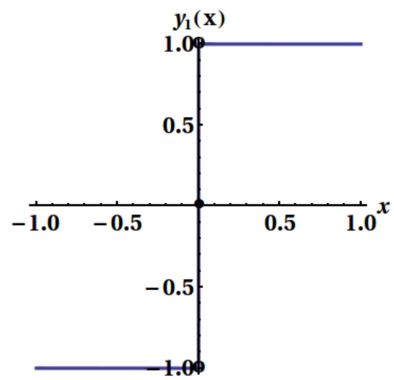
Integral- und Differentialrechnungen für USW
Lösungen der Beispiele des 4. Übungsblatts

1. Nicht stetige Funktionen:

   (a) Man zeigt, $f(x) = \text{sign}(x)$ ist an der Stelle $x_0 = 0$ nicht stetig. Wenn die Funktion in $x_0 = 0$ stetig wäre, müsste $y_1(x)$ sich an den Wert $y_1(x_0) = 0$ annähern, wenn x in einer *beliebigen* Weise sich an $x_0 = 0$ annähern würde. Wenn man nur *eine* Verletzung dieser Eigenschaft entdeckt, dann ist die Funktion nicht stetig. Man sieht solche Verletzungen folgendermaßen, zuerst von rechts und dann von links.

   Für die x-Werte

   $$x_1 = 1, \quad x_2 = \tfrac{1}{2}, \quad x_3 = \tfrac{1}{3}, \quad \dots \qquad x_k = \tfrac{1}{k} \stackrel{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

   die sich an $x_0 = 0$ von rechts annähern, gelten

   $$\begin{aligned} y_1(x_1) &= \text{sign}(1) = 1 \\ y_1(x_2) &= \text{sign}(\tfrac{1}{2}) = 1 \\ y_1(x_3) &= \text{sign}(\tfrac{1}{3}) = 1 \\ &\vdots \\ y_1(x_k) &= \text{sign}(\tfrac{1}{k}) = 1 \\ &\stackrel{k\to\infty}{\longrightarrow} 1 \neq 0 = y_1(0) \end{aligned}$$

   und die entsprechenden y_1-Werte nähern sich nicht an $y_1(x_0) = 0$!

   Auch für die x-Werte

   $$x_1 = -1, \quad x_2 = -\tfrac{1}{2}, \quad x_3 = -\tfrac{1}{3}, \quad \cdots, \qquad x_k = -\tfrac{1}{k} \stackrel{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

   die sich an $x_0 = 0$ von links annähern, gelten

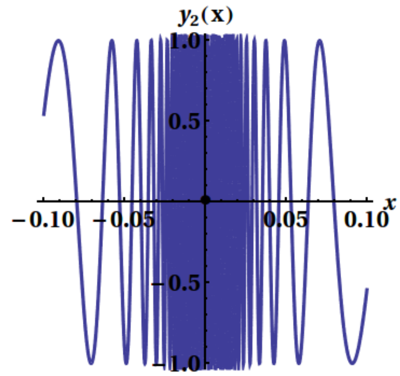
   $$\begin{aligned} y_1(x_1) &= \text{sign}(-1) = -1 \\ y_1(x_2) &= \text{sign}(-\tfrac{1}{2}) = -1 \\ y_1(x_3) &= \text{sign}(-\tfrac{1}{3}) = -1 \\ &\vdots \\ y_1(x_k) &= \text{sign}(-\tfrac{1}{k}) = -1 \\ &\stackrel{k\to\infty}{\longrightarrow} -1 \neq 0 = y_1(0) \end{aligned}$$

   und die entsprechenden y_1-Werte nähern sich nicht an $y_1(x_0) = 0$!

   (b) Man zeigt, $g(x) = \sin(1/x)$, $g(0) = 0$, ist an der Stelle $x_0 = 0$ nicht stetig. Wenn die Funktion in $x_0 = 0$ stetig wäre, müsste $y_2(x)$ sich an den Wert $y_2(x_0) = 0$ annähern, wenn x in einer *beliebigen* Weise sich an $x_0 = 0$ annähern würde. Wenn man nur *eine* Verletzung dieser Eigenschaft entdeckt, dann ist die Funktion nicht stetig. Man sieht solche Verletzungen folgendermaßen, zuerst von rechts und dann von links.

Für die x-Werte

$$x_1 = \frac{1}{\frac{\pi}{2}+2\pi}, \quad x_2 = \frac{1}{\frac{\pi}{2}+4\pi}, \quad x_3 = \frac{1}{\frac{\pi}{2}+6\pi}, \quad \ldots \qquad x_k = \frac{1}{\frac{\pi}{2}+2k\pi} \xrightarrow{k\to\infty} 0$$



die sich an $x_0 = 0$ von rechts annähern, gelten

$$\begin{aligned}
y_2(x_1) &= \sin(1/\tfrac{1}{\frac{\pi}{2}+2\pi}) = \sin(\tfrac{\pi}{2}+2\pi) = 1\\
y_2(x_2) &= \sin(1/\tfrac{1}{\frac{\pi}{2}+4\pi}) = \sin(\tfrac{\pi}{2}+4\pi) = 1\\
y_2(x_3) &= \sin(1/\tfrac{1}{\frac{\pi}{2}+6\pi}) = \sin(\tfrac{\pi}{2}+6\pi) = 1\\
&\vdots\\
y_2(x_k) &= \sin(1/\tfrac{1}{\frac{\pi}{2}+2k\pi}) = \sin(\tfrac{\pi}{2}+2k\pi) = 1\\
&\xrightarrow{k\to\infty} 1 \neq 0 = y_2(0)
\end{aligned}$$

und die entsprechenden y_2-Werte nähern sich nicht an $y_2(x_0) = 0$!

