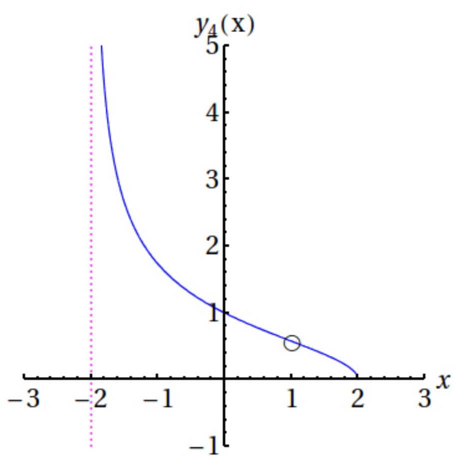
und daher ist $y_3(x) = f(g(x))$ stetig für jedes $x \in [7, \infty)$.

(d) Aus der folgenden grafischen Darstellung von $y_4(x) = \sqrt{(3x - 2 - x^2)/(x^2 + x - 2)}$ ist ersichtlich, dass $y_4(x)$ für jedes $x \in (-2, 2]\backslash\{+1\}$ stetig ist. Die Stetigkeit wird bezüglich der Eigenschaften auf Seite 61 im Skriptum folgendermaßen begründet. Erstens kann die Funktion so geschrieben werden,

$$y_4(x) = f(r(x)) \quad \text{mit} \quad f(x) = \sqrt{x}, \quad r(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

$$p(x) = 3x - 2 - x^2 = (x-1)(2-x), \quad q(x) = x^2 + x - 2 = (x-1)(x+2)$$

$$r(x) = \frac{(x-1)(2-x)}{(x-1)(x+2)} \overset{x \neq 1}{=} \frac{2-x}{x+2}$$



Diese Funktionen haben folgende Eigenschaften:

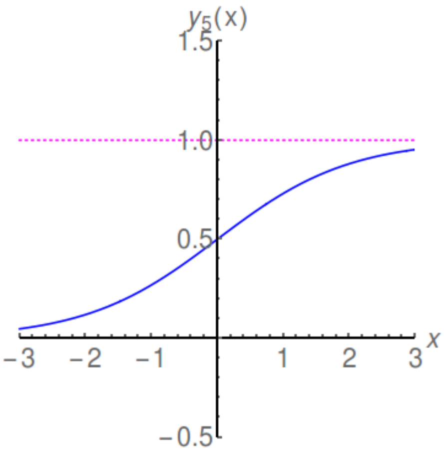
- $f(x)$, Potenzfunktion, Wurzel gerade, stetig auf $D_f = [0, \infty)$.
- $r(x)$, rationale Funktion, stetig auf $D_r = \{x \in \mathbb{R} : q(x) \neq 0\} = \mathbb{R}\backslash\{-2, +1\}$.
- $f(r(x))$, Komposition, stetig auf $D_{f \circ r} = \{x \in D_r : r(x) \in D_f\} = \{x \in \mathbb{R}\backslash\{-2, +1\} : r(x) > 0\} = (-2, +2]\backslash\{+1\}$.

und daher ist $y_4(x) = f(r(x))$ stetig für jedes $x \in (-2, +2]\backslash\{+1\}$.

- Mit der zusätzlichen Zuweisung $y_4(1) = 1/\sqrt{3}$ wird $y_4(x)$ an der Stelle $x_0 = 1$ stetig ergänzt.

(e) Aus der folgenden grafischen Darstellung von $y_5(x) = 1/(1 + e^{-x})$ ist ersichtlich, dass $y_5(x)$ für jedes $x \in \mathbb{R}$ stetig ist. Die Stetigkeit wird bezüglich der Eigenschaften auf Seite 61 im Skriptum folgendermaßen begründet. Erstens kann die Funktion so geschrieben werden,

$$y_5(x) = r(e(x)) \quad \text{mit} \quad r(x) = \frac{1}{q(x)}, \quad q(x) = 1 + x, \quad e(x) = \exp(-x)$$



Diese Funktionen haben folgende Eigenschaften:

- $r(x)$, rationale Funktion, stetig auf $D_r = \{x \in \mathbb{R} : q(x) \neq 0\} = \mathbb{R}\backslash\{-1\}$.
- $e(x)$, Exponentialfunktion, stetig auf $D_e = \mathbb{R}$.
- $r(e(x))$, Komposition, stetig auf $D_{r\circ e} = \{x \in D_e : e(x) \in D_r\} = \{x \in \mathbb{R} : e^{-x} \neq -1\} = \mathbb{R}$.

und daher ist $y_5(x) = r(e(x))$ stetig für jedes $x \in \mathbb{R}$.