Auch für die x-Werte

$$x_1 = -\frac{1}{\frac{\pi}{2}+2\pi}, \quad x_2 = -\frac{1}{\frac{\pi}{2}+4\pi}, \quad x_3 = -\frac{1}{\frac{\pi}{2}+6\pi}, \cdots, \qquad x_k = -\frac{1}{\frac{\pi}{2}+2k\pi} \xrightarrow{k\to\infty} 0$$

die sich an $x_0 = 0$ von links annähern, gelten

$$\begin{aligned}
y_2(x_1) &= \sin(-1/\tfrac{1}{\frac{\pi}{2}+2\pi}) = \sin(-\tfrac{\pi}{2}-2\pi) = -1\\
y_2(x_2) &= \sin(-1/\tfrac{1}{\frac{\pi}{2}+4\pi}) = \sin(-\tfrac{\pi}{2}-4\pi) = -1\\
y_2(x_3) &= \sin(-1/\tfrac{1}{\frac{\pi}{2}+6\pi}) = \sin(-\tfrac{\pi}{2}-6\pi) = -1\\
&\vdots\\
y_2(x_k) &= \sin(-1/\tfrac{1}{\frac{\pi}{2}+2k\pi}) = \sin(-\tfrac{\pi}{2}-2k\pi) = -1\\
&\xrightarrow{k\to\infty} -1 \neq 0 = y_2(0)
\end{aligned}$$

und die entsprechenden y_2-Werte nähern sich nicht an $y_2(x_0) = 0$!

2. Grenzwerte durch Komposition:

   (a) Anhand der Eigenschaften $1/x \xrightarrow{x\to\infty} 0$ und $1/x^2 \xrightarrow{x\to\infty} 0$ folgt für $r(x) = (x^2+x+1)/(x^2-x-1)$

   $$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+x+1}{x^2-x-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+x+1}{x^2-x-1}\left(\frac{x^{-2}}{x^{-2}}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{1+1/x+1/x^2}{1-1/x-1/x^2} = 1$$

   (b) Da $\ln(x)$ stetig auf $D = \mathbb{R}_+$ ist, folgt für $g(x) = \ln(x)$

   $$\lim_{x\to 1} \ln(x) = \ln(1) = 0$$

   (c) Durch die Kombination der letzten zwei Ergebnisse folgt für die Komposition $g(r(x))$

   $$\lim_{x\to\infty} \ln\left(\frac{x^2+x+1}{x^2-x-1}\right) = \lim_{r\to 1} \ln(r) = \ln(1) = 0.$$

Weiters sieht man von den Auswertungen,

x	10	100	1000	10000
$r(x)$	≈ 1.25	≈ 1.02	≈ 1.002	≈ 1.0002
$g(r(x))$	≈ 0.22	≈ 0.02	≈ 0.002	≈ 0.0002

die Komposition $g(r(x))$ nähert sich an den Wert 0, während x immer größer wird, d.h. sich (mindestens durch die hier ausgewählten Werte) an ∞ annähert.

(d) Anhand der Eigenschaften, $1/x \overset{x\to 0^+}{\longrightarrow} +\infty$ und $1/x \overset{x\to 0^-}{\longrightarrow} -\infty$ folgen die uneigentlichen Grenzwerte für $s(x) = 1/x$

$$\lim_{x\to 0^-} 1/x = -\infty \quad \text{und} \quad \lim_{x\to 0^+} 1/x = +\infty$$

Anhand der Eigenschaften $a^x \overset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ $(a > 1)$ und $a^x \overset{x\to-\infty}{\longrightarrow} 0$ $(a > 1)$ folgen für $y(x) = \exp(x)$

$$\lim_{x\to-\infty} \exp(x) = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{x\to+\infty} \exp(x) = +\infty$$

Durch die Kombination der letzten zwei Ergebnisse folgen für die Komposition $f(x) = y(s(x))$

$$\lim_{x\to 0^-} \exp(1/x) = \lim_{s\to-\infty} \exp(s) = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{x\to 0^+} \exp(1/x) = \lim_{s\to+\infty} \exp(s) = +\infty$$

Weiters sieht man von den Auswertungen,

x	-1	-0.1	-0.01	-0.001
$s(x)$	-1	-10	-100	-1000
$y(s(x))$	≈ 0.37	$\approx 10^{-5}$	$\approx 10^{-44}$	$\approx 10^{-435}$

die Komposition $f(x) = y(s(x))$ nähert sich an den Wert 0, während x sich (mindestens durch die hier ausgewählten Werte) an den Wert 0 von links annähert. Man sieht von den Auswertungen,

x	1	0.1	0.01	0.001
$s(x)$	1	10	100	1000
$y(s(x))$	≈ 2.72	$\approx 10^{4}$	$\approx 10^{43}$	$\approx 10^{434}$

die Komposition $f(x) = y(s(x))$ wird immer größer, d.h. nähert sich an $+\infty$, während x sich (mindestens durch die hier ausgewählten Werte) an den Wert 0 von rechts annähert.