Für jedes der obigen Beispiele bestimmt man den Grenzwert $\lim_{x\to x_0} y_i(x)$ an einer Stelle x_0, in der die Funktion stetig ist, einfach durch die Auswertung

$$\lim_{x\to x_0} y_i(x) = y_i(x_0), \quad i = 1, \ldots, 5.$$

Wie oben hingewiesen gibt es zwei Funktionen, die sich stetig ergänzen lassen.

Wegen der Eigenschaft $x^p \log_a(x) \stackrel{x\to 0^+}{\longrightarrow} 0$ $(p > 0)$ folgen

$$\lim_{x\to 0^+} y_2(x) = \lim_{x\to 0^+} x\ln(x) = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{x\to 0^-} y_2(x) \stackrel{|x|=-x}{=} \lim_{x\to 0^-} -x\ln(-x) = \lim_{x\to 0^+} x\ln(x) = 0$$

und daher ist die zusätzliche Zuweisung $y_2(0) = 0$ eine stetige Ergänzung.

Mit einer algebraischen Vereinfachung folgt

$$\lim_{x\to 1} y_4(x) = \lim_{x\to 1} \sqrt{\frac{3x-2-x^2}{x^2+x-2}} = \lim_{x\to 1} \sqrt{\frac{2-x}{x+2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

und daher ist die zusätzliche Zuweisung $y_4(1) = 1/\sqrt{3}$ eine stetige Ergänzung.

2. Methoden zur Bestimmung eines Grenzwerts:

   (a) Durch algebraische Vereinfachung ergibt sich

   $$\lim_{x\to 1^+} \frac{x^4-1}{x^2-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{(x^2-1)(x^2+1)}{x^2-1} = \lim_{x\to 1} x^2+1 = 2$$

   und

   $$\lim_{x\to 1^+} \frac{x^4+1}{x^2-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{\overbrace{(x^4+1)}^{>0, x\approx 1^+}}{\underbrace{(x-1)}_{>0, x\approx 1^+}\underbrace{(x+1)}_{>0, x\approx 1^+}} = +\infty$$

   (b) Durch Eigenschaften der Winkelfunktion bekommt man

   $$\lim_{x\to 1^-} \tan(\pi x/2) = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \tan(x) = +\infty \quad \text{und} \quad \lim_{x\to 1^+} \tan(\pi x/2) = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^+} \tan(x) = -\infty$$

(c) Die Komposition $f(g(x)) = |\sqrt[3]{x}|$ mit $f(x) = |x|$, $D_f = \mathbb{R}$, $g(x) = \sqrt[x]{x}$ und $D_g = \mathbb{R}$, ist stetig auf $D_{f\circ g} = \{x \in D_g : g(x) \in D_f\} = \{x \in \mathbb{R} : \sqrt[3]{x} \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$. Aus der Eigenschaft $-1 \le \sin(x) \le 1$ $(\forall x \in \mathbb{R})$ und der Stetigkeit der Komposition $|\sqrt[3]{x}|$ auf $\mathbb{R}$ folgt $\sqrt[3]{x}\sin(1/x) \stackrel{x\to 0}{\longrightarrow} 0$ mit dem Sandwich

$$0 = -|\sqrt[3]{0}| = \lim_{x\to 0} -|\sqrt[3]{x}| \le \lim_{x\to 0} \sqrt[3]{x}\sin(1/x) \le \lim_{x\to 0} |\sqrt[3]{x}| = |\sqrt[3]{0}| = 0$$

Aus der Stetigkeit der Winkelfunktion $\sin(x)$, des Polynoms x^2, der Komposition $\sin(x^2)$, der rationalen Funktion $1/x^2$ $(x \neq 0)$ und des Quotienten $\sin(x^2)/x^2$ folgt

$$\lim_{x\to 1} \sin(x^2)/x^2 = \sin(1^2)/1^2 = \sin(1)$$

Aus den Eigenschaften $-1 \le \sin(x) \le 1$ $(\forall x \in \mathbb{R})$ und $1/|x| = 1/x \stackrel{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ folgt $\sin(x)/|x| \stackrel{x\to\infty}{\longrightarrow} 0$ mit dem Sandwich

$$0 = \lim_{x\to+\infty} -1/x \le \lim_{x\to+\infty} \sin(x)/|x| \le \lim_{x\to+\infty} 1/x = 0$$

(d) Aus der Eigenschaft $\log_a(x)/x^p \stackrel{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ $(p > 0)$ folgt

$$\lim_{x\to+\infty} \log_2(x)/\sqrt{x} = 0$$

Aus der Eigenschaft $x^p \log_a(x) \stackrel{x\to 0^+}{\longrightarrow} 0$ $(p > 0)$ folgt

$$\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x}\ln(x) = 0$$

(e) Aus der Eigenschaft $x^p a^{-x} \stackrel{x\to\infty}{\longrightarrow} 0$ $(a > 1)$ folgt

$$\lim_{x\to+\infty} (1+x)4^{-x} = 0$$

Aus den Eigenschaften $x^{-n} \stackrel{x\to-\infty}{\longrightarrow} 0$ $(n \in \mathbb{N})$ und $x^n a^x \stackrel{x\to-\infty}{\longrightarrow} 0$ $(a > 1)$ folgt

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{5^x}{1+x+x^2}\left(\frac{x^{-2}}{x^{-2}}\right) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^{-2}5^x}{(1+1/x+1/x^2)} = 0$$

Aus der Eigenschaft $a^{-x} \stackrel{x\to\infty}{\longrightarrow} 0$ $(a > 1)$ folgt

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1+2^x}{e^x+3^{-x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1+2^x}{e^x+3^{-x}}\left(\frac{e^{-x}}{e^{-x}}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{-x}+(e/2)^{-x}}{1+(3e)^{-x}} = 0$$

3. Bisektionsverfahren:

(a) Für die überall stetige Funktion

$$f(x) = \frac{1-2x\tan^{-1}(x)}{(1+x^2)^2} \quad \text{gelten} \quad f(0) = +1.0000, \quad f(1) = -0.1427$$

Daher wendet man das Bisektionsverfahren im Intervall $[0, 1]$ an. Mit den Anfangswerten $a = 0$ und $b = 1$ und immer $c = (a+b)/2$ liefert das Bisektionsverfahren folgende Ergebnisse:

c	$f(c)$	a	b
0.50000	0.34327	0.00000	1.00000
0.75000	0.01423	0.50000	1.00000
0.87500	−0.08275	0.75000	1.00000
0.81250	−0.03946	0.75000	0.87500
0.78125	−0.01398	0.75000	0.81250
0.76562	−0.00022	0.75000	0.78125
0.75781	0.00692	0.75000	0.76562
0.76172	0.00333	0.75781	0.76562
0.76367	0.00155	0.76172	0.76562
0.76465	0.00066	0.76367	0.76562
0.76514	0.00022	0.76465	0.76562
0.76538	−0.00000	0.76514	0.76562
0.76526	0.00011	0.76514	0.76538
0.76532	0.00005	0.76526	0.76538
0.76535	0.00003	0.76532	0.76538
0.76537	0.00001	0.76535	0.76538
0.76537	0.00001	0.76537	0.76538

d.h. eine Nullstelle für $f(x)$ ist $x_0 \approx 0.7654$.

(b) Für die überall stetige Funktion

$$g(x) = \frac{(6x^2 - 2)\tan^{-1}(x) - 6x}{(1 + x^2)^3} \quad \text{gelten} \quad g(1) = -0.3573, \quad g(2) = 0.0989$$