3. Grenzwerte von Summen und Differenzenquotienten:

(a) Anhand der Summenformeln auf Seite 70 im Skriptum gelten

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} i = \lim_{n\to\infty} \frac{n(n+1)}{2n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+n}{2n^2} \left(\frac{n^{-2}}{n^{-2}}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1+1/n}{2} = \frac{1}{2}$$

und

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^4} \sum_{i=1}^{n} i^3 = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2(n+1)^2}{4n^4} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^4+2n^3+n^2}{4n^4} \left(\frac{n^{-4}}{n^{-4}}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1+2/n+1/n^2}{4} = \frac{1}{4}$$

(b) Anhand der algebraischen Formeln

$$(a^n - b^n) = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

und (äquivalent)

$$(a-b) = \frac{(a^n - b^n)}{(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1})}$$

gelten

$$\lim_{h\to 0} \frac{(1+h)^3 - 1^3}{(1+h)-1} = \lim_{h\to 0} \frac{[(1+h)-1][(1+h)^2 + (1+h) + 1]}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h[(1+h)^2 + (1+h) + 1]}{h} = \lim_{h\to 0}[(1+h)^2 + (1+h) + 1] = 3$$

und

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{1+h} - \sqrt{1}}{(1+h)-1} = \lim_{h\to 0} \frac{(\sqrt{1+h})^2 - (\sqrt{1})^2}{h[\sqrt{1+h} + \sqrt{1}]} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{h[\sqrt{1+h} + \sqrt{1}]} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{1+h} + \sqrt{1}} = \frac{1}{2}$$

4. Flächeninhalt als Grenzwert:

Für $n \in \mathbb{N}$ sei $x_i = i/n$ für $i = 0, 1, \ldots, n$.

(a) Mit $y(x) = x$ ist der Flächeninhalt des Vierecks $[x_{i-1}, x_i] \times [0, y(x_i)]$ für $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$

$$(x_i - x_{i-1}) \times (y(x_i) - 0) = \frac{1}{n} \times x_i = \frac{1}{n} \times \frac{i}{n} = \frac{i}{n^2}$$

(b) Der Flächeninhalt der Summe solcher Vierecke über $i = 1, \ldots, n$ ist

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{i}{n^2} = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} i$$

(c) Der Grenzwert dieser Summe für $n \to \infty$ ist gegeben im ersten Teil des Beispiels 3a,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} i = \frac{1}{2}$$

(d) Mit $f(x) = x^3$ ist der Flächeninhalt des Vierecks $[x_{i-1}, x_i] \times [0, f(x_i)]$ für $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$

$$(x_i - x_{i-1}) \times (f(x_i) - 0) = \frac{1}{n} \times x_i^3 = \frac{1}{n} \times \left(\frac{i}{n}\right)^3 = \frac{i^3}{n^4}$$

Der Flächeninhalt der Summe solcher Vierecke über $i = 1, \ldots, n$ ist

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{i^3}{n^4} = \frac{1}{n^4} \sum_{i=1}^{n} i^3$$

Der Grenzwert dieser Summe für $n \to \infty$ ist gegeben im zweiten Teil des Beispiels 3a,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{1}{4}$$

5. Steigung als Grenzwert:

   (a) Für die Funktion $y(x) = x^3$ ist die Steigung einer Sekantengerade durch die Punkte $(1, y(1))$ und $(1+h, y(1+h))$ gegeben durch

$$\frac{y(1+h) - y(1)}{(1+h) - 1} = \frac{(1+h)^3 - 1^3}{(1+h) - 1}$$

   (b) Die Vereinfachung dieses Differenzenquotienten und der Grenzwert sind im ersten Teil des Beispiels 3b gegeben,

$$\lim_{h \to 0} \frac{(1+h)^3 - 1^3}{(1+h) - 1} = \lim_{h \to 0} [(1+h)^2 + (1+h) + 1] = 3$$

   (c) Für die Funktion $f(x) = \sqrt{x}$ ist die Steigung einer Sekantengerade durch die Punkte $(1, f(1))$ und $(1+h, f(1+h))$ gegeben durch

$$\frac{f(1+h) - f(1)}{(1+h) - 1} = \frac{\sqrt{1+h} - \sqrt{1}}{(1+h) - 1}$$

   Die Vereinfachung dieses Differenzenquotienten und der Grenzwert sind im zweiten Teil des Beispiels 3b gegeben,

$$\lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{1+h} - \sqrt{1}}{(1+h) - 1} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt{1+h} + \sqrt{1}} = \frac{1}{2}$$