Daher wendet man das Bisektionsverfahren im Intervall $[1, 2]$ an. Mit den Anfangswerten $a = 1$ und $b = 2$ und immer $c = (a+b)/2$ liefert das Bisektionsverfahren folgende Ergebnisse:

c	$g(c)$	a	b
1.50000	0.06706	1.00000	2.00000
1.25000	−0.05299	1.00000	1.50000
1.37500	0.02285	1.25000	1.50000
1.31250	−0.01032	1.25000	1.37500
1.34375	0.00734	1.31250	1.37500
1.32812	−0.00121	1.31250	1.34375
1.33594	0.00314	1.32812	1.34375
1.33203	0.00098	1.32812	1.33594
1.33008	−0.00011	1.32812	1.33203
1.33105	0.00044	1.33008	1.33203
1.33057	0.00017	1.33008	1.33105
1.33032	0.00003	1.33008	1.33057
1.33020	−0.00004	1.33008	1.33032

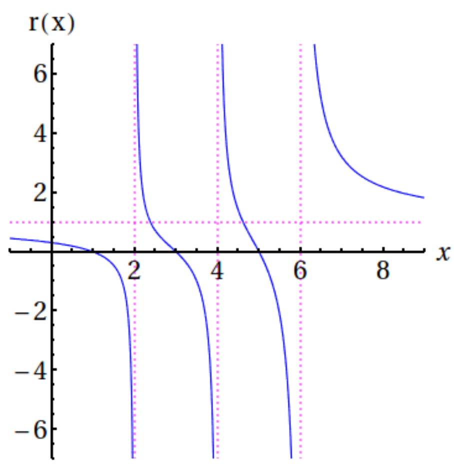
d.h. eine Nullstelle für $g(x)$ ist $x_1 \approx 1.330$.

4. Zwischenwertsatz:

   (a) Die rationale Funktion
   $$r(x) = \frac{(x-1)(x-3)(x-5)}{(x-2)(x-4)(x-6)}$$
   besitzt die Nullstellen $\{1, 3, 5\}$ und die Polstellen $\{2, 4, 6\}$.

   (b) Anhand der Stetigkeit der rationalen Funktion zwischen Nullstellen und Polstellen bedeuten die Werte
   $$\begin{array}{rcl} r(0.5) & \approx & +0.195 \\ r(1.5) & \approx & -0.467 \\ r(2.5) & \approx & +0.714 \\ r(3.5) & \approx & -1.000 \\ r(4.5) & \approx & +1.400 \\ r(5.5) & \approx & -2.143 \\ r(6.5) & \approx & +5.133 \end{array} \quad \text{dass} \quad \begin{array}{ll} r(x) > 0, & x \in (-\infty, 1) \\ r(x) < 0, & x \in (1, 2) \\ r(x) > 0, & x \in (2, 3) \\ r(x) < 0, & x \in (3, 4) \\ r(x) > 0, & x \in (4, 5) \\ r(x) < 0, & x \in (5, 6) \\ r(x) > 0, & x \in (6, +\infty) \end{array}$$

   (c) Die grafische Darstellung von $r(x)$ ist:



5. Geometrische Reihen:

   (a) Nach n Minuten geht der Student so viele Meter,
   $$100\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^{n-1}}\right) = 100\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2^i}$$
   Man überzeugt sich davon durch eine Kontrolle mit bestimmten kleinen Werten von n. Diese Summe lässt sich durch eine geometrische Reihe vereinfachen:
   $$100\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2^i} = 100\left(-1 + \sum_{i=0}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^i\right) = 100\left[-1 + \frac{1-(1/2)^{n+1}}{1-(1/2)}\left(\frac{2}{2}\right)\right] = 100(1-2^{-n})$$
   Insbesondere nach 10 Minuten geht er
   $$100(1-2^{-10}) = 99.9023 \text{ Meter}$$

(b) Die Anzahl der Minuten n, nach der der Student 90% des Weges zum Ziel kommt, d.h. 90 Meter geht, erfüllt:

$$\begin{array}{rcl|l} 100(1-2^{-n}) & = & 90 & \div 100 \\ 1-2^{-n} & = & 0.9 & +2^{-n}-0.9 \\ 0.1 = 1-0.9 & = & 2^{-n} & \log_2(\cdot) \\ \log_2(0.1) & = & \log_2(2^{-n}) = -n & \times -1 \\ 3.322 \approx \log_2(10) & = & n & \end{array}$$

d.h. es dauert ≈ 3.322 Minuten. Grober beschrieben ist er nach 3 Minuten 87.5% des Weges und nach 4 Minuten 93.75% des Weges gegangen.